Capitolo 5

Quinta Lezione - Sistemi e Gauss

5.1 Sistemi lineari su un campo

Esempio 5.1. [CCC00]**Non in classe**

- *Risolvere* $3x-2=0$ *in* $\mathbb{R}$ *equivale a determinare*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 3x-2=0\} \subset \mathbb{R} \text{ ovvero } \{2/3\}$$

- *Risolvere* $(3i-1)x^2+(i+1)x-i=0$ *in* $\mathbb{C}$ *equivale a determinare*

$$\{x \in \mathbb{C} \mid (3i-1)x^2+(i+1)x-i=0\} \subset \mathbb{C} \text{ ovvero } \left\{ \frac{-i-1+\sqrt{(i+1)^2+4i(3i-1)}_{\mathbb{C}}}{2(3i-1)} \right\} \subset \mathbb{C}$$

Esempio 5.2. [CCC01]**Non in classe***Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad \text{in } \mathbb{R}$$

equivale a determinare

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases} \right\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ ovvero } \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Esempio 5.3. [CCC09] *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} 2x-y-5z=3 \end{cases} \qquad \text{in } \mathbb{R}$$

equivale a determinare

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x-y-5z=3 \end{cases} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

che posso descrivere in svariati modi, esplicitando la x

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x=\frac{y}{2}+\frac{5}{2}z+\frac{3}{2} \end{cases} \right\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ ovvero } \left\{ \left(\frac{y}{2}+\frac{5}{2}z+\frac{3}{2}, y, z \right) \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

oppure la y

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{ y = 2x - 5z - 3 \quad \right\} \subset \mathbb{R}^3 \right. \text{ ovvero } \{(x, 2x-5z-3, z)\} \subset \mathbb{R}^3$$

oppure la z

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{ z = \tfrac{2}{5}x - \tfrac{y}{5} - \tfrac{3}{5} \quad \right\} \subset \mathbb{R}^3 \right. \text{ ovvero } \left\{ \left(x, y, \frac{2}{5}x - \frac{y}{5} - \frac{3}{5} \right) \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Chiaramente si tratta sempre dello stesso insieme S.

Diamo una definizione formale di soluzioni:

Definizione 5.4. `[CCC03]` *Sia S un sistema di equazioni a soluzioni in $\mathbb{K}^n$,*

$$S : \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

dove $f_1, \ldots, f_m$ sono funzioni $: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Allora l'insieme delle soluzioni di S è

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \begin{cases} f_1(c_1, \ldots, c_n) = 0 \\ \vdots \\ f_i(c_1, \ldots, c_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(c_1, \ldots, c_n) = 0 \end{cases} \right\}$$

Definizione 5.5. `[CCC04]` *Siano dati due sistemi di equazioni a soluzioni in $\mathbb{K}^n$,*

$$S_1 : \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_r(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Diciamo che S_1 è equivalente *ad S_2, ($S_1 \equiv S_2$) se, equivalentemente,*

1. $\mathrm{Sol}(S_1) = \mathrm{Sol}(S_2)$ *(hanno le stesse soluzioni)*
2. *Posso trasformare le equazioni $f_1, \ldots, f_m$ nelle equazioni $g_1, \ldots, g_r$ attraverso operazioni che non cambiano l'insieme delle soluzioni.*

   Per esercizio, provare che le due definizioni precedenti sono equivalenti.

5.2 Metodo di Gauss

Esempio 5.6. [CCC11] *Risolviamo su* $\mathbb{R}$ *il sistema lineare*

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x-y+2z=1 \\ 3x+y-5z=2 \end{cases}$$

Vogliamo risolvere in modo sistematico, eliminando prima le x *e poi le* y*, procedendo dalla prima equazione. Scambiamo la prima e la seconda riga*

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+y-5z=2 \end{cases}$$

sostituiamo alla seconda riga la differenza tra la seconda riga e la prima riga moltiplicata per 2*, e alla terza riga la differenza tra la terza riga e la prima moltiplicata per* 3*.*

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+3y+z-2(x-y+2z)=1-2(1) \\ 3x+y-5z-3(x-y+2z)=2-3(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 5y-3z=-1 \\ 4y-11z=-1 \end{cases}$$

Sostituiamo alla terza riga la differenza tra la terza riga e la seconda moltiplicata per $\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 5y-3z=-1 \\ 4y-11z-\frac{4}{5}(5y-3z)=-1-\frac{4}{5}(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 5y-3z=-1 \\ -\frac{43}{5}z=-\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 5y-3z=-1 \\ 43z=1 \end{cases}$$

Dato che opereremo una serie di sostituzioni, dividiamo le righe per avere polinomi monici

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ y-\frac{3}{5}z=-\frac{1}{5} \\ z=\frac{1}{43} \end{cases}$$

Sostituiamo la z *e poi la* y

$$\begin{cases} x-y+2\left(\frac{1}{43}\right)=1 \\ y-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{43}\right)=-\frac{1}{5} \\ z=\frac{1}{43} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=\frac{41}{43} \\ y=-\frac{8}{43} \\ z=\frac{1}{43} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-\left(-\frac{8}{43}\right)=\frac{41}{43} \\ y=-\frac{8}{43} \\ z=\frac{1}{43} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{33}{43} \\ y=-\frac{8}{43} \\ z=\frac{1}{43} \end{cases}$$

Notiamo che

- *operare la sostituzione* $z=\frac{1}{43}$ *nella seconda riga* $y-\frac{3}{5}z=-\frac{1}{5}$ *è equivalente a sostituire la seconda riga con la somma tra la seconda riga e la terza moltiplicata per* $\frac{3}{5}$

$$y-\frac{3}{5}z+\frac{3}{5}z=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{43}\right)$$

- *Sostituire alla seconda riga* $2x+3y+z=1$ *la differenza tra la seconda riga e la prima riga* $x-y+2z=1$ *moltiplicata per* 2*, che, come abbiamo visto, mi dà*

$$5y-3z=-1$$

equivale a operare la sostituzione $x=y-2z+1$ *nella seconda riga*

$$2(y-2z+1)+3y+z=1 \Rightarrow 5y-3z=-1$$

Indichiamo questo procedimento sistematico di soluzione come *riduzione di Gauss* di un sistema. I singoli passi di soluzione saranno detti passi di tipo Gauss.

5.3 Sistemi e matrici

Vogliamo scrivere un sistema lineare in forma più compatta evitando la menzione esplicita delle variabili

Matrici e sistemi lineari

Definizione 5.7. [CCC12] *Sia A una tabella di mn elementi di $\mathbb{K}$. Se scriviamo A come*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

diciamo che A è una matrice con m righe ed n colonne. *Gli elementi a_{ij} si dicono* entrate *della matrice. L'insieme delle matrici con m righe ed n colonne con entrate in $\mathbb{K}$ si indica come* $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Indicheremo spesso la matrice A come (a_{ij}), con $i : 1, \dots, m$, $j : 1, \dots, n$. Le limitazioni su i, j saranno spesso sottintese. Se $m = n$ la matrice si dice* quadrata.

Definizione 5.8. [CCC13] *Le righe di A si indicano come $A_1, \dots, A_m$, le colonne come $A^1, \dots, A^n$.*

Esempio 5.9. [CCC14] *Abbiamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\mathbb{Q})$$

allora

$$A_1 = (1, 2, 3, 4) \text{ e } A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Definizione 5.10. [CCC15] *Sia $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice quadrata. Allora*

1. *La diagonale di A è data dagli elementi $a_{11}, \dots, a_{nn}$.*
2. *Se tutti gli elementi di A fuori dalla diagonale sono nulli, la matrice A si dice diagonale.*
3. *Se tutti gli elementi di A sotto la diagonale sono nulli A si dice triangolare superiore.*
4. *Se tutti gli elementi di A sopra la diagonale sono nulli A si dice triangolare inferiore.*

Esempio 5.11. [CCC16] *Le matrici*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente diagonale, triangolare superiore, triangolare inferiore.

Esercizio 5.12. [CCX17] *Data l'operazione*

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) & \to & \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) \\ & ((a_{ij}), (b_{ij})) & \mapsto & (a_{ij} + b_{ij}) \end{array}$$

provare che $(\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}), +)$ è un gruppo commutativo con elemento neutro $0 = (0_{ij})$, la matrice che ha tutti gli elementi nulli.

Definizione 5.13. [CCC17] *Sia*

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

un sistema lineare con m equazioni ed n incognite. Diciamo che al sistema è associata la matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

mentre la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

è detta matrice incompleta e la colonna

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

è detta colonna dei termini noti. Il sistema S si scrive anche

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

Osservazione 5.14. [CCC19] *Ricordiamo la definizione generale di equivalenza di sistemi: sia $\mathbb{K}$ campo e $A\underline{x} = \underline{b}$, $A'\underline{x} = \underline{b}'$ due sistemi di equazioni lineari su $\mathbb{K}$ con $A, A' \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Allora i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$, $A'\underline{x} = \underline{b}'$ sono* equivalenti *se e solo se*

$$\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \mathrm{Sol}(A'\underline{x} = \underline{b}') \quad \textit{come insiemi}$$

5.4 Prodotto Scalare

Nella discussione sui sistemi lineari e matrici verrà spesso comodo introdurre il *prodotto scalare*.

Osservazione 5.15. [CCC21] *Gli elementi $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ si dicono* vettori *e spesso indicheremo il vettore $(a_1, \dots, a_n)$ come $\underline{a}$. In questo contesto gli elementi di $\mathbb{K}$ si dicono scalari.*

Definizione 5.16. [CCC22] *Sia A un anello commutativo e $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n) \in A^n$. Allora l'operazione*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A^n \times A^n & \to & A \\ & ((v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)) & \mapsto & (v_1w_1 + \cdots + v_nw_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_iw_i \end{array}$$

è detta prodotto scalare. Nella maggior parte dei casi A sarà un campo $\mathbb{K}$.

Esempio 5.17. [CCC23]

1. *Se* $\underline{v} = (1, 2, -4)$ *e* $\underline{u} = (1, 3, 2)$ *sono vettori di* $\mathbb{R}^3$,
$$\underline{v} \cdot \underline{u} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -1 \in \mathbb{R}$$
2. *Se* $\underline{v} = (1 + i, 1 - i)$ *e* $\underline{u} = (i, 1 + 2i)$ *sono vettori di* $\mathbb{C}^2$,
$$\underline{v} \cdot \underline{u} = (1 + i) \cdot i + (1 - i) \cdot (1 + 2i) = 2 + 2i \in \mathbb{C}$$

Proposizione 5.18. [CCC24] *Sia* $\mathbb{K}$ *campo,* $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{K}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Allora*

1. *Il prodotto scalare è commutativo, ovvero* $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$.
2. $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$ *il prodotto scalare si distribuisce sulla somma di vettori.*
3. $\lambda(\underline{u} \cdot \underline{v}) = (\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v}$ *il prodotto scalare è* omogeneo.

Dimostrazione.

1. Discende immediatamente dalla definizione.
2. Abbiamo che
$$\begin{aligned}(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} &= (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \cdot (w_1, \ldots, w_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) w_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (u_i w_i + v_i w_i)\end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned}\underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w} &= \left(\sum_{i=1}^{n} u_i w_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} v_i w_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (u_i w_i + v_i w_i)\end{aligned}$$
E quindi la tesi.
3. Basta fare i conti analogamente al secondo punto, raccogliendo λ.

□

Osservazione 5.19. [CCC26] *Sia* $\mathbb{K}$ *campo e* $A\underline{x} = \underline{b}$ *un sistema di equazioni lineari su* $\mathbb{K}$ *con* m *equazioni ed* n *incognite. Possiamo indicare la prima equazione del sistema,* $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ *come*
$$\begin{aligned}(a_{11}, \ldots, a_{1n}) \cdot (x_1, \ldots, x_n) &= b_1 \\ A_1 \cdot \underline{x} &= b_1\end{aligned}$$

Analogamente per le altre equazioni, per esempio per $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (x_1, \dots, x_n) &= b_i \\ A_i \cdot \underline{x} &= b_i \end{aligned}$$

Il sistema S *si può quindi scrivere come*

$$\begin{cases} A_1 \cdot \underline{x} = b_1 & \textit{prima riga} \\ A_2 \cdot \underline{x} = b_2 & \textit{seconda riga} \\ \quad \vdots & \\ A_m \cdot \underline{x} = b_m & \textit{m-esima riga} \end{cases}$$

o in breve,

$$(A_1, \dots, A_m) \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

o, dando un significato alla notazione che avevamo usato in precedenza,

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Definizione 5.20. `[CCC27]` *L'operazione*

$$\begin{array}{rccc} \cdot\colon & \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ & (\lambda, \underline{v}) & \mapsto & \lambda(v_1, \dots, v_n) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n) \end{array}$$

si dice prodotto esterno *di* $\mathbb{K}^n$*, e corrisponde geometricamente (per* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*) a moltiplicare per* $|\lambda|$ *il modulo di* $\underline{v}$*, lasciandone invariata la direzione e invertendone il verso se* $\lambda < 0$ *(ovvero a dilatare* $\underline{v}$ *di un fattore* λ*).*

Proposizione 5.21. *Se* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *e* $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{K}^n$ *si ha che*

1. $(\lambda + \mu)\underline{v} = \lambda\underline{v} + \mu\underline{v}$.
2. $\lambda(\underline{v} + \underline{w}) = \lambda\underline{v} + \lambda\underline{w}$.
3. $\lambda\mu\underline{v} = \lambda(\mu\underline{v})$.
4. $0\underline{v} = \underline{0}$, $\lambda\underline{0} = \underline{0}$, $1\underline{v} = \underline{v}$.

Dimostrazione. Immediata dalla definizione. □

5.5 Operazioni sui sistemi

Vogliamo dimostrare che le operazioni sui sistemi di cui abbiamo parlato producono sistemi equivalenti.

Proposizione 5.22 (Scambio righe)**.** `[CCC30]` *Sia* $\mathbb{K}$ *campo,* $A\underline{x} = \underline{b}$ *un sistema di equazioni lineari su* $\mathbb{K}$ *con* m *equazioni ed* n *incognite. Seguendo la notazione per le righe abbiamo che*

$$A = [A_1, \dots, \underbrace{A_i}_{i}, \dots, \underbrace{A_j}_{j}, \dots, A_m] \text{ con } i < j$$

Se

$$A' = [A_1, \dots, \underbrace{A_j}_{i}, \dots, \underbrace{A_i}_{j}, \dots, A_m]$$

$$\underline{b}' = (b_1, \ldots, \underbrace{b_j}_{i}, \ldots, \underbrace{b_i}_{j}, \ldots, b_m)$$

Allora i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ *e* $A'\underline{x} = \underline{b}'$ *sono equivalenti (hanno le stesse soluzioni).*

Dimostrazione. Ovvio, scambiare due equazioni non cambia le soluzioni del sistema. □

Definizione 5.23 (Combinazioni lineari di due oggetti)**.** `[CCC32]` *Dati due oggetti* f, g *e due elementi* α, β *di un anello* A *per cui sia definito* $\alpha f + \beta g$*, l'oggetto* $\alpha f + \beta g$ *si dice* combinazione lineare *degli oggetti* f, g *a coefficienti* α, β*.*

Osservazione 5.24. `[CCX33]` *In genere gli oggetti sono polinomi di* $\mathbb{K}[x]$*, vettori di* $\mathbb{K}^n$*, funzioni, matrici.*

Esempio 5.25. `[CCX32]`

1. $5(1,2)+3(0,1) = (5,10)+(0,3) = (5,13)$ *è la combinazione lineare dei due vettori* $(1,2), (0,1)$ *a coefficienti* $5, 3$*.*
2. $-(x^2-1)+2(x+2) = -x^2+2x+5$ *è la combinazione lineare dei due polinomi* $x^2-1, x+2$ *a coefficienti* $-1, 2$*.*

La nozione di combinazione lineare si generalizza facilmente ad un numero finito di oggetti.

Definizione 5.26 (Combinazioni lineari di più oggetti)**.** `[CCX34]` *Dati* n *oggetti* $f_1, \ldots, f_n$ *ed* n *elementi* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *di un anello* A *per cui sia definito*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot (f_1, \ldots, f_n)$$

dove $\cdot$ *è il prodotto scalare. L'oggetto* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ *si dice* combinazione lineare *degli oggetti* $f_1, \ldots, f_n$ *a coefficienti* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *in* A*.*

Proposizione 5.27 (Combinazione lineare di righe)**.** `[CCC31]` *Sia* $\mathbb{K}$ *campo,* $A\underline{x} = \underline{b}$ *un sistema di equazioni lineari su* $\mathbb{K}$ *con* m *equazioni ed* n *incognite. Sostituire l'equazione* j*-esima del sistema con la combinazione lineare di se stessa e di un'altra equazione, la* i*-esima, non cambia le soluzioni del sistema, se il coefficiente dell'equazione sostituita (la* j*-esima) nella combinazione lineare è non nullo.*

Più formalmente, seguendo la notazione per le righe, abbiamo che

$$A = [A_1, \ldots, \underbrace{A_i}_{i}, \ldots, \underbrace{A_j}_{j}, \ldots, A_m] \text{ con } i < j$$

$$\underline{b} = (b_1, \ldots, \underbrace{b_i}_{i}, \ldots, \underbrace{b_j}_{j}, \ldots, b_m)$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*, con* $\beta \neq 0$

$$A' = [A_1, \ldots, \underbrace{A_i}_{i}, \ldots, \underbrace{\alpha A_i + \beta A_j}_{j}, \ldots, A_m]$$

$$\underline{b}' = (b_1, \ldots, \underbrace{b_i}_{i}, \ldots, \underbrace{\alpha b_i + \beta b_j}_{j}, \ldots, b_m)$$

Allora i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ *e* $A'\underline{x} = \underline{b}'$ *sono equivalenti.*

Dimostrazione. Proviamo prima che ogni soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ è anche soluzione di $A'\underline{x} = \underline{b}'$, e poi il viceversa.

- Sia $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$. Allora $\forall\ i : 1 \ldots m$ abbiamo $A_i \cdot \underline{v} = b_i$; dobbiamo dimostrare che
  1. $\underline{v} \in \mathrm{Sol}(A'\underline{x} = \underline{b}')$, ovvero che $\forall\ i : 1 \ldots m, i \neq j \quad A_i \cdot \underline{v} = b_i$ che è immediato dall'ipotesi dato che si tratta di righe diverse dalla j-esima,

     e che
  2. per la riga j-esima $(\alpha A_i + \beta A_j) \cdot \underline{v} = \alpha b_i + \beta b_j$ per le proprietà del prodotto scalare.

$$(\alpha A_i + \beta A_j) \cdot \underline{v} = \alpha A_i \cdot \underline{v} + \beta A_j \cdot \underline{v} = \alpha b_i + \beta b_j$$

- Sia $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{Sol}(A'\underline{x} = \underline{b}')$. Allora

$$\forall\ i : 1 \ldots m, i \neq j \quad A_i \cdot \underline{v} = b_i \text{ e } (\alpha A_i + \beta A_j) \cdot \underline{v} = \alpha b_i + \beta b_j$$

  e vogliamo dimostrare che $\underline{v} \in \mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ ovvero che

$$\forall\ i : 1 \ldots m \text{ abbiamo } A_i \cdot \underline{v} = b_i$$

  Dato che questo è evidente per ogni $i \neq j$, perché $\underline{v}$ sia soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ rimane solo da dimostrare che

$$A_j \cdot \underline{v} = b_j$$

  Ma

$$\begin{aligned} (\alpha A_i + \beta A_j) \cdot \underline{v} &= \alpha b_i + \beta b_j \\ \alpha A_i \cdot \underline{v} + \beta A_j \cdot \underline{v} &= \alpha b_i + \beta b_j \end{aligned}$$

  Dato che $A_i \cdot \underline{v} = b_i \Rightarrow \alpha A_i \cdot \underline{v} = \alpha b_i$

$$\begin{aligned} \beta A_j \cdot \underline{v} &= \beta b_j \\ \beta(A_j \cdot \underline{v} - b_j) &= 0 \end{aligned}$$

  Dato che $\beta \neq 0$ ne consegue che $A_j \cdot \underline{v} = b_j$ e quindi abbiamo la tesi.

□

Osservazione 5.28 (Moltiplicazione di una riga per scalare)**.** `[CCW33]` *Nelle ipotesi della proposizione immediatamente precedente, sostituire l'equazione j-esima del sistema con un suo multiplo per uno scalare non nullo non cambia le soluzioni del sistema.*

Proposizione 5.29 (Scambio colonne)**.** `[CCC33]` *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{K}$. Ricordando che le colonne di A sono indicate come $A^1, \ldots, A^n$ abbiamo che*

$$A = [A^1, \ldots, \underbrace{A^i}_{i}, \ldots, \underbrace{A^j}_{j}, \ldots, A^n]$$

con $i < j$. Se

$$A' = [A^1, \ldots, \underbrace{A^j}_{i}, \ldots, \underbrace{A^i}_{j}, \ldots, A^n], \qquad \underline{x}' = (x_1, \ldots, \underbrace{x_j}_{i}, \ldots, \underbrace{x_i}_{j}, \ldots, x_n)$$

allora i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ (nelle incognite $\underline{x}$) e $A'\underline{x}' = \underline{b}$ (nelle incognite $\underline{x}'$) sono equivalenti.

N.B. In generale i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ e $A'\underline{x} = \underline{b}$ (nelle stesse incognite $\underline{x}$) NON SONO EQUIVALENTI.

Dimostrazione. Ovvio, cambiare di posto le variabili non cambia le soluzioni del sistema, ma se non mi ricordo che ho cambiato posto alle variabili (scambiato il nome) e risolvo il sistema le soluzioni cambiano. □

Definizione 5.30. [CCR31] *Una matrice A si dice* in forma a scala *se il primo elemento non nullo di ogni riga è a destra del primo elemento non nullo di tutte le righe superiori, e le eventuali righe nulle si trovano sotto tutte le righe non nulle. Questi elementi non nulli si dicono* pivot.

Esempio 5.31. [CCC96] *Data la matrice*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{14} & 11 \end{array}\right)$$

i pivot sono quelli indicati, ovvero 1 *in posizione* $1,1$*,* 5 *in posizione* $2,4$ *e* 14 *in posizione* $3,5$*. Le colonne dei pivot sono la prima, quarta e quinta.*

Tra tutte le possibili operazioni sulle righe di una matrice, alcune sono classificate come operazioni di Gauss.

Definizione 5.32. [CCY31] *Data una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, le operazioni di Gauss su A sono*

1. *lo scambio di righe $A_i \leftrightarrow A_j$.*
2. *La sostituzione di righe $A_j \to A_j - \lambda A_i$ per $i < j$ e con un opportuno λ che cancelli la prima entrata non nulla di A_j. Più precisamente, λ deve essere tale che la combinazione lineare $A_j - \lambda A_i$ abbia l'elemento sotto il pivot di A_i nullo.*
3. *La sostituzione di righe $A_j \to A_j - \lambda A_i$ per $i > j$ e con un opportuno λ tale che la combinazione lineare $A_j - \lambda A_i$ abbia l'elemento sopra il pivot di A_i nullo.*
4. *La moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo, $A_i \to \lambda A_i$ con $\lambda \neq 0$ (si veda l'Osservazione 5.28).*

Lo scambio di colonne non è considerato un'operazione di Gauss, dato che non lascia invariate le soluzioni.

Definizione 5.33. [CCD38] *Dati due sistemi lineari $A\underline{x} = \underline{b}$, $C\underline{x} = \underline{d}$ diremo che le matrici $[A|\underline{b}]$ e $[C|\underline{d}]$ sono* equivalenti *se i sistemi lineari associati sono equivalenti, ovvero se hanno le stesse soluzioni.*

Definizione 5.34. [CCD39] *Una matrice quadrata di ordine n in cui i soli elementi non nulli sono sulla diagonale (gli elementi $a_{11}, \ldots, a_{nn}$) si dice* matrice diagonale*. Se gli elementi sulla diagonale di una matrice diagonale sono tutti uguali ad 1 questa matrice si denota come* matrice identità di ordine n *o* matrice identica di ordine n *o spesso come I_n. Le matrici diagonali con tutti gli elementi diagonali non nulli (in particolare I_n) sono un particolare tipo di matrici a scala. Per esempio,*

$$I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposizione 5.35. [CCC39] *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di n equazioni lineari ad n incognite (quadrato) su $\mathbb{K}$. Il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se posso trasformare $[A|\underline{b}]$ nella matrice equivalente $[I_n|\underline{c}]$ mediante operazioni di Gauss, dove I_n è la matrice identica di ordine n.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero n di equazioni (ovvero sull'ordine n della matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$).

- Base, $n = 1$. Il sistema è
$$\{a_{11}x = b_1$$
Notiamo che
  - Se $a_{11} = 0$ e $b_1 \neq 0$ il sistema è impossibile.
  - Se $a_{11} = 0$ e $b_1 = 0$ tutte le $x \in \mathbb{K}$ sono soluzioni. Esistono quindi ∞ soluzioni.

  Il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se $a_{11} \neq 0$, ed in questo caso il sistema è equivalente al sistema
$$\{x = \frac{b_1}{a_{11}}$$
con matrice associata $[I_1|\frac{b_1}{a_{11}}]$

- Passo induttivo. Supponiamo la tesi vera per n, vediamo che è vera per $n + 1$.

  Vogliamo quindi dimostrare che:

  il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, con $A \in \mathrm{Mat}_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K})$ ammette un'unica soluzione se e solo se posso trasformare $[A|\underline{b}]$ nella matrice equivalente $[I_{n+1}|\underline{c}]$ mediante operazioni di Gauss,

  sapendo che: (Ipotesi induttiva)

  ogni sistema $A''\underline{x} = \underline{b}''$, con $A'' \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ammette un'unica soluzione se e solo se posso trasformare $[A''|\underline{b}'']$ nella matrice equivalente $[I_n|\underline{c}]$ mediante operazioni di Gauss.

  $\Leftarrow$ Se posso trasformare il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ nel sistema equivalente $I_{n+1}\underline{x} = \underline{c}$ mediante operazioni di Gauss, il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è equivalente al sistema
$$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} = c_{n+1} \end{cases}$$
  ed è immediato che ha una ed una sola soluzione, $\underline{x} = \underline{c}$. Quindi ammette un'unica soluzione. Notiamo che non è stato necessario usare l'ipotesi induttiva.

  $\Rightarrow$ Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ammette un'unica soluzione. Voglio dimostrare che posso ridurre $[A|\underline{b}]$ alla matrice equivalente $[I_{n+1}|\underline{c}]$ mediante operazioni di Gauss.

  Opero sulla matrice completa $[A|\underline{b}]$. Per la prima riga, considero il primo elemento a_{11}. Se è nullo, scambio la prima riga con una riga sotto di lei che abbia il primo elemento non nullo. Se non ne trovo nessuna, vuol dire che tutta la prima colonna è nulla, e quindi non ho condizioni su x_1: se $\underline{v}$ è una soluzione, cambiandone arbitrariamente la prima componente ottengo un'altra soluzione. La soluzione non sarebbe quindi unica, contro l'ipotesi; questo è impossibile.

  Posso quindi supporre che $a_{11} \neq 0$ e trasformare la matrice con operazioni di Gauss nella matrice
$$[A'|\underline{b}'] = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1,n+1} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2,n+1} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n+1,2} & a'_{n+1,3} & \cdots & a'_{n+1,n+1} & b'_{n+1} \end{array}\right) \quad (i\text{-esima})^a \to (i\text{-esima})^a - \tfrac{a_{i1}}{a_{11}} I^a$$

$[A'|\underline{b}']$ è equivalente a $[A|\underline{b}]$. Posso scrivere $[A'|\underline{b}']$ come

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1,n+1} & b_1 \\ 0 & \mathbf{a'_{22}} & \mathbf{a'_{23}} & \cdots & \mathbf{a'_{2,n+1}} & \mathbf{b'_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{a'_{n+1,2}} & \mathbf{a'_{n+1,3}} & \cdots & \mathbf{a'_{n+1,n+1}} & \mathbf{b'_{n+1}} \end{array}\right)$$

la sottomatrice in neretto, che possiamo indicare come $[A''|\underline{b}'']$, ha ordine n, e il sistema associato ha un'unica soluzione: infatti, dato che $a_{11} \neq 0$, ogni soluzione $(v_2, \ldots, v_{n+1})$ di $A''\underline{x} = \underline{b}''$ si estende in modo unico, ricavando x_1 dalla prima equazione, ad una soluzione di $[A'|\underline{b}']$, e viceversa. Quindi per l'ipotesi induttiva posso ridurla con Gauss alla matrice equivalente $[I_n|\underline{c}'']$ (le operazioni di Gauss sulle righe dalla seconda alla $(n+1)$-esima non modificano la prima riga né gli zeri della prima colonna). Indichiamo gli elementi di $[I_n|\underline{c}'']$ partendo per le righe dall'indice 2 per comodità.

Quindi $[A|\underline{b}]$ è equivalente alla matrice

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n+1} & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & c_{n+1} \end{array}\right)$$

Dividiamo la prima riga per a_{11}

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & a_{12}/a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n+1}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & c_{n+1} \end{array}\right)$$

Adesso, posso ridurre la matrice incompleta a diagonale sostituendo n volte la prima riga con la differenza tra la prima riga e la riga i-esima moltiplicata per a_{1i}/a_{11}

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{n+1} \end{array}\right) \quad I^a \to I^a - \tfrac{a_{1i}}{a_{11}}(i\text{-esima riga})$$

con $i : 2 \ldots n+1$. Sto operando una sostituzione all'indietro. O, se si preferisce dirlo in altro modo, sto mettendo la matrice in forma normale. Indichiamo la forma finale del termine noto della prima riga (cambia ad ogni operazione) con c_1.

□

Corollario 5.36. `[CCC35]` *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema di equazioni lineari su $\mathbb{K}$ con tante incognite quante equazioni (la matrice incompleta è quadrata). Se il sistema ammette un'unica soluzione, possiamo sempre trovare un sistema equivalente $A'\underline{x} = \underline{b}'$ con A' matrice triangolare superiore con elementi sulla diagonale non nulli.*

Osservazione-Definizione 5.37. [CCQ35] *Consideriamo il sistema $[D|\underline{b}]$, con $D = (d_{ij})$ diagonale.*

- *Se uno dei coefficienti d_{ii} è nullo, ed il corrispondente b_i non lo è, il sistema è impossibile.*
- *Se per ogni coefficiente d_{ii} nullo il corrispondente b_i è nullo, il sistema è risolubile: ogni variabile x_i con $d_{ii} = 0$ può variare liberamente su $\mathbb{K}$, mentre le altre sono determinate da $x_i = b_i/d_{ii}$. Se $k \geq 1$ è il numero dei coefficienti d_{ii} nulli, il sistema ha ∞ soluzioni e si dice che* il sistema ha ∞^k soluzioni*; se $k = 0$ la soluzione è unica.*

Non sempre i gradini della scala hanno la stessa lunghezza.

Esempio 5.38. [CCC93] *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x+y+z+3t+s &= 0 \\ x+y+z-2t-s &= 2 \\ x+y+z+t &+3s = 3 \end{cases}$$

La matrice associata completa è

$$[A|\underline{b}] = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Operiamo una riduzione di Gauss

```
M:=Mat([[1,1,1, 3, 1,0],
        [1,1,1,-2,-1,2],
        [1,1,1, 1, 3,3]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);L;
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1,  3,  1, 0]
     2^a-1*1^a [0, 0, 0, -5, -2, 2]
     3^a-1*1^a [0, 0, 0, -2,  2, 3]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 4]=-5
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1,  3,    1,    0]
-------------- [0, 0, 0, -5,   -2,    2]
   3^a-2/5*2^a [0, 0, 0,  0, 14/5, 11/5]

-------------- [1, 1, 1,  3,  1, 0]
       -1*2^a  [0, 0, 0,  5,  2, -2]
         5*3^a [0, 0, 0,  0, 14, 11]
```

Il sistema associato è

$$\begin{cases} x+y+z+3t+s &= 0 \\ 5t+2s &= -2 \\ 14s &= 11 \end{cases}$$

Sostituiamo $s = \frac{11}{14}$ e poi $t = -\frac{5}{7}$ nelle righe precedenti

$$\begin{cases} x+y+z+3t & +\frac{11}{14} = 0 \\ 5t & +2\cdot\frac{11}{14} = -2 \\ s & = \frac{11}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z+3t & = -\frac{11}{14} \\ t & = -\frac{5}{7} \\ s & = \frac{11}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z & -3\cdot\frac{5}{7} = -\frac{11}{14} \\ t & = -\frac{5}{7} \\ s & = \frac{11}{14} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z & = \frac{19}{14} \\ t & = -\frac{5}{7} \\ s & = \frac{11}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = -y-z+\frac{19}{14} \\ t & = -\frac{5}{7} \\ s & = \frac{11}{14} \end{cases}$$

se scegliamo di esplicitare la x. Le soluzioni del sistema sono quindi

$$\left\{ \left(-y-z+\frac{19}{14}, y, z, -\frac{5}{7}, \frac{11}{14} \right) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^5$$

Notiamo che nella forma finale del sistema la matrice associata è

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{14} \end{array} \right)$$

Notiamo che invece di operare le sostituzioni, avremmo potuto, come al solito, fare delle opportune operazioni di Gauss sulla matrice.

```
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, 1, 3, 1, 0]
     2^a*-1/5  [0, 0, 0, 1, 2/5, -2/5]
    3^a*+5/14  [0, 0, 0, 0, 1, 11/14]

Cancello la colonna sopra il 5  pivot

     1^a-1*3^a [1, 1, 1, 3, 0, -11/14]
   2^a-2/5*3^a [0, 0, 0, 1, 0, -5/7]
-------------- [0, 0, 0, 0, 1, 11/14]

Cancello la colonna sopra il 4  pivot

     1^a-3*2^a [1, 1, 1, 0, 0, 19/14]
-------------- [0, 0, 0, 1, 0, -5/7]
-------------- [0, 0, 0, 0, 1, 11/14]
```

5.6 Forma standard e normale

Osservazione 5.39. [CCC97] *Risulta evidente che in una matrice a scala è possibile cancellare tutti gli elementi sopra il pivot di una colonna di pivot con operazioni di Gauss* lasciando immutati gli elementi a sinistra della colonna.

Esempio 5.40. [CCC99] *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x+2y+3z+t-w=2 \\ z-t+w=1 \\ t+w=0 \end{cases}$$

La matrice associata completa è

$$[A|\underline{b}] = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array} \right)$$

La matrice è già in forma a scala. Per risolvere il sistema associato, mettiamola in forma standard con operazioni di Gauss. Iniziamo usando il pivot della terza riga per cancellare gli elementi sopra di lui nella seconda e prima riga.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I^a \to I^a - III^a \\ II^a \to II^a + III^a \end{array}$$

Usiamo il pivot della seconda riga per cancellare l'elemento sopra di lui nella prima riga

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right) \quad I^a \to I^a - 3 * II^a$$

Il sistema associato alla matrice è

$$\begin{array}{rrrrl} x & +2y & & -8w & = -1 \\ & & z & +2w & = 1 \\ & & t & +w & = 0 \end{array}$$

Da cui abbiamo, esplicitando le variabili legate ai pivot e portando a destra le variabili non legate ai pivot,

$$\begin{cases} x = -1 - 2y + 8w \\ z = 1 - 2w \\ t = -w \end{cases}$$

Esempio 5.41. [CCC98] *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} x + y + z + t + w = 1 \\ 2y - 3z + 5t - w = 2 \\ z - t + w = 0 \end{cases}$$

La matrice associata completa è

$$[A|\underline{b}] = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice è già in forma a scala. Per risolvere il sistema associato, mettiamola in forma standard con operazioni di Gauss. Iniziamo usando il pivot della terza riga per cancellare gli elementi sopra di lui nella seconda e prima riga.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I^a \to I^a - III^a \\ II^a \to II^a + 3 * III^a \end{array}$$

Per comodità dividiamo poi la seconda riga per 2

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad II^a \to 1/2 * II^a$$

Usiamo il pivot della seconda riga per cancellare l'elemento sopra di lui nella prima riga.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad I^a \to I^a - II^a$$

Il sistema associato è

$$\begin{cases} x \qquad\quad + t - w = 0 \\ \quad y \quad + t + w = 1 \\ \qquad z - t + w = 0 \end{cases}$$

da cui abbiamo, esplicitando le variabili legate ai pivot e portando a destra le variabili non legate ai pivot,

$$\begin{cases} x = -t + w \\ y = 1 - t - w \\ z = t - w \end{cases}$$

Definizione 5.42. [CCA69] *Una matrice a scala con tutti gli elementi sopra i pivot nulli è detta in* forma standard. *La matrice finale dell'esempio 5.40 precedente è in forma standard.*

Esempio 5.43. [CCC95] *Data la matrice*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{11}{14} \end{array}\right)$$

i pivot sono quelli indicati, ovvero 1 *in posizione* $(1,1)$, 1 *in posizione* $(2,4)$ *e* 1 *in posizione* $(3,5)$. *Le colonne dei pivot sono la prima, quarta e quinta.*

Definizione 5.44. [CCC65] *Una matrice in forma standard in cui tutti i pivot sono uguali ad* 1 *e le colonne dei pivot sono le prime, così da formare a sinistra una matrice identità (sotto la quale possono esserci solo righe nulle), si dice in* forma normale.

La matrice finale dell'esempio 5.41 precedente è in forma normale.

Esempio 5.45. [CCE95] *La matrice*

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{14} \end{array}\right)$$

è in forma normale. Possiamo anche scriverla come

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{11}{14} \end{pmatrix} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{11}{14} \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

Corollario 5.46. [CCC36] *Sia* $\mathbb{K}$ *campo,* $A\underline{x} = \underline{b}$ *un sistema lineare con* m *equazioni ed* n *incognite su* $\mathbb{K}$. *Posso sempre ridurre la matrice* $[A|\underline{b}]$ *a* $[S|\underline{b}']$ *(*S *è a scala) con operazioni di Gauss dei primi due tipi (scambi di righe e sostituzioni con* $i < j$*). Ho che*

$$\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \mathrm{Sol}(S\underline{x} = \underline{b}')$$

Corollario 5.47. [CCC37] *Sia* $\mathbb{K}$ *campo,* $A\underline{x} = \underline{b}$ *un sistema lineare con* m *equazioni ed* n *incognite su* $\mathbb{K}$. *Posso sempre ridurre la matrice* $[A|\underline{b}]$ *ad una matrice equivalente* $[S|\underline{b}']$ *(*S *è una matrice in forma standard) con operazioni di Gauss. Ho che*

$$\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b}) = \mathrm{Sol}(S\underline{x} = \underline{b}')$$

Corollario 5.48. [CCC66] *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare con m equazioni ed n incognite su $\mathbb{K}$. Posso sempre, usando operazioni di Gauss ed opportuni scambi di colonne, ridurre la matrice $[A|\underline{b}]$ a $[N|\underline{b}']$ (N è in forma normale). Le soluzioni $\mathrm{Sol}(A\underline{x} = \underline{b})$ si ottengono dalle soluzioni $\mathrm{Sol}(N\underline{x} = \underline{b}')$ riportando al contrario gli scambi di colonne sulle entrate del vettore generico delle soluzioni.*

Ricapitolando,

Osservazione 5.49. [CCW66] *Ricordiamo che le operazioni di Gauss su una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ sono:*

1. *lo scambio di righe $A_i \leftrightarrow A_j$.*
2. *la sostituzione di righe $A_j \to A_j - \lambda A_i$ per $i < j$ e con un opportuno λ che cancelli la prima entrata non nulla di A_j (più precisamente, λ deve essere tale che la combinazione lineare $A_j - \lambda A_i$ abbia l'elemento sotto il pivot di A_i nullo).*
3. *la sostituzione di righe $A_j \to A_j - \lambda A_i$ per $i > j$ e con un opportuno λ tale che la combinazione lineare $A_j - \lambda A_i$ abbia l'elemento sopra il pivot di A_i nullo.*
4. *la moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo, $A_i \to \lambda A_i$ con $\lambda \neq 0$.*

Osservazione 5.50. [CCZ31] *Quindi,*

- *Con le prime due operazioni di Gauss posso portare qualunque matrice in forma a scala.*
- *Se uso anche la terza posso portare qualunque matrice in forma standard.*
- *Se uso anche la quarta ed ammettiamo anche scambi di colonna (non sono operazioni di Gauss), posso portare qualunque matrice in forma normale. Ricordiamo che se la matrice rappresenta un sistema e se vogliamo le soluzioni del sistema originario, dobbiamo scambiare tra loro le posizioni del vettore delle soluzioni coerentemente con gli scambi di colonne. Dato che sto sostanzialmente cambiando il nome delle variabili, la struttura delle soluzioni ($\nexists$, $\exists!$, $\exists\infty^k$) rimane la stessa.*

Osservazione 5.51. [CCC79] *Il metodo usuale è di esplicitare le variabili associate ai pivot, e portare le variabili non associate ai pivot a destra dell'uguaglianza.*