6.2 Esercizi proposti

Esercizio 6.19. [GGV01] *Determinare le eventuali relazioni di inclusione tra gli insiemi $A_1,\ A_2$ con*

1. $A_1 = \{1 + a\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Q}\}$, $A_2 = \{1 + a\sqrt{3} \mid a \in \mathbb{Q}\}$.
2. $A_1 = \{1 + a\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{R}\}$, $A_2 = \{1 + a\sqrt{3} \mid a \in \mathbb{R}\}$.
3. $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \in \mathbb{R} \mid y = x^2 - 4\}$, $A_2 = \{\alpha(2, 1) + \beta(2, 2) \in \mathbb{R} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. *Determinare l'intersezione dei due insiemi.*
4. $A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid x - y - z = 0\}$, $A_2 = \{\lambda(2, 1, 1) \mid \lambda \in \mathbb{Q}\}$.
5. $A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid x - y - z = 0\}$, $A_2 = \{\lambda(2, 3, 1) \mid \lambda \in \mathbb{Q}\}$.

Osservazione 6.20. [GGD01] *Quando diciamo che un sistema ha ∞^s soluzioni, intendiamo che l'insieme delle soluzioni ha bisogno di almeno s parametri per essere descritto. Questa nozione sarà dettagliata in seguito.*

Esercizio 6.21. [GG01] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + z + 2t - 1 = 0 \\ y - t - 1 = 0 \\ -y - z + t = 0 \\ 2x + t - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esiste un'unica soluzione: $(x, y, z, t) = (0, 2, -1, 1)$. □

Esercizio 6.22. [GG02] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + z + 2t - 1 = 0 \\ 3x + y - t - 1 = 0 \\ -y - z + t = 0 \\ 2x + 2z + t - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esiste un'unica soluzione: $(x, y, z, t) = \left(\frac{4}{11}, 0, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$. □

Esercizio 6.23. [GG03] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y + 9z + 4t - 2 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esistono ∞^2 soluzioni $(x, y, z, t) = \left(-\frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}, y, z, -\frac{1}{4}\right)$. □

Esercizio 6.24. [GG04] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F}: \begin{cases} 2x+y+3z+4t=0 \\ 2x+y+3z-1=0 \\ 6x+3y+9z+4t-1=0 \\ 8x+4y+12z+12t=0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Il sistema è impossibile. □

Esercizio 6.25. [GG05] *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F}: \begin{cases} 2x+y+3z+4t=0 \\ 2x+y+3z-1=0 \\ 6x+3y+9z+4t-2=0 \\ x+y+z+t-1=0 \\ 8x+4y+12z+12t-1=0 \\ 2x+3y+5z+2t+1=0 \end{cases}$$

Determinare le soluzioni.

Soluzione. Esiste un'unica soluzione: $(x,y,z,t)=\left(2,\frac{3}{8},-\frac{9}{8},-\frac{1}{4}\right)$ □

Esercizio 6.26. [CCA15] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice, conservando le soluzioni nei primi due casi e, nel caso della forma normale, conservandole a meno di un eventuale riordino delle variabili.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.27. [CCA14] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.28. [CCA13] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.29. [CCA12] *Mettere in forma a scala, standard e normale la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & -7 & 2 & -6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 6.30. [CCC08] *Determinare relazioni di uguaglianza ed inclusione tra gli insiemi*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + x^2 y = 0\} \\ A_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy = 0\} \\ A_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \end{aligned}$$

Esercizio 6.31. [CCC07] *Determinare relazioni di uguaglianza ed inclusione tra gli insiemi*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(1+t, 1-t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \\ A_2 &= \{(1+t^2, 1-t^2) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \\ A_3 &= \{(1+t^3, 1-t^3) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$