

Capitolo 10

Decima lezione - Esercizi

10.1 Esercizi svolti

Esercizio 10.1. [EEZ32] Effettuiamo l'operazione $A_3 \rightarrow 2A_3 - 5A_4$ (operiamo sulle righe di A) sulla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} I^a \\ II^a \\ 2 \cdot III^a - 5 \cdot IV^a \\ IV^a \end{array}$$

Questo equivale alla moltiplicazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice per cui moltiplichiamo $A = [A_1, A_2, A_3, A_4]$ a sinistra può essere scritta come

$$[e_1, e_2, 2e_3 - 5e_4, e_4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed il risultato come

$$[A_1, A_2, 2A_3 - 5A_4, A_4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.2. [EEZ37] Effettuiamo l'operazione $A^3 \longrightarrow 3A^3 + 7A^2$ (operiamo sulle colonne di A) sulla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$3A^3 + 7A^2 = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Questo equivale alla moltiplicazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 & 4 \\ 3 & 2 & 20 & 2 \\ 7 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice per cui moltiplichiamo $A = [A^1, A^2, A^3, A^4]$ a destra può essere scritta come

$$[\underline{e}_1, \underline{e}_2, 3\underline{e}_3 + 7\underline{e}_2, \underline{e}_4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed il risultato come

$$[A^1, A^2, 3A^3 + 7A^2, A^4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 & 4 \\ 3 & 2 & 20 & 2 \\ 7 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10.3. [EEE49]

```
A:=Mat([[1,2,3],
        [0,1,0],
        [1,1,1]]);
```

```
Inverse(A);
Mat[[-1/2, -1/2, 3/2],
     [ 0,    1,    0],
     [1/2, -1/2, -1/2] ]
```

```
Transposed(Inverse(A));
Mat[[-1/2, 0, 1/2],
     [-1/2, 1, -1/2],
     [3/2, 0, -1/2] ]
```

```
Inverse(Transposed(A));
Mat[[-1/2, 0, 1/2],
     [-1/2, 1, -1/2],
     [ 3/2, 0, -1/2]]
```

Corollario 10.4 (Regola del Sarrus). [FFF07] *Segue immediatamente dalla definizione del determinante che, date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad e \quad S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Ovvero il determinante di A è la somma del prodotto degli elementi su ogni diagonale meno la somma del prodotto degli elementi su ogni antidiagonale della matrice S , costruita aggiungendo ad A , a destra, la sua prima e seconda colonna.

Esercizio 10.5. [FFF09] *Calcolare il determinante della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Usando la regola del Sarrus, basta costruire la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

e

$$\det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 6 = 0$$

La regola del Sarrus è un caso particolare della *Formula di Leibniz*. La riportiamo qui per completezza, ma non è nel programma del corso.

Proposizione 10.6 (Formula di Leibniz). [FFA25] *Data una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

dove S_n è l'insieme delle permutazioni di n oggetti, $\sigma(i)$ è l'immagine dell' i -esimo oggetto tramite la permutazione σ e

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \sigma \text{ è dispari} \end{cases}$$

Una permutazione σ è detta *pari* o *dispari* a seconda che sia ottenibile come prodotto di un numero pari o dispari di trasposizioni, ovvero permutazioni che si limitino a scambiare tra loro due elementi.

Il costo computazionale del calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ mediante la formula di Leibniz è di $n!(n-1)$ moltiplicazioni. Questa regola ha quindi scarsa utilità pratica per matrici di ordine grande.

Esercizio 10.7. [B27] *Calcolare il determinante di*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

Soluzione.

```

M:=Mat([[1, -1, 1, 1],
        [1, -1, -1, -1],
        [1, 1, -1, -1],
        [1, 1, 1, -1]]);

RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, -1, 1, 1]
      2^a-(1)*1^a [0, 0, -2, -2]
      3^a-(1)*1^a [0, 2, -2, -2]
      4^a-(1)*1^a [0, 2, 0, -2]
Scambio la 2^a e la 3^a riga - e mi segno di averlo fatto.
Adesso la matrice e'
Mat([[1, -1, 1, 1],
     [0, 2, -2, -2],
     [0, 0, -2, -2],
     [0, 2, 0, -2]])
Divido la seconda, terza e quarta riga per due - e mi segno di averlo fatto.
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, -1, 1, 1]
----- [0, 1, -1, -1]
      0 sotto pivot [0, 0, -1, -1]
      4^a-(1)*2^a [0, 0, 1, 0]

```

Non è necessario arrivare fino alla completa riduzione a scala, si tratta di una matrice B 4×4 triangolare superiore a blocchi 2×2 (il blocco in basso a sinistra è nullo), e quindi il suo determinante è uguale a

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

Abbiamo fatto uno scambio di riga ed abbiamo diviso tre righe per 2 e quindi

$$\det A = (-1)^1 \cdot 2^3 \cdot \det B = -8$$

□

Esercizio 10.8. [esercitazione21] Data l'equazione matriciale $XA = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

Dopo aver determinato le dimensioni della matrice X , dire se il sistema ha una unica soluzione e in caso affermativo, esplicitare la matrice X .

Soluzione. Abbiamo il sistema $XA = B$ con le matrici A di dimensione 3×3 e B di dimensione 2×3 . Supponiamo che la matrice X abbia dimensione $p \times q$ quindi per la definizione della moltiplicazione di matrici le dimensioni di XA devono essere $p \times 3 = 2 \times 3$. Quindi le dimensioni di X sono 2×3 .

Per rispondere alla seconda domanda, se A è invertibile, riscriviamo il sistema come segue:

$$XA = B \implies XAA^{-1} = BA^{-1} \implies X = BA^{-1}$$

Quindi calcoliamo il determinante di A ; se è diverso da 0 sappiamo che A è invertibile. Calcoliamo il determinante di A :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \\ &+ 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-1 + 2) - 1 \cdot (-1 - 6) + 3 \cdot (-1 - 3) = -3 \neq 0 \end{aligned}$$

Pertanto A è invertibile e il sistema ha un'unica soluzione $X = BA^{-1}$.

Per determinare la matrice X calcoliamo innanzitutto l'inversa di A col metodo dell'identità:

```
A1:=Mat[[2, 1, 3, 1,0,0],
         [1, 1, 2, 0,1,0],
         [3, -1, -1, 0,0,1]];
L:=RiduciScalaVerbose(A1);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cannello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 1, 3, 1, 0, 0]
2^a-1/2*1^a [0, 1/2, 1/2, -1/2, 1, 0]
3^a-3/2*1^a [0, -5/2, -11/2, -3/2, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1/2
Cannello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 1, 3, 1, 0, 0]
----- [0, 1/2, 1/2, -1/2, 1, 0]
3^a+5*2^a [0, 0, -3, -4, 5, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-3
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
1^a*+1/2 [1, 1/2, 3/2, 1/2, 0, 0]
2^a*+2 [0, 1, 1, -1, 2, 0]
3^a*-1/3 [0, 0, 1, 4/3, -5/3, -1/3]
Cannello la colonna sopra il 3pivot
1^a-3/2*3^a [1, 1/2, 0, -3/2, 5/2, 1/2]
2^a-1*3^a [0, 1, 0, -7/3, 11/3, 1/3]
----- [0, 0, 1, 4/3, -5/3, -1/3]
Cannello la colonna sopra il 2pivot
1^a-1/2*2^a [1, 0, 0, -1/3, 2/3, 1/3]
----- [0, 1, 0, -7/3, 11/3, 1/3]
----- [0, 0, 1, 4/3, -5/3, -1/3]
```

Pertanto la matrice inversa è:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 7 & -11 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

A questo punto calcoliamo la matrice X :

$$\begin{aligned}
 X = BA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 7 & -11 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 7 & -11 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

□

Esercizio 10.9. [esercitazione23] *Determinare il determinante e se possibile l'inversa della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

Soluzione. Procediamo col calcolo mediante l'aggiunta dell'identità, perché ci permette di calcolare determinante e inversa allo stesso tempo. Costruiamo la matrice

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

e riduciamola in forma diagonale mediante il procedimento di Gauss.

```

AI3:=Mat[[ 2,  2,  3,  1,0,0],
          [ 1, -1,  2,  0,1,0],
          [-2, -1, -1,  0,0,1]];
L:=RiduciScalaVerbose(AI3);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [2, 2, 3, 1, 0, 0]
2^a-1/2*1^a  [0, -2, 1/2, -1/2, 1, 0]
3^a+1*1^a  [0, 1, 2, 1, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [2,  2,  3,  1,  0, 0]
----- [0, -2, 1/2, -1/2,  1, 0]
3^a+1/2*2^a  [0,  0, 9/4, 3/4, 1/2, 1]

```

Il determinante è il prodotto dei pivot $\det A = 2 \cdot (-2) \cdot \frac{9}{4} = -9$ pertanto possiamo calcolare l'inversa:

```

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
1^a*+1/2  [1, 1, 3/2, 1/2, 0, 0]
2^a*-1/2  [0, 1, -1/4, 1/4, -1/2, 0]
3^a*+4/9  [0, 0, 1, 1/3, 2/9, 4/9]

```

```

Cancello la colonna sopra il 3pivot
1^a-3/2*3^a  [1, 1, 0, 0, -1/3, -2/3]
2^a+1/4*3^a  [0, 1, 0, 1/3, -4/9, 1/9]
-----[0, 0, 1, 1/3, 2/9, 4/9]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
1^a-1*2^a     [1, 0, 0, -1/3, 1/9, -7/9]
-----[0, 1, 0, 1/3, -4/9, 1/9]
-----[0, 0, 1, 1/3, 2/9, 4/9]

```

Quindi la matrice inversa è:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 10.10. [FFF71] Calcolare al variare di $a, b \in \mathbb{K}$ il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a & 1 \\ 1 & b+2 & a+b \\ a-b & a+b & a \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$$

Scambio la prima e seconda riga perché voglio procedere con Gauss. Mi segno che ho effettuato uno scambio di righe, dovrò cambiare segno al determinante che trovo. Riduco con Gauss la prima colonna.

```

Use R:=Q[a,b];
A:=Mat([ [1,b+2,a+b],
         [a+1,a,1],
         [a-b,a+b,a] ]);
RiduciScalaVerbose(A); -- Cancello solo la prima colonna sotto a_11
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-----[1, b + 2, a + b]
2^a-(a+1)*1^a [0, -ab - a - b - 2, -a^2 - ab - a - b + 1]
3^a-(a-b)*1^a [0, -ab + b^2 - a + 3b, -a^2 + b^2 + a]

```

Sviluppo quindi con Laplace, per la prima colonna

$$1 \cdot \det \begin{pmatrix} -ab - a - b - 2 & -a^2 - ab - a - b + 1 \\ -ab + b^2 - a + 3b & -a^2 + b^2 + a \end{pmatrix} = a^2b + 2ab^2 + 2ab - a - 3b$$

Quindi

$$\det(A) = -(a^2b + 2ab^2 + 2ab - a - 3b) = -a^2b - 2ab^2 - 2ab + a + 3b$$

Esercizio 10.11. [FFQ05] La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ha determinante nullo (facile verifica, ma lo vedremo riducendola). Vediamo che le sue colonne

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 4) \quad \underline{v}_2 = (1, 2, 5) \quad \underline{v}_3 = (1, 3, 6)$$

sono linearmente dipendenti. Vogliamo determinare dei coefficienti α, β, γ di una loro relazione di dipendenza lineare (i coefficienti che danno una loro combinazione lineare nulla).

Per definizione di dipendenza lineare basta determinare le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \underline{0} \Leftrightarrow \alpha(1, 1, 4) + \beta(1, 2, 5) + \gamma(1, 3, 6) = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 4\alpha + 5\beta + 6\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Risolviamo con Gauss

```
M:=Mat([[1,1,1],
        [1,2,3],
        [4,5,6]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1]
      2^a-1*1^a [0, 1, 2]
      3^a-4*1^a [0, 1, 2]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1]
----- [0, 1, 2]
      3^a-1*2^a [0, 0, 0]
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, 1]
----- [0, 1, 2]
----- [0, 0, 0]
Cancello la colonna sopra il 2 pivot
      1^a-1*2^a [1, 0, -1]
----- [0, 1, 2]
----- [0, 0, 0]
```

Ricordiamo che questa matrice è associata al sistema

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

L'esistenza della riga nulla nella riduzione ci conferma che le colonne (e le righe) di A sono linearmente dipendenti. Abbiamo che le soluzioni del sistema sono $\alpha = \gamma$, $\beta = -2\gamma$, o se preferiamo $\{(\gamma, -2\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$. Le relazioni corrispondenti sono

$$\gamma v_1 - 2\gamma v_2 + \gamma v_3 = 0 \quad \gamma \neq 0$$

Una relazione di dipendenza lineare tra $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ è quindi data da

$$\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = 0$$

Dato che tutti i coefficienti della relazione sono non nulli, potremmo esplicitare ogni vettore in funzione degli altri due; otterremmo

$$\begin{aligned}\underline{v}_1 &= 2\underline{v}_2 - \underline{v}_3 \\ \underline{v}_2 &= \frac{1}{2}\underline{v}_1 + \frac{1}{2}\underline{v}_3 \\ \underline{v}_3 &= -\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2\end{aligned}$$

Esercizio 10.12. [FFP10] Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vogliamo vedere se le sue colonne sono linearmente indipendenti, ed in caso contrario vogliamo determinare i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ di una loro relazione di dipendenza lineare (i coefficienti che danno una loro combinazione lineare nulla).

Soluzione. Vogliamo usare il metodo delle tag-variable. Dato che si applica sulle righe, operiamo sulla trasposta della matrice A .

```
Use R:=Q[c[1..5]];
A:=Mat([ [1,1,3,1,2],
          [1,0,1,2,3],
          [1,3,1,0,1] ]);
S:=Transposed(A);S;
Mat([ [1, 1, 1],
       [1, 0, 3],
       [3, 1, 1],
       [1, 2, 0],
       [2, 3, 1] ]);
C:=Mat([ [1, 1, 1,c[1]],
          [1, 0, 3,c[2]],
          [3, 1, 1,c[3]],
          [1, 2, 0,c[4]],
          [2, 3, 1,c[5]] ]);

RiduciScalaVerbose(C);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, c[1]]
      2^a-(1)*1^a [0, -1, 2, -c[1] + c[2]]
      3^a-(3)*1^a [0, -2, -2, -3c[1] + c[3]]
      4^a-(1)*1^a [0, 1, -1, -c[1] + c[4]]
      5^a-(2)*1^a [0, 1, -1, -2c[1] + c[5]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, c[1]]
----- [0, -1, 2, -c[1] + c[2]]
      3^a-(2)*2^a [0, 0, -6, -c[1] - 2c[2] + c[3]]
```

```

4^a-(-1)*2^a [0, 0, 1, -2c[1] + c[2] + c[4]]
5^a-(-1)*2^a [0, 0, 1, -3c[1] + c[2] + c[5]]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-6
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, c[1]]
----- [0, -1, 2, -c[1] + c[2]]
----- [0, 0, -6, -c[1] - 2c[2] + c[3]]
4^a-(-1/6)*3^a [0, 0, 0, -13/6c[1] + 2/3c[2] + 1/6c[3] + c[4]]
5^a-(-1/6)*3^a [0, 0, 0, -19/6c[1] + 2/3c[2] + 1/6c[3] + c[5]]

```

Abbiamo quindi che le relazioni tra le colonne sono

$$-\frac{13}{6}C^1 + \frac{2}{3}C^2 + \frac{1}{6}C^3 + C^4 = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{19}{6}C^1 + \frac{2}{3}C^2 + \frac{1}{6}C^3 + C^5 = 0$$

ovvero, se vogliamo dettagliare alcune variabili come combinazione lineare delle altre, per esempio C_4 e C_5

$$\begin{aligned} C^4 &= \frac{13}{6}C^1 - \frac{2}{3}C^2 - \frac{1}{6}C^3 \\ C^5 &= \frac{19}{6}C^1 - \frac{2}{3}C^2 - \frac{1}{6}C^3 \end{aligned}$$

□

Esercizio 10.13. [FFF10] Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ vogliamo vedere se le sue righe sono linearmente

indipendenti, ed in caso contrario vogliamo determinare i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ di una loro relazione di dipendenza lineare (i coefficienti che danno una loro combinazione lineare nulla).

Associamo alle righe di A le variabili $v_1, \dots, v_4$.

$$S = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & v_1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & v_2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & v_3 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & v_4 \end{array} \right)$$

All'inizio ogni riga di S è uguale a se stessa. Operiamo una riduzione di Gauss fino ad ottenere una forma triangolare superiore per A .

```

Use R:=Q[v[1..4]];
S:=Mat([[1,1,3,1,v[1]],
        [1,1,1,2,v[2]],
        [1,3,1,2,v[3]],
        [4,3,2,2,v[4]]]);
RiduciScalaVerbose(S);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 3, 1, v[1]]
      2^a-1*1^a [0, 0, -2, 1, -v[1] + v[2]]
      3^a-1*1^a [0, 2, -2, 1, -v[1] + v[3]]
      4^a-4*1^a [0, -1, -10, -2, -4v[1] + v[4]]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat[[1, 1, 3, 1, v[1]],

```

```

[0, 2, -2, 1, -v[1] + v[3]],
[0, 0, -2, 1, -v[1] + v[2]],
[0, -1, -10, -2, -4v[1] + v[4]]]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 3, 1, v[1]]
----- [0, 2, -2, 1, -v[1] + v[3]]
0 sotto pivot [0, 0, -2, 1, -v[1] + v[2]]
4^a+1/2*2^a [0, 0, -11, -3/2, -9/2v[1] + 1/2v[3] + v[4]]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 3, 1, v[1]]
----- [0, 2, -2, 1, -v[1] + v[3]]
----- [0, 0, -2, 1, -v[1] + v[2]]
4^a-11/2*3^a [0, 0, 0, -7, v[1] - 11/2v[2] + 1/2v[3] + v[4]]

```

Dato che abbiamo effettuato uno scambio di righe, la matrice A ha quindi determinante $-(1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot (-7)) = -28 \neq 0$, e le sue righe sono linearmente indipendenti. Gli elementi dell'ultima colonna continuano a dare i coefficienti della combinazione lineare delle righe iniziali che danno la riga relativa, ma mai di una relazione di dipendenza lineare tra le righe di A . Per esempio, nella penultima matrice, la quarta riga

$[0, 0, -11, -3/2, -9/2v[1] + 1/2v[3] + v[4]]$

mi dice che

$$\begin{aligned} \left(0, 0, -11, -\frac{3}{2}\right) &= -\frac{9}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_3 + v_4 \\ \left(0, 0, -11, -\frac{3}{2}\right) &= -\frac{9}{2} (1, 1, 3, 1) + \frac{1}{2} (1, 3, 1, 2) + (4, 3, 2, 2) \end{aligned}$$

10.2 Formula di Cramer e formula dell'inversa

Teorema 10.14 (Cramer - dimostrazione non vista in classe e non richiesta). [FFF37] Sia dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ con $A = [A^1, \dots, A^n]$ non singolare (data per colonne). Sia

$$B_i = (A^1, \dots, A^{i-1}, \mathbf{b}, A^{i+1}, \dots, A^n)$$

la matrice uguale ad A tranne che la i -esima colonna viene sostituita con $\mathbf{b}$. Allora

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}$$

Dimostrazione. Sappiamo già che la soluzione esiste unica, dato che A è non singolare. Partendo a ritroso dalla formula

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)} \Leftrightarrow \det(A)x_i = \det(B_i)$$

vorrei usare il teorema di Binet sulla formula

$$AX_i = B_i$$

Quindi devo trovare delle matrici X_i , con $i : 1, \dots, n$ tali che $\det X_i = x_i$ e $A \cdot X_i = B_i$.

Costruiamo X_i per colonne:

$$X_i = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{x}, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_n)$$

Per costruzione, $\det X_i = x_i$. Se moltiplichiamo a destra A per X_i , ricordando che $A\underline{x} = \underline{b}$ ed usando la regola della moltiplicazione a destra (le colonne di X_i mi danno la combinazione lineare delle colonne di A per ottenere il risultato) otteniamo che $\forall i : 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} A \cdot X_i &= A \cdot (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{i-1}, \underline{x}, \underline{e}_{i+1}, \dots, \underline{e}_n) \\ &= (A \cdot \underline{e}_1, \dots, A \cdot \underline{e}_{i-1}, A\underline{x}, A \cdot \underline{e}_{i+1}, \dots, A \cdot \underline{e}_n) \\ &= (A^1, \dots, A^{i-1}, \underline{b}, A^{i+1}, \dots, A^n) \\ &= B_i \end{aligned}$$

Applichiamo il teorema di Binet a questa uguaglianza

$$\begin{aligned} \det(A \cdot X_i) &= \det B_i \\ \det(A) \det(X_i) &= \det B_i \\ \det(A) x_i &= \det B_i \\ x_i &= \frac{\det B_i}{\det A} \end{aligned}$$

□

Osservazione 10.15. [FFA17] *Se la matrice è singolare, la regola di Cramer non si applica. Quando si parla di risolvere con Cramer si deve sempre avere che la matrice associata al sistema è non singolare.*

Esercizio 10.16. [FFF61] *Risolvere con Cramer il sistema $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$*

Soluzione.

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1$$

□

Esercizio 10.17 (Proposto). [FFF62] *Risolvere con Cramer il sistema*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione 10.18. [FFF63] *In genere, per quanto elegante, la risoluzione con Cramer è molto costosa, dato che per un sistema $n \times n$ richiede il calcolo di $n + 1$ determinanti. Può essere competitiva con Gauss in condizioni particolari, per matrici 2×2 o se il sistema dipende da molti parametri.*

Formula per l'inversa

Definizione 10.19. [FFF66] *Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$. La matrice $A^* = ((-1)^{i+j} \det A_{ji})_{ij}$ si dice matrice complemento di A .*

Esercizio 10.20. [FFF90] *Data*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo A^* elemento per elemento

$$(A^*)_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = -8$$

$$(A^*)_{32} = (-1)^{3+2} \det A_{23} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -(-6) = 6$$

$$\begin{pmatrix} -8 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 6 & \bullet \end{pmatrix}$$

Completare la matrice per esercizio.

Proposizione 10.21 (Inversa - non dimostrata a lezione e non richiesta). [FFF38] *Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$, invertibile e A^* la sua matrice complemento. Allora*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \frac{1}{\det(A)} ((-1)^{i+j} \det A_{ji})_{ij}$$

Dimostrazione. Sia

$$b_{ij} = \frac{\det(A^1, \dots, A^{i-1}, \underline{e}_j, A^{i+1}, \dots, A^n)}{\det(A)} \quad \text{e } B = (b_{ij}) \text{ con } i, j : 1, \dots, n$$

Voglio dimostrare che B è inversa destra di A , ovvero che $AB = I_n$. Da questo segue che B è proprio l'inversa di A .

L'inversa X di A , che esiste unica, è la soluzione dell'equazione $AX = I_n$, ovvero degli n sistemi

$$AX^1 = \underline{e}_1 \quad \dots \quad AX^j = \underline{e}_j \quad \dots \quad AX^n = \underline{e}_n$$

$$A \cdot (x_{i1})_{i:1,\dots,n} = \underline{e}_1 \quad \dots \quad A \cdot (x_{ij})_{i:1,\dots,n} = \underline{e}_j \quad \dots \quad A \cdot (x_{in})_{i:1,\dots,n} = \underline{e}_n$$

Usando la regola di Cramer su questi sistemi per trovare le soluzioni x_{ij} , vediamo che

$$x_{ij} = \frac{\det(A^1, \dots, A^{i-1}, \underline{e}_j, A^{i+1}, \dots, A^n)}{\det(A)}$$

e quindi $x_{ij} = b_{ij}$, $X = (x_{ij}) = (b_{ij}) = B$ e B è l'inversa di A . Notiamo altresì che se sviluppiamo con Laplace il determinante della matrice $(A^1, \dots, A^{i-1}, \underline{e}_j, A^{i+1}, \dots, A^n)$ secondo la i -esima colonna abbiamo che, essendo l'unico elemento non nullo di questa colonna quello nella riga j -esima,

$$\det(A^1, \dots, A^{i-1}, \underline{e}_j, A^{i+1}, \dots, A^n) = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

e questo conclude la prova. □

Esercizio 10.22. [FFF69] *Determiniamo l'inversa di $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Usando la formula*

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det A_{11} & (-1)^{2+1} \det A_{21} \\ (-1)^{1+2} \det A_{12} & (-1)^{2+2} \det A_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}{ad - bc} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Abbiamo ottenuto qualche lezione fa lo stesso risultato attraverso una riduzione di Gauss, ma il calcolo era stato molto laborioso per la gestione dei parametri durante la riduzione.

Esercizio 10.23. [FFF70] Determiniamo l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$$

Svolgendo qualche calcolo vediamo che $\det A = -1 \neq 0$, e la matrice A è quindi invertibile e possiamo usare la formula per l'inversa. Raccolto il determinante (-1) la prima riga dell'inversa è

$$\begin{aligned} x_{11} &= (-1)^{1+1} \det A_{11} = + \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 \\ x_{12} &= (-1)^{1+2} \det A_{21} = - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -0 = 0 \\ x_{13} &= (-1)^{1+3} \det A_{31} = + \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Usando la formula abbiamo quindi per ora

$$X = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Le altre due righe sono lasciate per esercizio. È chiaro che il calcolo dell'inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

con la formula è molto costoso.

Osservazione 10.24. [FFF73] In genere, per quanto elegante, il calcolo dell'inversa con la proposizione precedente è estremamente costoso, dato che per una matrice $n \times n$ richiede il calcolo di n^2 determinanti $(n-1) \times (n-1)$. Può essere competitiva con Gauss in condizioni molto particolari, in particolare se la matrice dipende da molti parametri.

Esercizio 10.25. [FFZ73] Calcoliamo con la formula l'inversa della matrice generica 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1}$$

Soluzione.

$$A^{-1} = \frac{1}{-ceg + bfg + cdh - afh - bdi + aei} \begin{pmatrix} -fh + ei & ch - bi & -ce + bf \\ fg - di & -cg + ai & cd - af \\ -eg + dh & bg - ah & -bd + ae \end{pmatrix}$$

□

Esercizio 10.26. [FFA62] Dati $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ risolvere con Cramer il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sapendo che $\det A = ad - bc \neq 0$

Soluzione.

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 3 & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{d - 3b}{ad - bc} \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{3a - c}{ad - bc}$$

□

Esercizio 10.27 (Proposto). [FFA63] Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ risolvere il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 2 & b & c \\ 3 & a & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Hint: risolvere con Cramer, usare la regola del Sarrus per il determinante.

Se $-a^2c + abc + 2ab - 3b^2 + c \neq 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} x &= \frac{ab - 3b^2 + 2c}{-a^2c + abc + 2ab - 3b^2 + c} \\ y &= \frac{-2ac + 3b}{-a^2c + abc + 2ab - 3b^2 + c} \\ z &= \frac{-a^2 + 3ab - 3}{-a^2c + abc + 2ab - 3b^2 + c} \end{aligned}$$

Risolvere per esercizio nel caso $-a^2c + abc + 2ab - 3b^2 + c = 0$ (calcoli lunghi).

□

Esercizio 10.28. [FFA39] Trovare le relazioni lineari tra le colonne della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$$

Soluzione. Usiamo il metodo delle tag variables sulle righe della matrice trasposta A^T

```
Use R:=Q[x,y,z,t,u];
A:=Mat([[1,2,3,4,5],
        [2,1,1,3,4],
        [3,0,1,2,2]]);
```

```
AT:=Transposed(A);AT;
Mat([[1, 2, 3],
     [2, 1, 0],
     [3, 1, 1],
     [4, 3, 2],
     [5, 4, 2]]);
```

```
-- Aggiungiamo la colonna con le variabili e riduciamo con Gauss
```

```

ATx:=Mat([[1, 2, 3,x],
          [2, 1, 0,y],
          [3, 1, 1,z],
          [4, 3, 2,t],
          [5, 4, 2,u]]);
RiduciScalaVerbose(ATx);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, x]
      2^a-(2)*1^a [0, -3, -6, -2x + y]
      3^a-(3)*1^a [0, -5, -8, -3x + z]
      4^a-(4)*1^a [0, -5, -10, -4x + t]
      5^a-(5)*1^a [0, -6, -13, -5x + u]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, x]
----- [0, -3, -6, -2x + y]
      3^a-(5/3)*2^a [0, 0, 2, 1/3x - 5/3y + z]
      4^a-(5/3)*2^a [0, 0, 0, -2/3x - 5/3y + t]
      5^a-(2)*2^a [0, 0, -1, -x - 2y + u]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, x]
----- [0, -3, -6, -2x + y]
----- [0, 0, 2, 1/3x - 5/3y + z]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, -2/3x - 5/3y + t]
5^a-(-1/2)*3^a [0, 0, 0, -5/6x - 17/6y + 1/2z + u]

```

Abbiamo quindi che le relazioni sono

$$-\frac{2}{3}C^1 - \frac{5}{3}C^2 + C^4 = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{5}{6}C^1 - \frac{17}{6}C^2 + \frac{1}{2}C^3 + C^5 = 0$$

Facciamo l'esercizio usando $e_1, \dots, e_5$ al posto di $x, \dots, t$

```
-- Aggiungiamo la colonna con le variabili e riduciamo con Gauss,
-- riducendo solo riguardo alle prime tre colonne.
```

```

ATI:=Mat([[1, 2, 3, 1,0,0,0,0],
          [2, 1, 0, 0,1,0,0,0],
          [3, 1, 1, 0,0,1,0,0],
          [4, 3, 2, 0,0,0,1,0],
          [5, 4, 2, 0,0,0,0,1]]);
RiduciScalaVerbose(ATI);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 1, 0, 0, 0, 0]
      2^a-(2)*1^a [0, -3, -6, -2, 1, 0, 0, 0]
      3^a-(3)*1^a [0, -5, -8, -3, 0, 1, 0, 0]
      4^a-(4)*1^a [0, -5, -10, -4, 0, 0, 1, 0]
      5^a-(5)*1^a [0, -6, -13, -5, 0, 0, 0, 1]

```

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
 Cannello la 2^a colonna, sotto il pivot
 ----- [1, 2, 3, 1, 0, 0, 0, 0]
 ----- [0, -3, -6, -2, 1, 0, 0, 0]
 3^a- (5/3)*2^a [0, 0, 2, 1/3, -5/3, 1, 0, 0]
 4^a- (5/3)*2^a [0, 0, 0, -2/3, -5/3, 0, 1, 0]
 5^a- (2)*2^a [0, 0, -1, -1, -2, 0, 0, 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=2
 Cannello la 3^a colonna, sotto il pivot
 ----- [1, 2, 3, 1, 0, 0, 0, 0]
 ----- [0, -3, -6, -2, 1, 0, 0, 0]
 ----- [0, 0, 2, 1/3, -5/3, 1, 0, 0]
 0 sotto pivot [0, 0, 0, -2/3, -5/3, 0, 1, 0]
 5^a- (-1/2)*3^a [0, 0, 0, -5/6, -17/6, 1/2, 0, 1]

ed abbiamo ritrovato

$$-\frac{2}{3}C^1 - \frac{5}{3}C^2 + C^4 = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{5}{6}C^1 - \frac{17}{6}C^2 + \frac{1}{2}C^3 + C^5 = 0$$

Se continuiamo la riduzione otteniamo

Cannello la 4^a colonna, sotto il pivot
 ----- [1, 2, 3, 1, 0, 0, 0, 0]
 ----- [0, -3, -6, -2, 1, 0, 0, 0]
 ----- [0, 0, 2, 1/3, -5/3, 1, 0, 0]
 ----- [0, 0, 0, -2/3, -5/3, 0, 1, 0]
 5^a- (5/4)*4^a [0, 0, 0, 0, -3/4, 1/2, -5/4, 1]

che dà le relazioni

$$-\frac{2}{3}C^1 - \frac{5}{3}C^2 + C^4 = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{3}{4}C^2 + \frac{1}{2}C^3 - \frac{5}{4}C^4 + C^5 = 0$$

equivalenti alle precedenti dato che la seconda condizione attuale è ottenuta dalla combinazione lineare (mediante un passo di riduzione di Gauss) della prima e della seconda condizione trovate precedentemente. $\square$