

Capitolo 3

Terza Lezione - Numeri complessi

3.1 Il campo dei complessi

Osservazione 3.1. [BBB00] *L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni sui reali. Introduciamo l'oggetto $i \notin \mathbb{R}$ con la proprietà $i^2 = -1$ (si scrive talvolta, impropriamente, $i = \sqrt{-1}$). Abbiamo già visto che se aggiungo i ad $\mathbb{R}$, ottengo il campo $\mathbb{R}[i]$, che indicheremo d'ora in poi come $\mathbb{C}$, il campo dei complessi. Chiaramente $\mathbb{C} \supsetneq \mathbb{R}$, dato che ogni numero reale è anche un complesso, e che $i \notin \mathbb{R}$, dato che nei reali i quadrati sono tutti positivi o nulli.*

Introduciamo alcune notazioni su $\mathbb{C}$.

Definizione 3.2. [BBB50]

1. Un numero complesso scritto come $a + ib$ si dice in forma cartesiana.

Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$:

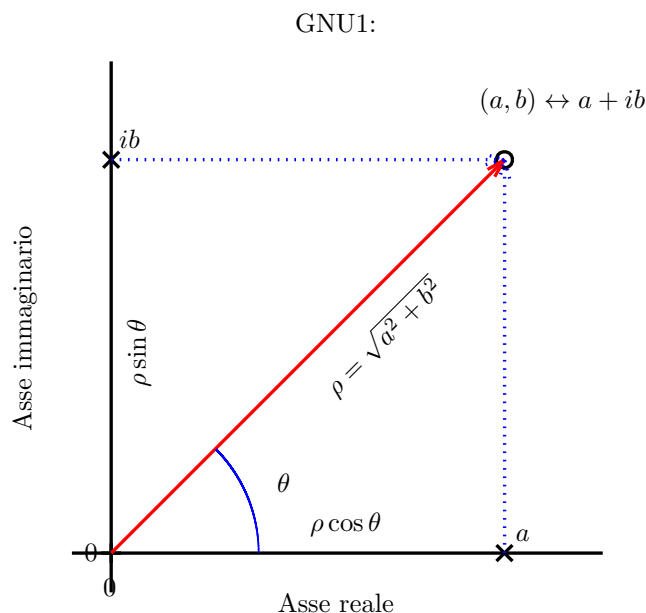
2. la parte reale di z è a e si indica $\operatorname{Re}(z)$.
3. La parte immaginaria di z è b e si indica $\operatorname{Im}(z)$.
4. Se $\operatorname{Re}(z) = a = 0$ allora z è detto immaginario puro.
5. Se $\operatorname{Im}(z) = b = 0$ allora $z \in \mathbb{R}$.
6. Il modulo di z è $\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e si indica $|z|$.

Osservazione 3.3. [BBX50] *C'è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$*

$$\begin{array}{rcl} T: & \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & a + ib & \mapsto (a, b) \end{array}$$

Possiamo quindi identificare, dal punto di vista insiemistico, i complessi col piano reale. Ogni punto del piano si può identificare con una coppia ordinata di numeri reali (a, b) .

Osservazione 3.4. [BBG50] Possiamo disegnare un numero complesso $a + ib$ sul piano reale (detto in questo contesto il piano di Argand-Gauss) mediante la sua identificazione con la coppia reale (a, b) .



Per il teorema di Pitagora abbiamo che la distanza di (a, b) dall'origine è $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, il modulo del complesso $a + ib$. Diciamo che θ , l'angolo formato con il semiasse reale positivo, è l'argomento di $a + ib$ e notiamo che l'argomento dello zero non è definito.

Definizione 3.5 (Forma vettoriale o trigonometrica). [BBB99] Un numero complesso $z = a + ib \in \mathbb{C}$ può essere identificato con l'elemento (a, b) del piano reale $\mathbb{R}^2$, con sulle ascisse la parte reale e sulle ordinate la parte immaginaria, che in questo caso si indica come il piano di Argand-Gauss. In questo caso il modulo $|z|$ (spesso indicato con ρ) è la lunghezza del vettore applicato nell'origine con estremo (a, b) e, se $z \neq 0$, possiamo definire l'argomento $\arg(z) = \theta$ come l'angolo che tale vettore forma con il semiasse reale positivo. L'argomento è definito a meno di multipli interi di 2π , dato che dalla trigonometria elementare abbiamo che

$$a = \operatorname{Re}(z) = \rho \cos \theta \text{ e } b = \operatorname{Im}(z) = \rho \sin \theta$$

e le funzioni $\sin$, $\cos$ sono periodiche di periodo 2π . Possiamo scrivere ogni complesso in forma trigonometrica:

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Ricordiamo che l'argomento di 0 non è definito.

Esempio 3.6. [BBB88] Portiamo $1 + i \in \mathbb{C}$ in forma trigonometrica. Ricordiamo che

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \rho \cos \theta = a, \quad \rho \sin \theta = b$$

Quindi $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ed abbiamo per $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \cos \theta \\ b = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$$

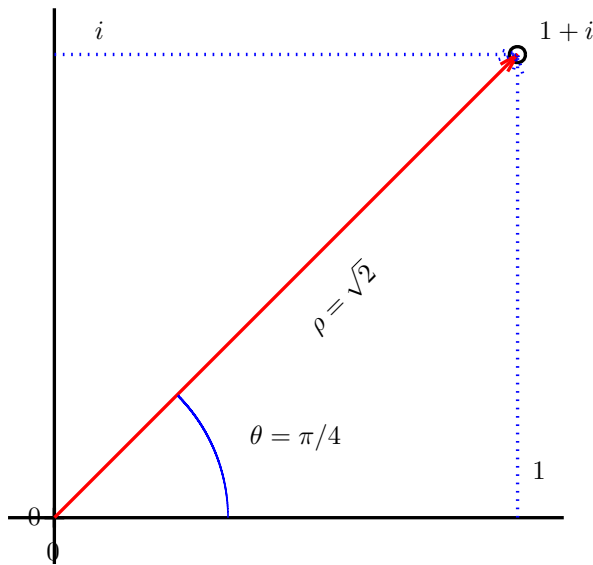
dato che sia a che b sono positivi, z appartiene al primo quadrante del piano di Argand-Gauss, e quindi delle due possibili soluzioni $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$, scegliamo $\frac{\pi}{4}$. La forma trigonometrica di $1 + i$ è quindi

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Osservazione 3.7. [BBB82] Semplicemente disegnando il complesso sul piano di Argand-Gauss spesso possiamo determinare immediatamente la sua forma trigonometrica.

Esempio 3.8. [BBX82] Determiniamo modulo ed argomento del complesso $1 + i$

GNU2: Rappresentazione trigonometrica di $1+i$



Quindi $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

Esempio 3.9. [BBB98] Portare il complesso z di modulo 3 ed argomento $\frac{\pi}{2}$ in forma cartesiana. Svolgiamo semplicemente i conti. Dato che $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, abbiamo $z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 3i$.

Osservazione 3.10. [BBZ15] Consideriamo un numero complesso in forma trigonometrica $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. Possiamo sempre portarlo in forma ridotta, ovvero trovare un unico $\theta' \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta' < 2\pi$ tale che

$$\rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

Per determinare θ' basta sommare a θ un opportuno multiplo intero di 2π , anche negativo se del caso.

Esempio 3.11. [BBZ16] Il numero complesso $4(\cos 11\pi + i \sin 11\pi)$ ha diverse forme trigonometriche, per esempio

$$4(\cos 9\pi + i \sin 9\pi), \quad 4(\cos 3\pi + i \sin 3\pi), \quad 4(\cos \pi + i \sin \pi), \quad 4(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi))$$

Tra queste rappresentazioni la forma ridotta è $4(\cos \pi + i \sin \pi)$, dato che l'argomento appartiene all'intervallo $[0, 2\pi)$.

È immediato dalla definizione di forma trigonometrica e dal principio di identità dei complessi in forma cartesiana che due numeri complessi in forma trigonometrica sono uguali se e solo se sono ambedue nulli oppure hanno uguale modulo e i loro argomenti differiscono per un multiplo intero di 2π .

Dalla definizione di forma trigonometrica e dalle proprietà elementari discende il

Osservazione 3.12 (Principio di identità dei complessi in forma trigonometrica). [BBB15] Per $\rho_1, \rho_2 > 0$

$$\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \text{ per un qualche } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Detto in un altro modo

$$\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

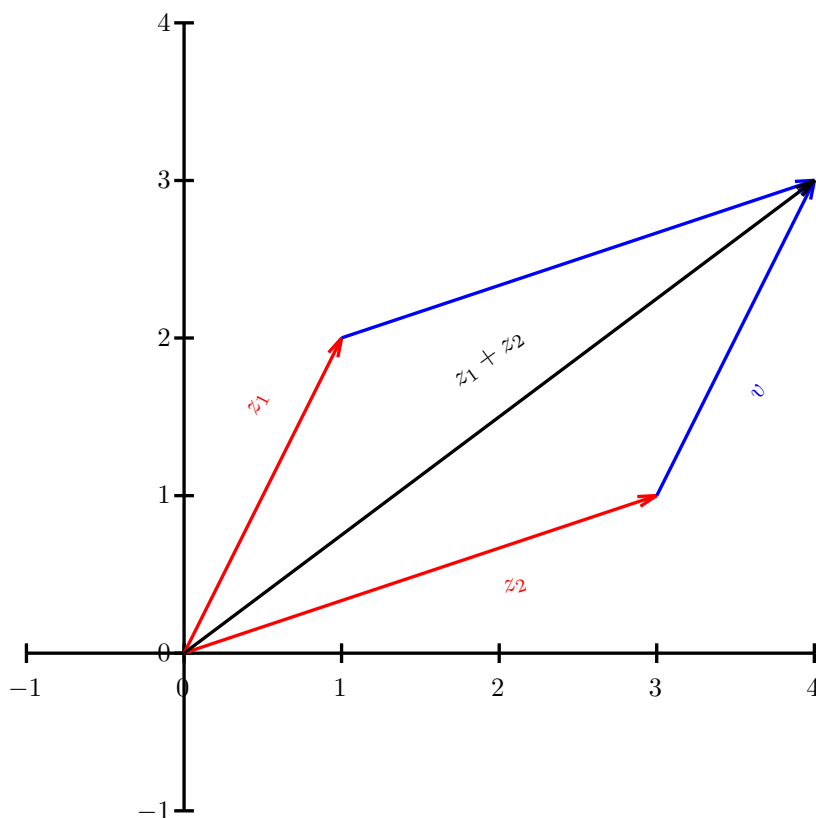
Valgono le seguenti proprietà del modulo

Proposizione 3.13. [BBB12] Siano $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Allora

1. $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$.
3. $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ per $z \neq 0$.
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ [Disuguaglianza triangolare]
5. $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Dimostrazione. Facili verifiche per le proprietà 1-3. Per le proprietà 4-5, cfr. [Abate], 11.3, oppure ci possiamo rifare alla geometria euclidea:

GNU3: Disuguaglianza triangolare e regola del parallelogramma



Il lato v ha la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso di z_1 e per il triangolo di lati $z_1 + z_2$, z_2 , v è già noto che:

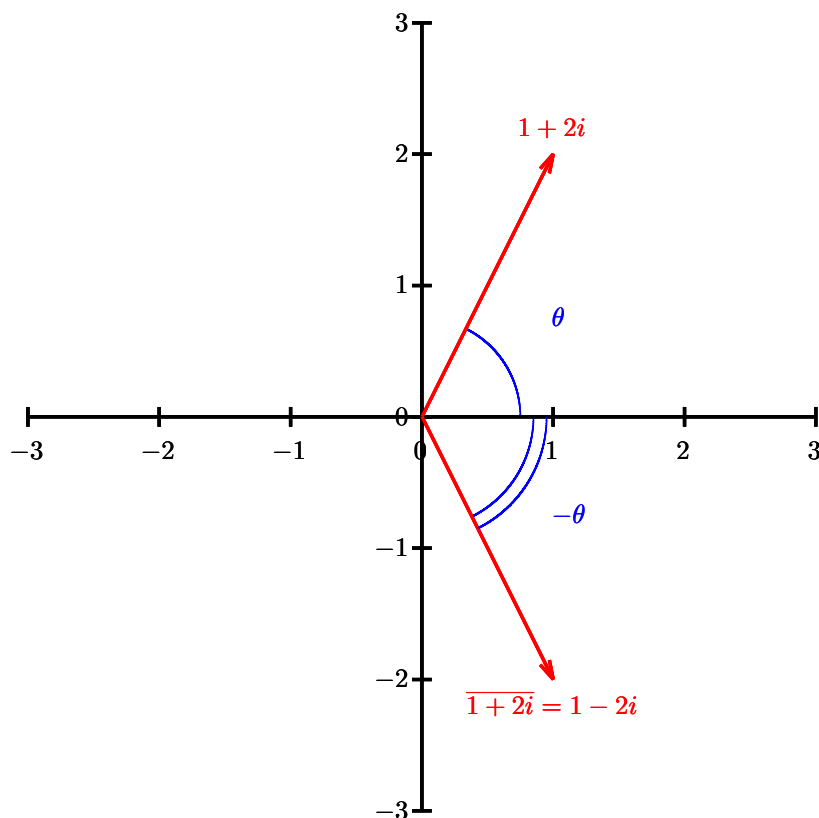
- La lunghezza del lato $z_1 + z_2$ è minore o uguale alla somma delle lunghezze degli altri due, z_2 , v .
- La lunghezza del lato $z_1 + z_2$ è maggiore o uguale al valore assoluto della differenza delle lunghezze degli altri due, z_2 , v .

Considerando che $|z_1|$, la lunghezza di z_1 , è uguale a $|v|$, la lunghezza di v , ne seguono le proprietà 4,5. □

Definizione 3.14. [BBV11] Dato $a + ib \in \mathbb{C}$, il complesso $\overline{a + ib} = a - ib$ è detto il coniugato di $a + ib$.

Sul piano di Argand-Gauss, il coniugato di un complesso z è il suo simmetrico rispetto all'asse reale.

GNU4: Il coniugato di $1 + 2i$ è $1 - 2i$



Valgono le seguenti proprietà del coniugio

Proposizione 3.15. [BBB11] Dati $z, z_1 \in \mathbb{C}$,

1. $|\bar{z}| = |z|$.
2. Se $z \neq 0$ e $\arg(z) = \theta$, allora $\arg(\bar{z}) = -\theta$ (a meno di multipli interi di 2π).
3. $\bar{\bar{z}} = z$.
4. $\overline{z + z_1} = \bar{z} + \bar{z}_1$.
5. $\overline{z \cdot z_1} = \bar{z} \cdot \bar{z}_1$.
6. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ se $z \neq 0$.
7. $\bar{z} = z$ se e solo se $z \in \mathbb{R}$.
8. $\bar{z} = -z$ se e solo se z è immaginario puro.
9. $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$ e $z\bar{z} = 0$ se e solo se $z = 0$.
10. Possiamo indicare l'inverso moltiplicativo usando coniugio e modulo. Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

$$(a + ib)^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Dimostrazione. Facili verifiche

□

Esempio 3.16. [BBB40] *Alcuni esempi di equazioni risolvibili in $\mathbb{C}$.*

- $z^2 + 1 = 0$, soluzioni $z = \pm i$.
- $x^2 + 2 = 0$, soluzioni $x = \pm i\sqrt{2}$.
- $x^2 + x + 1 = 0$, soluzioni $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
- È facile vedere che tutte le equazioni di secondo grado hanno soluzioni in $\mathbb{C}$, basta usare la formula. In particolare, basta dare un'occhiata alla formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

per vedere che tutti i polinomi di secondo grado a coefficienti reali con discriminante negativo hanno due radici complesse non reali distinte, una coniugata dell'altra, come nei tre casi precedenti.

Osservazione 3.17. [BBB41] $\forall a, b \in \mathbb{C}, \quad a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

3.2 Potenze e radici di un complesso

La somma e la differenza di complessi in forma cartesiana sono facili da calcolare. Appena più complicati il prodotto e l'inverso. La potenza può presentare dei problemi.

Esempio 3.18. [BBB20] *Calcolare $i^3, i^7, i^{12}, i^{323}$. Dato che $i^2 = -1$ abbiamo che*

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i i^2 = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

Notiamo che le potenze di i sono cicliche di ordine 4, e $i^n = i^r$ dove r è il resto della divisione di n per 4. Quindi

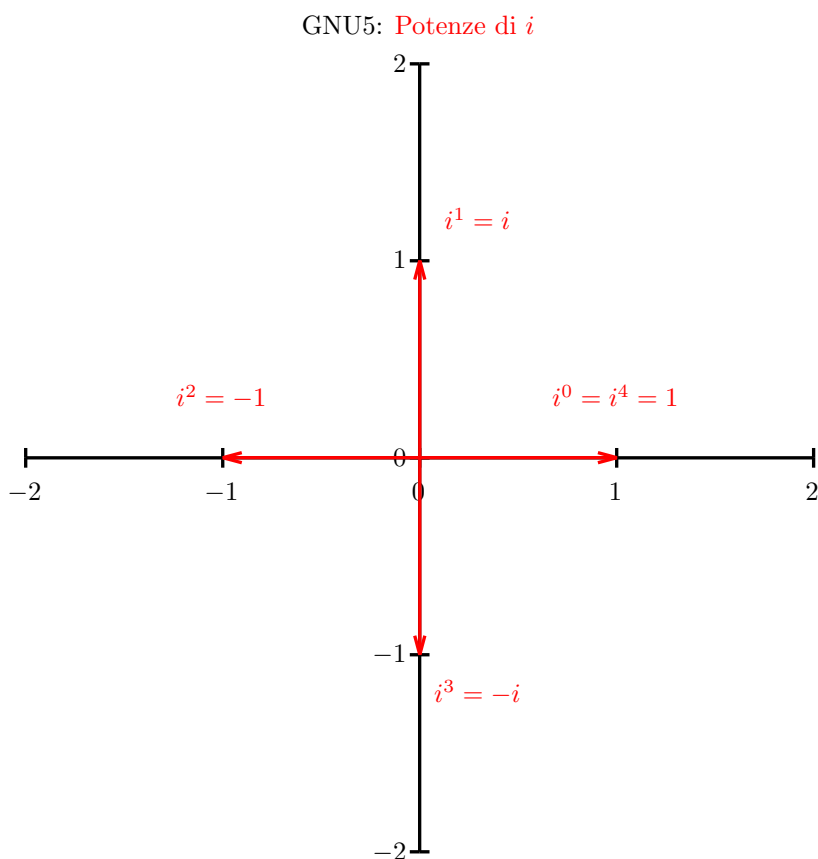
$$i^3 = -i, \quad i^7 = i^3 = -i, \quad i^{12} = i^0 = 1$$

e, dato che $323 = 4 \cdot 80 + 3$ (vediamo in dettaglio, ma potremmo saltare direttamente al risultato),

$$i^{323} = i^{80 \cdot 4 + 3} = i^{4 \cdot 80} \cdot i^3 = (i^4)^{80} \cdot (-i) = 1^{80} \cdot (-i) = -i$$

Notiamo altresì che dall'identità $i^4 = i^3 \cdot i = 1$ discende immediatamente che

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = i^3 = -i$$



Il Teorema del binomio verrà affrontato nel corso di Analisi I. Qui diamo solo l'enunciato ed alcuni metodi di calcolo.

Esempio 3.19. [BBB21] Usando il teorema del binomio

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad a, b \in \mathbb{K}$$

La seconda uguaglianza discende dalle seguenti proprietà:

- $\forall n \in \mathbb{N}, n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ e $0! = 1$
- $\forall n, k \in \mathbb{N}, \text{ con } n \geq k, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\forall n, k \in \mathbb{N}, \text{ con } n \geq k, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\begin{aligned} (2 + i)^5 &= 2^5 + 5 \cdot 2^4 i + 10 \cdot 2^3 i^2 + 10 \cdot 2^2 i^3 + 5 \cdot 2 i^4 + i^5 \\ &= 32 + 80i - 80 - 40i + 10 + i \\ &= -38 + 41i \end{aligned}$$

Osservazione 3.20. [BBK30] Quindi, calcolare le potenze di un complesso in forma cartesiana può essere lungo e noioso. E come calcolare, invece, le radici di un complesso?

Richiamo 3.21. [BBB30] Ricordiamo dalla trigonometria elementare le formule di addizione per il seno e il coseno

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{e} \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

e che

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos \alpha \\ \sin \theta = \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \theta = \alpha + 2k\pi$$

Il prodotto e la divisione di complessi in forma trigonometrica, come pure le loro potenze, sono relativamente semplici da calcolare.

Proposizione 3.22. [BBB22] Dati due complessi non nulli in forma trigonometrica

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

Abbiamo che

1. $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$
2. $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1} (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)) = \frac{1}{\rho_1} (\cos(\theta_1) - i \sin(\theta_1))$
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$
4. $z_1^n = (\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1))^n = \rho_1^n (\cos(n\theta_1) + i \sin(n\theta_1))$ [Formula di De Moivre]

Dimostrazione.

1. Il prodotto $\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ mi dà

$$\begin{aligned} & \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) = \\ & = \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) \\ & = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

per la regola sul seno e coseno dell'angolo somma.

2. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)} &= \frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1} \cdot \frac{\cos \theta_1 - i \sin \theta_1}{\cos \theta_1 - i \sin \theta_1} \\ &= \frac{1}{\rho_1} \frac{\cos \theta_1 - i \sin \theta_1}{(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)} \\ &= \frac{1}{\rho_1} \frac{\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)}{\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1} \\ &= \frac{1}{\rho_1} \frac{\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)}{1} \\ &= \frac{1}{\rho_1} (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)) \\ &= \frac{1}{\rho_1} (\cos(\theta_1) - i \sin(\theta_1)) \end{aligned}$$

usando la formula $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$ e le proprietà di seno e coseno.

3. Discende immediatamente dal punto precedente.
4. Lasciato per esercizio. Discende immediatamente dal primo punto, con una facile dimostrazione per induzione. Per l'induzione, facciamo riferimento al corso di Analisi.

□

Un'immediata conseguenza è la formula per l'estrazione delle n radici n -esime di un complesso in forma trigonometrica.

Definizione 3.23. [BBB23] Siano $w \in \mathbb{C}$ e $n \geq 1$ un intero. Una radice n -esima di w è un complesso z tale che $z^n = w$. L'insieme delle radici n -esime di w si indica come $\sqrt[n]{w}_{\mathbb{C}}$.

Proposizione 3.24. [BBB24] Siano w un complesso non nullo e $n \geq 1$ un intero. Allora esistono esattamente n radici n -esime distinte di w . Più precisamente, se $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ e

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \quad \text{con } k = 0, \dots, n-1 \quad (3.1)$$

allora $\sqrt[n]{w}_{\mathbb{C}} = \{z_0, \dots, z_{n-1}\}$ e gli z_k sono tutti distinti.

Dimostrazione. Innanzitutto, grazie alla formula di De Moivre, abbiamo che

$$z_k^n = \rho [\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)] = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = w$$

e quindi gli z_k sono radici di w (cfr. definizione di radice). Rimane da vedere che siano le uniche e che siano tutte distinte.

Per l'unicità: se $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ è una radice n -esima di w , dato che

$$z^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = w$$

dobbiamo avere, per il principio di identità dei complessi in forma trigonometrica

$$r = \sqrt[n]{\rho} \text{ e } n\alpha = \theta + 2k\pi \text{ per un qualche } k \in \mathbb{Z}$$

per cui $\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$. Sostituendo k con il suo resto nella divisione per n l'angolo α cambia di un multiplo intero di 2π , e quindi z non cambia: possiamo supporre $0 \leq k \leq n-1$, e z è della forma (3.1).

Dimostriamo ora che gli z_k , con $k = 0, \dots, n-1$, sono tutti distinti. Per costruzione, i loro argomenti $\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ sono distinti e appartengono all'intervallo $[\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + 2\pi)$, di ampiezza 2π , quindi due di essi non possono differire per un multiplo intero non nullo di 2π . Quindi per il principio di identità dei complessi in forma trigonometrica gli z_k sono tutti distinti. □

Esempio 3.25. [BBB44] Risolvere $z^3 - 1 = 0$.

Basta estrarre le tre radici terze dell'unità: $z = \sqrt[3]{1}_{\mathbb{C}}$. Mettiamo 1 in forma trigonometrica

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

Dalla formula

$$z_k = \sqrt[3]{1} \left(\cos \left(\frac{0 + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2k\pi}{3} \right) \right) \quad \text{con } k = 0, 1, 2$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 z_0 &= 1 \left(\cos \left(\frac{0}{3} \right) + i \sin \left(\frac{0}{3} \right) \right) &= 1 & k=0 \\
 z_1 &= 1 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) &= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} & k=1 \\
 z_2 &= 1 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right) &= -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} & k=2
 \end{aligned}$$

Definizione 3.26. [BBB25] Si usa scrivere il complesso $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ come $\rho e^{i\theta}$. Questa è la forma esponenziale del complesso. Al nostro livello, questa è **semplicemente una notazione**.

L'utilità della notazione è immediata, dato che sono rispettate tutte le usuali regole delle potenze, anche se non lo dimostreremo:

Osservazione 3.27 (Proprietà della forma esponenziale). [BBB26] Dati $\rho, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$, con $\rho, \rho_1, \rho_2 > 0$, e $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

1. Principio di identità dei complessi in forma esponenziale

$$\rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

2. $\rho_1 e^{i\theta_1} \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$

3. $(\rho e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}}.$

4. $\frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$

5. $|\rho e^{i\theta}| = \rho.$

6. $|e^{i\theta}| = 1.$

7. $\arg(\rho e^{i\theta}) = \theta$ (a meno di multipli interi di 2π).

8. $\overline{(\rho e^{i\theta})} = \rho e^{-i\theta}.$

9. $e^{i\pi} = -1.$

10. Se $a, b \in \mathbb{R}$ allora $e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$

Osservazione 3.28 (Formula delle radici in forma esponenziale). [BBB46] Se $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, con $\rho > 0$, e $n \geq 1$

$$\sqrt[n]{z}_{\mathbb{C}} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}_{\mathbb{C}} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i \frac{\theta + k 2\pi}{n}} \mid k : 0 \dots n-1 \right\} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i \left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right)} \mid k : 0 \dots n-1 \right\}$$

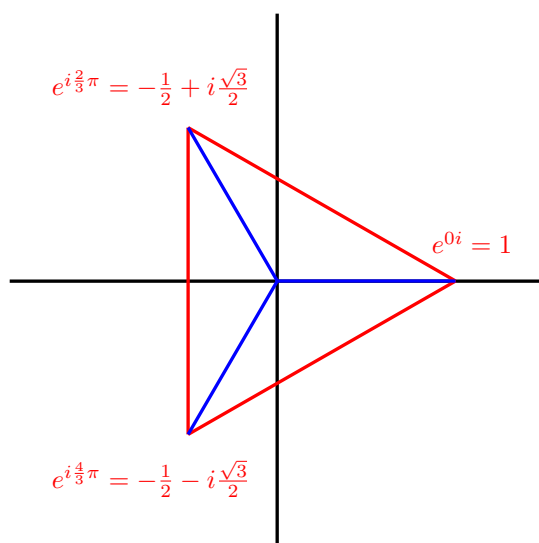
o anche, scritto in altro modo, sempre con $k : 0 \dots n-1$

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}_{\mathbb{C}} = \left\{ \underbrace{\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i \frac{\theta}{n}}}_{k=0}, \underbrace{\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \right)}}_{k=1}, \underbrace{\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i \left(\frac{\theta}{n} + 2 \frac{2\pi}{n} \right)}}_{k=2}, \dots, \underbrace{\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i \left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right)}}_{k=k}, \dots, \underbrace{\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i \left(\frac{\theta}{n} + (n-1) \frac{2\pi}{n} \right)}}_{k=n-1} \right\}$$

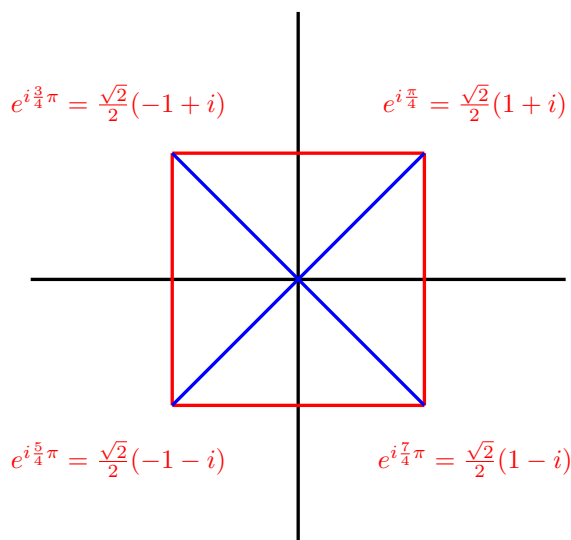
Discende immediatamente dall'osservazione precedente che

Corollario 3.29. [BBB60] *Per $n \geq 3$, le n radici n -esime di un complesso non nullo z sono i vertici di un poligono regolare con n lati nel piano di Argand-Gauss, dato che hanno tutte lo stesso modulo e gli argomenti (angoli associati) di due radici “successive” $j, j+1$ differiscono sempre per lo stesso angolo $\frac{2\pi}{n}$.*

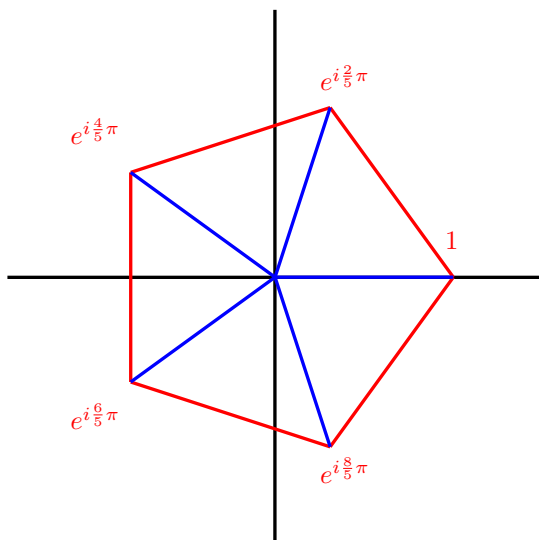
GNU6: Le radici terze di 1 formano i vertici di un triangolo equilatero



GNU7: Le radici quarte di -1 formano i vertici di un quadrato



GNU8: Le radici quinte di 1 formano i vertici di un pentagono regolare



Osservazione 3.30. [BBB95] Dato $z = e^{i\pi/4} \in \mathbb{C}$

1. $2 \cdot e^{i\pi/4} = 2e^{i\pi/4}$ il modulo di z viene moltiplicato per 2. [Allunga]
2. $e^{i\pi/3} \cdot e^{i\pi/4} = e^{i7\pi/12}$ sommo $\pi/3$ all'argomento di z . [Ruota]
3. $2e^{i\pi/3} \cdot e^{i\pi/4} = 2e^{i7\pi/12}$ moltiplico il modulo di z per 2 e sommo $\pi/3$ al suo argomento. [Ruota e allunga]

Per chi fosse interessato ad approfondire la formula di Eulero $e^{i\pi} + 1 = 0$ che noi abbiamo enunciato senza fornire dettagli, consigliamo il link

<https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/eulero/la-matematica-e-piena-di-eulero-la-piu-bella-formula-della-matematica/>