

Capitolo 4

Quarta Lezione - Esercizi

4.1 Esercizi svolti

Ricordiamo la definizione di ordine totale per un anello.

Definizione 4.1. [BBP55] *Su un anello commutativo A un ordinamento totale compatibile con le operazioni è una relazione $>$ tale che*

1. $\forall a, b \in A$ vale una e una sola delle relazioni $a > b$, $b > a$, $a = b$. [Totalità]
2. $\forall a, b \in A$, $a > b \Rightarrow$ non vale $b > a$. [Proprietà asimmetrica]
3. $\forall a, b, c \in A$, $a > b$ e $b > c \Rightarrow a > c$. [Proprietà transitiva]
4. $\forall a, b, c \in A$ abbiamo $a > b \Rightarrow a + c > b + c$. [Compatibilità con la somma]
5. $\forall a, b, c \in A$ con $c > 0$ abbiamo $a > b \Rightarrow ac > bc$. [Compatibilità col prodotto]
6. Conseguenze: $\forall a, b, c \in A$ con $c < 0$ abbiamo $a > b \Rightarrow bc > ac$.
7. $1 > 0$ e $-1 < 0$.

Notazione 4.2. [BBP42]

- Definiamo “maggiore o uguale”

$$a \geq b \Leftrightarrow a > b \text{ o } a = b$$

- se $a > b$ diciamo anche che $b < a$. Analogamente se $a \geq b$ diciamo anche che $b \leq a$.

Vediamo che su $\mathbb{C}$ non è possibile porre alcun ordinamento totale compatibile con le operazioni (e quindi, in particolare, nessuno che estenda l'ordinamento usuale di $\mathbb{R}$).

Esercizio 4.3. [BBP98] *Non esiste su $\mathbb{C}$ un ordinamento totale $>$ compatibile con le operazioni.*

Soluzione. Dato che $i \neq 0$, dobbiamo avere $i > 0$ o $i < 0$

- Se $i > 0$, allora $i \cdot i > i \cdot 0 \Leftrightarrow -1 > 0$ assurdo.
- Se $i < 0$, allora $-i > 0$, ma allora $(-i) \cdot (-i) > 0 \Leftrightarrow i^2 > 0 \Leftrightarrow -1 > 0$ assurdo.

□

Esercizio 4.4. [BBQ98] Portare il complesso $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ in forma cartesiana. Il modulo di z è 2 ed il suo argomento $\frac{\pi}{4}$. Svolgiamo semplicemente i conti.

Dato che $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, abbiamo $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Esercizio 4.5. [BBB13] Portiamo $2 - 3i \in \mathbb{C}$ in forma trigonometrica. Abbiamo $\rho = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ ed abbiamo

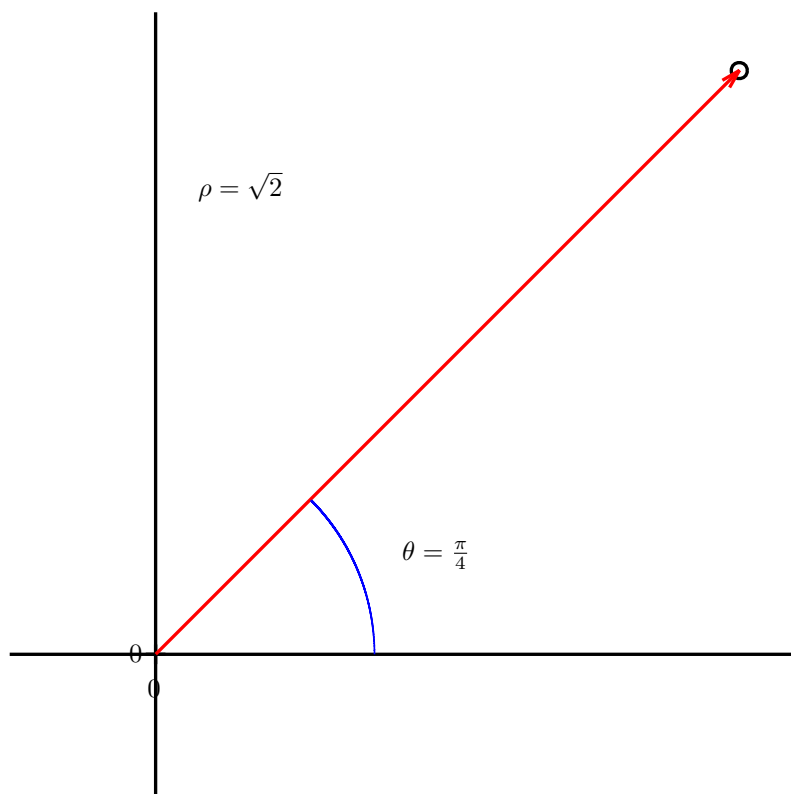
$$\begin{cases} a = \sqrt{13} \cos \theta \\ b = \sqrt{13} \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{3}{2} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \operatorname{atan} \left(-\frac{3}{2} \right)$$

Ricordando che l'arcotangente è una funzione dispari, positiva sui positivi e negativa sui negativi, a valori in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, abbiamo $\operatorname{atan}(-\frac{3}{2}) = -\operatorname{atan}(\frac{3}{2}) \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Questo è coerente con il fatto che $2 - 3i$ ha parte reale positiva e parte immaginaria negativa, e quindi appartiene al quarto quadrante del piano di Argand-Gauss (altrimenti avremmo dovuto aggiungere π). La forma trigonometrica di $2 - 3i$ è quindi

$$\begin{aligned} 2 - 3i &= \sqrt{13} \left(\cos \operatorname{atan} \left(-\frac{3}{2} \right) + i \sin \operatorname{atan} \left(-\frac{3}{2} \right) \right) \\ &= \sqrt{13} \left(\cos \operatorname{atan} \left(\frac{3}{2} \right) - i \sin \operatorname{atan} \left(\frac{3}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Esercizio 4.6. [BBB47] Calcolare le radici seste di $i + 1$. Mettiamo $1 + i$ in forma esponenziale e usiamo la formula. Usiamo il piano di Argand-Gauss.

GNU9: **Rappresentazione trigonometrica di $1 + i$**



$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$$\sqrt[6]{1+i\mathbb{C}} = \sqrt[6]{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}_{\mathbb{C}} = \left\{ w_k = \sqrt[12]{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}} \mid k = 0, \dots, 5 \right\}$$

e quindi

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{24}} & k &= 0 \\ w_1 &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\pi+2\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{9\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{9\pi}{24}} & k &= 1 \\ w_2 &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\pi+4\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{17\pi}{24}} & k &= 2 \\ w_3 &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\pi+6\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{25\pi}{24}} & k &= 3 \\ w_4 &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\pi+8\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{33\pi}{24}} & k &= 4 \\ w_5 &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\pi+10\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{41\pi}{24}} & k &= 5 \end{aligned}$$

Notiamo che per $k = 6$ avremmo $\frac{49\pi}{24} = \frac{\pi}{24} + 2\pi$ e quindi per $k > 5$ ritroviamo le radici che avevamo già:

$$\sqrt[12]{2}e^{i\frac{49\pi}{24}} = \sqrt[12]{2}e^{i\frac{\pi}{24}}$$

Esercizio 4.7. [EE01] Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 + 1 = 0$.

Soluzione.

$$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1$$

quindi cerchiamo le radici quarte di $-1 = 1e^{i\pi}$. Le radici si calcolano con la formula applicata come segue

$$z_k = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

con $k = 0, 1, 2, 3$ e otteniamo le quattro radici complesse:

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & k &= 0 \\ z_1 &= e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & k &= 1 \\ z_2 &= e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & k &= 2 \\ z_3 &= e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & k &= 3 \end{aligned}$$

Una fattorizzazione di $z^4 + 1$ su $\mathbb{C}[z]$ è quindi, per il teorema di Ruffini (che vale su qualunque $\mathbb{K}[x]$),

$$(z - e^{i\frac{\pi}{4}})(z - e^{i\frac{3\pi}{4}})(z - e^{i\frac{5\pi}{4}})(z - e^{i\frac{7\pi}{4}})$$

Notiamo che le quattro radici complesse sono a due a due coniugate (prima e quarta, seconda e terza) e che

$$(z - e^{i\frac{\pi}{4}})(z - e^{i\frac{7\pi}{4}}) = z^2 - 2\operatorname{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}})z + |e^{i\frac{\pi}{4}}|^2 = z^2 - \sqrt{2}z + 1$$

Infatti il coniugato di $\rho e^{i\theta}$ è $\rho e^{-i\theta}$, per cui $e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \overline{e^{i\frac{\pi}{4}}}$, e per ogni $w \in \mathbb{C}$ abbiamo $(z-w)(z-\bar{w}) = z^2 - (w+\bar{w})z + w\bar{w}$ dato che

$$a + ib + \overline{a + ib} = a + ib + (a - ib) = 2a.$$

□

Trovare per esercizio una fattorizzazione completa di $z^4 + 1$ su $\mathbb{R}[z]$. Suggestimenti:

- Si può ricorrere alla divisione di polinomi (funziona su qualunque $\mathbb{K}[x]$), dividendo $z^4 + 1$ per $z^2 - \sqrt{2}z + 1$.
- Si può procedere come sopra con i fattori lineari $z - e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z - e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Esercizio 4.8. [BBB56] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $4|z|^3 = z^5$

Soluzione. Mettiamo z in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$; l'equazione diviene

$$\begin{aligned} 4|\rho e^{i\theta}|^3 &= (\rho e^{i\theta})^5 \\ 4\rho^3 &= 4\rho^3 e^{i0} = \rho^5 e^{i5\theta} \end{aligned}$$

Notiamo che $z = 0$ ($\rho = 0$) è una soluzione. Se $z \neq 0$, cioè $\rho > 0$, per il principio di identità dei complessi in forma esponenziale abbiamo che:

$$\begin{cases} 4\rho^3 = \rho^5 \text{ con } \rho > 0 \\ 0 = 5\theta + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^5 - 4\rho^3 = \rho^3(\rho^2 - 4) = 0 \text{ con } \rho > 0 \\ \theta = -\frac{2}{5}k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = -\frac{2}{5}k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dato che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ ho una soluzione, ho infinite soluzioni,

$\vdots$	$\vdots$
$k = -2$	$\theta = \frac{4}{5}\pi$
$k = -1$	$\theta = \frac{2}{5}\pi$
$k = 0$	$\theta = 0$
$k = 1$	$\theta = -\frac{2}{5}\pi$
$k = 2$	$\theta = -\frac{4}{5}\pi$
$k = 3$	$\theta = -\frac{6}{5}\pi$
$k = 4$	$\theta = -\frac{8}{5}\pi$
$k = 5$	$\theta = -\frac{10}{5}\pi$
$k = 6$	$\theta = -\frac{12}{5}\pi$
$\vdots$	$\vdots$

Ma queste soluzioni non sono tutte distinte, infatti notiamo che

- per $k = 5$, $\theta = -\frac{10}{5}\pi = -2\pi$, che ci dà gli stessi seno e coseno di $k = 0$, $\theta = 0$, e quindi lo stesso complesso.
- Analogamente, $k = 1$ e $k = 6$ ci danno lo stesso complesso.
- Analogamente, $k = -1$, $\theta = \frac{2}{5}\pi$ ci dà lo stesso complesso di $k = 4$, $\theta = -\frac{8}{5}\pi = \frac{2}{5}\pi - 2\pi$.
- Eccetera...

Se ci limitiamo ai valori di k per cui $-\frac{2}{5}k\pi \in (-2\pi, 0]$, dato che poi i complessi si ripetono abbiamo che i θ delle soluzioni sono

$k = 0$	$\theta = 0$
$k = 1$	$\theta = -\frac{2}{5}\pi$
$k = 2$	$\theta = -\frac{4}{5}\pi$
$k = 3$	$\theta = -\frac{6}{5}\pi$
$k = 4$	$\theta = -\frac{8}{5}\pi$

Se preferiamo i nostri angoli in $[0, 2\pi)$, possiamo prendere altri valori di k oppure, più semplicemente, aggiungere 2π ai θ negativi, trovando

$$\theta = 0 \quad \theta = \frac{2}{5}\pi \quad \theta = \frac{4}{5}\pi \quad \theta = \frac{6}{5}\pi \quad \theta = \frac{8}{5}\pi$$

Le soluzioni dell'equazione $4|z|^3 = z^5$ sono quindi

$$z_0 = 2 \cdot e^{i0} = 2, \quad z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{2}{5}\pi}, \quad z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{4}{5}\pi}, \quad z_3 = 2 \cdot e^{i\frac{6}{5}\pi}, \quad z_4 = 2 \cdot e^{i\frac{8}{5}\pi}, \quad z_5 = 0$$

□

Esempio 4.9. [BBB45] *Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione*

$$z^7 + 2iz^6 + iz^5 + 2z^2 + 4iz + 2i = 0$$

Soluzione. Per il Teorema fondamentale dell'algebra abbiamo 7 soluzioni in $\mathbb{C}$, contate con la loro molteplicità, dato che abbiamo un'equazione polinomiale di grado 7. Troviamo le soluzioni. Raccogliamo a fattor comune come segue:

$$\begin{aligned} z^7 + 2iz^6 + iz^5 + 2z^2 + 4iz + 2i &= 0 \\ z^5(z^2 + 2iz + i) + 2(z^2 + 2iz + i) &= 0 \\ (z^5 + 2)(z^2 + 2iz + i) &= 0 \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono date dall'unione delle soluzioni delle due equazioni

$$z^5 + 2 = 0 \quad \text{e} \quad z^2 + 2iz + i = 0.$$

Risolviamo separatamente le due equazioni.

Risolviamo prima l'equazione $z^5 + 2 = 0$ che equivale a calcolare le radici quinte complesse di -2 . Innanzitutto scriviamo $-2 = 2 \cdot e^{i\pi}$ e applichiamo la formula delle radici

$$\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}} \text{ con } k = 0, \dots, n-1$$

Pertanto visto che $\rho = 2, \theta = \pi$ e $n = 5$ abbiamo che le radici quinte di -2 sono:

$$\sqrt[5]{2} e^{i \frac{\pi + 2k\pi}{5}} \text{ con } k = 0, \dots, 4$$

Da questa formula otteniamo le cinque radici complesse:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i \frac{\pi}{5}} & k &= 0 \\ z_1 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i \frac{3}{5}\pi} & k &= 1 \\ z_2 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i \frac{5}{5}\pi} = \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\pi} = -\sqrt[5]{2} & k &= 2 \\ z_3 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i \frac{7}{5}\pi} & k &= 3 \\ z_4 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i \frac{9}{5}\pi} & k &= 4 \end{aligned}$$

Adesso risolviamo la seconda equazione, $z^2 + 2iz + i = 0$, che è un'equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$. Pertanto usiamo la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado ed otteniamo

$$\begin{aligned} z_{5,6} &= \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4i}}{2} \\ &= \frac{-2i \pm \sqrt{-4 - 4i}}{2} \\ &= \frac{-2i \pm 2\sqrt{-1 - i}}{2} \\ &= -i \pm \sqrt{-1 - i} \end{aligned}$$

Adesso dobbiamo trovare le radici quadrate di $-1 - i$. Innanzitutto calcoliamone il modulo e l'argomento. Poiché $a = -1$ e $b = -1$ si ha che $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{5}{4}\pi$ e quindi

$$-1 - i = \sqrt{2} e^{i \frac{5}{4}\pi}$$

Per cui le radici quadrate di $-1 - i$ si calcolano con la formula applicata come segue

$$w_k = \sqrt{\sqrt{2}} \cdot e^{i \frac{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi}{2}} \text{ con } k = 0, 1$$

ed otteniamo le sue due radici complesse:

$$w_0 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i \frac{5\pi}{8}} \quad w_1 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i \frac{13\pi}{8}}$$

da cui si ottengono le soluzioni:

$$z_5 = -i + w_0 = -i + \sqrt[4]{2} e^{i \frac{5\pi}{8}} \quad z_6 = -i + w_1 = -i + \sqrt[4]{2} e^{i \frac{13\pi}{8}}$$

Abbiamo così trovato le sette radici complesse cercate

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[5]{2} e^{i\frac{\pi}{5}} \\ z_1 &= \sqrt[5]{2} e^{i\frac{3}{5}\pi} \\ z_2 &= -\sqrt[5]{2} \\ z_3 &= \sqrt[5]{2} e^{i\frac{7}{5}\pi} \\ z_4 &= \sqrt[5]{2} e^{i\frac{9}{5}\pi} \\ z_5 &= -i + \sqrt[4]{2} e^{i\frac{5}{8}\pi} \\ z_6 &= -i + \sqrt[4]{2} e^{i\frac{13}{8}\pi} \end{aligned}$$

□

Esempio 4.10. [BBB93] *Trovare le soluzioni dell'equazione*

$$z\bar{z}^2 = z^3$$

e disegnarle sul piano di Argand-Gauss.

Soluzione. Abbiamo

$$z(\bar{z}^2 - z^2) = 0 \implies z = 0 \text{ oppure } \bar{z}^2 - z^2 = 0$$

Quindi abbiamo la soluzione banale $z = 0$ ovvero $\rho = 0$.

Adesso possiamo supporre $z \neq 0$ e dividere ambedue i membri dell'equazione per z , ottenendo $\bar{z}^2 = z^2$.

Mettiamo il complesso in forma esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$, e dato che $z \neq 0$ possiamo supporre $\rho > 0$. L'equazione diviene:

$$\begin{aligned} \bar{z}^2 &= z^2 \\ (\rho e^{-i\theta})^2 &= (\rho e^{i\theta})^2 \\ \rho^2 e^{-2i\theta} &= \rho^2 e^{2i\theta} \end{aligned}$$

Da cui, per il principio di identità dei complessi in forma esponenziale

$$\begin{cases} \rho^2 = \rho^2 & \text{vera } \forall \rho > 0 \\ -2\theta = 2\theta + 2k\pi & \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo che

$$\theta = -\frac{k}{2}\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Da cui si deducono gli angoli

$$\theta_0 = 0 \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = -\pi \quad \theta_3 = -\frac{3}{2}\pi$$

o volendo gli angoli in $[0, 2\pi)$ (mantenendo gli stessi seni e coseni)

$$\theta_0 = 0 \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = \pi \quad \theta_3 = \frac{3\pi}{2}$$

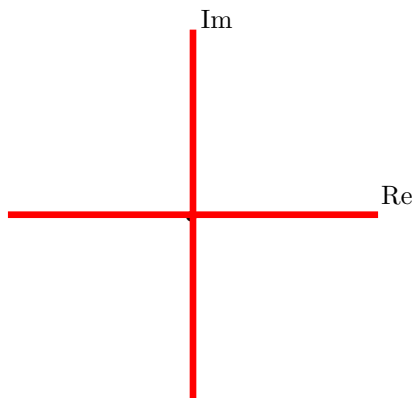
Quindi le soluzioni sono

$$z_0 = \rho e^{i0} \quad z_1 = \rho e^{i\frac{\pi}{2}} \quad z_2 = \rho e^{i\pi} \quad z_3 = \rho e^{i\frac{3\pi}{2}} \quad z_4 = 0 \text{ che avevamo trovato all'inizio}$$

con $\rho > 0$ qualunque, visto che non abbiamo altre condizioni su ρ .

Nel piano di Argand-Gauss le soluzioni di questa equazione sono le quattro semirette uscenti dall'origine con angoli rispettivamente $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$, origine compresa, cioè i due assi coordinati.

GNU16: Soluzioni di $\bar{z}^2 = z^2$



□

Esempio 4.11. [BBW11] *Determinare le soluzioni complesse dell'equazione $\frac{z^8+1}{z^4+i} = 0$.*

Soluzione. Ricordiamo che $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$, come si può facilmente verificare svolgendo i conti. Ponendo $a = z^4$ e $b = 1$ vediamo che

$$\frac{z^8 + 1}{z^4 + i} = \frac{(z^4 + i)(z^4 - i)}{z^4 + i} = z^4 - i \quad \text{per } z^4 + i \neq 0$$

Le radici di $z^8 + 1$ sono otto (le otto radici complesse di -1); per quanto detto prima quattro sono radici di $z^4 + i$ e quattro di $z^4 - i$. Abbiamo

$$\frac{z^8 + 1}{z^4 + i} = 0 \Leftrightarrow z^4 - i = 0$$

Le soluzioni sono quindi le radici quarte complesse di i , che troviamo con la formula

$$\sqrt[4]{i}_{\mathbb{C}} = \sqrt[4]{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{i\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}} \mid k = 0, \dots, 3 \right\} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{8}}, e^{i\frac{5\pi}{8}}, e^{i\frac{9\pi}{8}}, e^{i\frac{13\pi}{8}} \right\}$$

□

Esempio 4.12. [BBB51] *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$(\bar{z} - 1)^3 = 2z - 2$$

Soluzione. Sostituiamo $\omega = \bar{z} - 1$ da cui si ricava che

$$\bar{z} = \omega + 1 \Rightarrow z = \bar{\omega} + 1$$

L'equazione diventa quindi

$$\omega^3 = 2(\bar{\omega} + 1) - 2 = 2\bar{\omega}.$$

Adesso scriviamo ω in forma esponenziale $\omega = \rho e^{i\theta}$ ed otteniamo

$$\rho^3 e^{i3\theta} = 2\rho e^{-i\theta}$$

Il caso $\rho = 0$, cioè $\omega = 0$, dà una soluzione; per $\rho > 0$, per il principio di identità dei complessi in forma esponenziale (che vale per complessi non nulli), l'equazione diviene

$$\begin{cases} \rho^3 = 2\rho \\ 3\theta = -\theta + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho(\rho^2 - 2) = 0 \\ 4\theta = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0, \sqrt{2} \\ \theta = \frac{k}{2}\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le soluzioni distinte dell'equazione in ω sono:

$$\begin{array}{ll} \omega_0 = \sqrt{2}e^{i0} = \sqrt{2} & \text{da } \rho = \sqrt{2}, k = 0 \\ \omega_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}i & \text{da } \rho = \sqrt{2}, k = 1 \\ \omega_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{2}} = -\sqrt{2} & \text{da } \rho = \sqrt{2}, k = 2 \\ \omega_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\sqrt{2}i & \text{da } \rho = \sqrt{2}, k = 3 \\ \omega_4 = 0 & \text{da } \rho = 0 \end{array}$$

Ricordando che $z = \bar{\omega} + 1$ ricaviamo le soluzioni dell'equazione originaria $(\bar{z} - 1)^3 = 2z - 2$

$$\begin{aligned} z_0 &= \overline{\sqrt{2}} + 1 = 1 + \sqrt{2} \\ z_1 &= \overline{\sqrt{2}i} + 1 = 1 - \sqrt{2}i \\ z_2 &= \overline{-\sqrt{2}} + 1 = 1 - \sqrt{2} \\ z_3 &= \overline{-\sqrt{2}i} + 1 = 1 + \sqrt{2}i \\ z_4 &= \bar{0} + 1 = 1 \end{aligned}$$

□

Esercizio 4.13. [BBB57] Trovare il numero di soluzioni in $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ del sistema

$$\begin{cases} z^{100} - 1 = 0 \\ \text{Im}(z) > 0 \end{cases}$$

L'equazione ci dice che le soluzioni devono essere le radici centesime di 1. Ce ne sono due reali, con parte immaginaria nulla, ± 1 . Le altre corrispondono a 98 punti simmetricamente disposti sulla circonferenza unitaria. La disuguaglianza ci dice che le soluzioni devono avere parte immaginaria positiva, ovvero giacere nel primo o nel secondo quadrante. Per simmetria, a parte le due soluzioni con parte immaginaria nulla ($z = \pm 1$), metà delle 98 soluzioni non reali rimaste avrà parte immaginaria positiva e metà parte immaginaria negativa. Quindi il sistema ha 49 soluzioni.

Esercizio 4.14. [M106] Risolvere per $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} e^z = e \\ |z| < 10 \end{cases}$$

Risolviamo prima l'equazione, usando la forma cartesiana $z = x + iy$.

N.B. Qui $z \in \mathbb{C}$ non è necessariamente reale, ed e^z è l'esponenziale di esponente z , non un complesso in forma esponenziale. Quindi la parte immaginaria y di z può essere un qualunque numero reale, NON solo un numero in $[0, 2\pi)$.

$$e^z = e \Leftrightarrow e^{x+iy} = e \Leftrightarrow e^x e^{iy} = e \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = e \\ y = 0 + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi gli infiniti complessi $z = 1 + 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$, ed in particolare

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ k = -2 & 1 - i4\pi & \sqrt{1 + 16\pi^2} \\ k = -1 & 1 - i2\pi & \sqrt{1 + 4\pi^2} \\ k = 0 & 1 & \text{di modulo } 1 \\ k = 1 & 1 + i2\pi & \sqrt{1 + 4\pi^2} \\ k = 2 & 1 + i4\pi & \sqrt{1 + 16\pi^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

e dato che dobbiamo avere $|z| < 10$

$$\begin{array}{ll} \sqrt{1 + 4\pi^2} < 1 + \sqrt{4\pi^2} = 1 + 2\pi \simeq 7.28 & \textbf{Soluzione} \\ \sqrt{1 + 16\pi^2} > \sqrt{16\pi^2} = 4\pi \simeq 12.57 > 10 & \textbf{Non soluzione} \end{array}$$

Inoltre per $|k| > 2$ il modulo è ancora maggiore, e la situazione per $k < 0$ è speculare a quella per $k > 0$. Le soluzioni sono quindi solo tre, per $k = 0, \pm 1$, rispettivamente $z = 1, 1 \pm 2\pi i$.