

12.6 Esercizi proposti

Dimostrare la seguente proposizione

Proposizione 12.29 (Riga/colonna somma di altre). [EEE76] Se $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{K}^n$,

$$\det((A_1, \dots, \underbrace{\underline{v} + \underline{w}}_i, \dots, A_n)) = \det((A_1, \dots, \underbrace{\underline{v}}_i, \dots, A_n)) + \det((A_1, \dots, \underbrace{\underline{w}}_i, \dots, A_n))$$

Esercizio 12.30. [GG25] Al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & b & 1 & 9 \\ a & b & b & 2 & -1 \\ a & b & b & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Il rango della matrice è 2 se $a = b = 0$, altrimenti 3. □

Esercizio 12.31. [GG06] Dato il sistema di equazioni lineari

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ 6x + 3y + 9z + 4t - 2 = 0 \\ x + y + z + t - 1 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t - 1 = 0 \\ 3x + y + 5z + 7t + 1 = 0 \end{cases}$$

Discutere le soluzioni del sistema.

Soluzione. Esistono ∞^1 soluzioni. □

Esercizio 12.32. [GG07] Dato il sistema di equazioni lineari

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2x + 3z + 4t + v - 4 = 0 \\ 2x + y + 3z + u + v - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 9z + 4t + u - 1 = 0 \\ 8x + 4y + 12z + 12t + u = 0 \end{cases}$$

Discutere le soluzioni del sistema e determinarne le soluzioni.

Soluzione. Esistono ∞^2 soluzioni. □

Esercizio 12.33. [GG80] Dati $a, b \in \mathbb{R}$ ed il sistema

$$\mathcal{F} : \begin{cases} -x + 2z + a + b = 0 \\ x - y - z - a + 2 = 0 \\ x + y + z + a - 1 = 0 \end{cases}$$

Discutere le soluzioni al variare di a, b .

Soluzione. Esiste un'unica soluzione per ogni a, b . □

Esercizio 12.34. [GG81] Dato $k \in \mathbb{R}$ ed il sistema di equazioni lineari

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2xk + 2yk + 2y + 2zk + 4z + 2k + 4 = 0 \\ xk + yk + y + zk + 2z + k + 2 = 0 \\ xk - zk + 1 = 0 \end{cases}$$

Discutere il sistema al variare di k .

Soluzione. Se $k = 0$ il sistema è impossibile; Se $k = -1$ ci sono ∞^2 soluzioni; se $k \neq 0, -1$, ∞^1 soluzioni. $\square$

Esercizio 12.35. [GGW81] Al variare di $a, b, k \in \mathbb{R}$ determinare il rango delle matrici

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & 12 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. 4 $\square$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2a-1 & -a+1 & -a+7 & 12 & -2a+12 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. 4 $\square$

3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. 4 $\square$

Esercizio 12.36. [GGW82] Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ determinare quattro colonne linearmente indipendenti nella matrice

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & 12 & 10 \\ a^2 & 0 & 2 & b & 3a-2b \end{pmatrix}$$

Soluzione. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ la prima, seconda, terza e quinta colonna sono linearmente indipendenti (il minore delle righe 2, 3, 4, 5 vale $-12(a^2 + 1) \neq 0$). $\square$

Esercizio 12.37. [GGT83] *Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ determinare due righe linearmente indipendenti nella matrice*

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b & (a+b)^2 & 3 \\ a-b & b & a^2 & 0 & 2 \\ 2 & a & 1 & a^2+1 & b \\ -3 & \pi & 6 & 12 & \sqrt{5} \\ a^2 & 0 & a+b & b & 5 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ la quarta e la quinta riga sono linearmente indipendenti. $\square$

Esercizio 12.38. [GGW84] *È possibile trovare una matrice $A \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$ le cui entrate dipendono da un parametro $a \in \mathbb{K}$ che sia sempre non singolare se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ma possa essere singolare se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?*

Soluzione. Sì, per esempio $A = \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, singolare in $\mathbb{C}$ per $a = \pm i$. $\square$

Esercizio 12.39. [GGW85] *È possibile trovare una matrice $A \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$ le cui entrate dipendono da un parametro $a \in \mathbb{K}$ che sia sempre singolare se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ma possa essere non singolare se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?*

Soluzione. No (per entrate polinomiali in a): un polinomio $\det A$ nullo per ogni $a \in \mathbb{R}$ è il polinomio nullo, quindi è nullo anche su $\mathbb{C}$. $\square$

Esercizio 12.40. [GGW86] *È possibile trovare un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$ che abbia soluzione unica se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ma non se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?*

Soluzione. No: il rango di una matrice reale non cambia vedendola in $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{C})$, e la soluzione è unica se e solo se $\text{rk } A = \text{rk}(A|\mathbf{b}) = n$. $\square$

Esercizio 12.41. [GG82] *Dato $k \in \mathbb{R}$ ed il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} 2xk - 2x + yk - y + zk - 3z + 6 = 0 \\ 2xk - 2x + 3yk + 2y + 4zk + 11 = 0 \\ xk - x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Discutere il sistema al variare di k .

Soluzione. Se $k = 0, \pm 1$ il sistema è impossibile, se $k \neq 0, \pm 1$, il sistema ha un'unica soluzione. $\square$

Esercizio 12.42. [GG77] *Dato $k \in \mathbb{R}$ ed il sistema di equazioni lineari*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} xk + y + 2z + 3 = 0 \\ xk + y + 2 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Discutere il sistema al variare di k .

Soluzione. Se $k = 0$ il sistema è impossibile; se $k \neq 0$ il sistema ha un'unica soluzione. $\square$

Esercizio 12.43 (Proposto). [FFA00] *Introduciamo l'operazione sostituzione di colonna con combinazione lineare di colonne: $A^j \rightarrow \alpha A^j + \beta A^i$, con $\alpha \neq 0$. Per cosa posso usare questa nuova operazione e con che cautele?*

Soluzione. Per calcolare il rango con la riduzione per colonne (è composizione di $A^j \rightarrow \alpha A^j$ e $A^j \rightarrow A^j + \frac{\beta}{\alpha} A^i$).
Cautele: $i \neq j$; il determinante viene moltiplicato per α ; nei sistemi lineari corrisponde a un cambio di incognite, e non si può usare con la colonna dei termini noti. $\square$