

Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2023/24

Caboara

Esame scritto 24 Giugno

PRIMA PARTE Punteggio: risposta corretta = 2 pt

**SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE
SU QUESTO FOGLIO**

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome:

Nome:

1. Semplificare $\frac{(2+2i)^5}{(1-i)^3}$

Soluzione: 64

2. Dare una rappresentazione cartesiana del sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ con vettore generico $(a, a+b, a+b+c, a-b)$.

Soluzione: $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - t = 0\}$

3. Determinare al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a+b & 2 \\ b & 0 & c & 1 \\ a+b & 1 & a+b+c & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad rk(A) = 2$

4. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ determinare l'inversa della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soluzione: $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Dato un polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ e sapendo che $\gcd(f(x), f'(x)) = (x-1)^2$ determinare il numero di fattori primi di molteplicità 3 di $f(x)$.

Soluzione: 1, solo $x-1$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt). *Al variare di $a \in \mathbb{R}$ discutere le soluzioni del sistema con tre incognite x, y, z , quattro equazioni ed il parametro a .*

$$\begin{pmatrix} 0 & a-1 & 2 \\ 2a & a^2 & 0 \\ a & a & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Riduciamo la matrice associata al sistema con Gauss.

```
Use R:=Q[a];
M:=Mat([[0, a-1, 2, 1],
        [2a, a^2, 0, a-1],
        [a, a, 2, 1]]);
Scambio la 1^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
M:=Mat([[a, a, 2, 1],
        [0, a-1, 2, 1],
        [2a, a^2, 0, a-1]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=a
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [a, a, 2, 1]
      0 sotto pivot[0, a-1, 2, 1]
      3^a-2*1^a [0, a^2-2a, -4, a-3]
Suppongo a<>1, trattero' a parte il caso a=1
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=a-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [a, a, 2, 1]
----- [0, a-1, 2, 1]
3^a(-a^2+2a)/(a-1)*2^a [0, 0, (-2a^2+4)/(a-1), (-2a+3)/(a-1)]
```

Dato che $a \neq 1$ moltiplico la terza riga per $a-1$ ottenendo la matrice

$$\begin{pmatrix} a & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2a^2+4 & -2a+3 \end{pmatrix}$$

Consideriamo le varie possibilità

1. $a \neq 1$.

(a) $a \neq 0, \pm\sqrt{2}$. Abbiamo tre pivot, esiste unica soluzione.

(b) $a = 0$. Sostituiamo nella matrice

$$\begin{pmatrix} 2a & a^2 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2 & a-3/2 \end{pmatrix}$$

Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

La prima riga ci dice che non esistono soluzioni.

(c) $a = \pm\sqrt{2}$. Sostituiamo nella matrice

$$\begin{pmatrix} 2a & a^2 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2 & a-3/2 \end{pmatrix}$$

Otteniamo

$$\begin{pmatrix} \pm 2\sqrt{2} & 2 & 0 & \pm\sqrt{2}-1 \\ 0 & \pm\sqrt{2}-1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm\sqrt{2}-3/2 \end{pmatrix}$$

L'incompleta ha rango 2, la completa 3 e quindi non esistono soluzioni.

2. $a = 1$. Sostituiamo nella matrice precedente alla divisione per $a-1$,

$$\begin{pmatrix} 2a & a^2 & 0 & a-1 \\ 0 & a-1 & 2 & 1 \\ 0 & -1/2a^2+a & 2 & -1/2a+3/2 \end{pmatrix}$$

Otteniamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

L'incompleta ha rango massimo e quindi esiste un'unica soluzione.

Riassumendo, il sistema non ha soluzioni per $a = 0, \pm\sqrt{2}$, ha un'unica soluzione altrimenti.

□

Esercizio 2 (8pt). Sia $a \in \mathbb{R}$ ed un morfismo $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che soddisfi le condizioni

$$F((a, 1)) = (1, a) \quad F((1, a)) = (a, 1)$$

Determinare per quali a esista un endomorfismo che soddisfi le condizioni date. In questi casi,

1. determinare $(M_F)_B^B$ per una opportuna base B ;
2. determinare per quali a l'endomorfismo F sia surgettivo;
3. trovare almeno un $a \in \mathbb{R}$ tale che l'endomorfismo F non sia diagonalizzabile.

Dimostrazione. Vediamo per quali a i vettori $(a, 1), (1, a)$ formano una base B di $\mathbb{R}^2$.

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = a^2 - 1$$

- Se $a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$ la matrice è non singolare ed i due vettori $(a, 1), (1, a)$ sono indipendenti e formano quindi una base B di $\mathbb{R}^2$. Il morfismo è ben definito e

$$(M_F)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dato che questa matrice è non singolare, il morfismo è un isomorfismo, e quindi surgettivo. Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Dato che ci sono due autovalori distinti e lo spazio ha dimensione due, F è diagonalizzabile.

- Se $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$ le condizioni divengono
 1. Se $a = 1$ $F((1, 1)) = (1, 1)$. Scegliamo la base $B = (1, 1), (1, 0)$. Non abbiamo condizioni sull'immagine del secondo vettore, quindi prendiamo $F((1, 0)) = (x, y)$ considerando il vettore (x, y) in base B con $x, y \in \mathbb{R}$. La matrice associata al morfismo rispetto alla base B è

$$(M_F)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

Il morfismo è surgettivo se e solo se $(M_F)_B^B$ è non singolare, ovvero se e solo se $y \neq 0$.

2. Se $a = -1$ le condizioni diventano

$$F((-1, 1)) = (1, -1) \quad \text{e} \quad F((1, -1)) = (-1, 1)$$

che sono compatibili dato che la combinazione lineare dei vettori del dominio è

$$(-1, 1) + (1, -1) = \underline{0}$$

e le loro immagini soddisfano la stessa combinazione lineare

$$F((-1, 1)) + F((1, -1)) = (1, -1) + (-1, 1) = \underline{0}$$

e quindi le condizioni si riducono per esempio a

$$F((-1, 1)) = (1, -1) = -(-1, 1)$$

Procediamo come sopra. Completiamo il vettore $(-1, 1)$ a base $B = (-1, 1), (1, 0)$ di $\mathbb{R}^2$. Non abbiamo condizioni sull'immagine del secondo vettore, quindi prendiamo $F((1, 0)) = (x, y)$ considerando il vettore (x, y) in base B con $x, y \in \mathbb{R}$. dato che $F((-1, 1)) = (1, -1) = -(-1, 1)$, la matrice associata al morfismo rispetto alla base B è

$$(M_F)_B = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

e quindi rimane tutto analogo a quanto abbiamo fatto nel caso $a = 1$, sia per la surgettività sia per la diagonalizzabilità.

Ricapitoliamo:

- Esiste F morfismo che soddisfa le condizioni per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- Se $a \neq \pm 1$ abbiamo che

$$(M_F)_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed F è surgettivo ma non diagonalizzabile.

- Se $a = 1$ consideriamo la base $B = (1, 1), \underline{v}$ con $\underline{v} = (x, y)_B$ (in coordinate B). In questo caso abbiamo che

$$(M_F)_B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

ed F è surgettivo se e solo se $y \neq 0$.

- Analogamente se $a = -1$ consideriamo la base $B = (-1, 1), \underline{v}$ con $\underline{v} = (x, y)_B$ (in coordinate B). In questo caso abbiamo che

$$(M_F)_B = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

ed F è surgettivo se e solo se $y \neq 0$.

□

Un altro approccio è considerare $\underline{v}$ in coordinate E_2 , e trovare $(M_F)_B^B$ per un opportuna base B mediante la formula di cambiamento di base per morfismi, ma questo approccio porta calcoli più complessi.

Esercizio 3 (8pt). Date $a, b \in \mathbb{R}$ e l'endomorfismo $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ associato dalle basi canoniche alla matrice

$$(M_F)_{E_2}^{E_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Discutere la diagonalizzabilità di F al variare di a, b .

Dimostrazione. Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - a\lambda - b$$

Risolviamo $\lambda^2 - a\lambda - b$ con la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

1. Se $a^2 + 4b < 0$ non abbiamo autovalori nel campo e quindi F non è diagonalizzabile.
2. Se $a^2 + 4b > 0$ abbiamo due autovalori distinti e quindi F è diagonalizzabile.
3. Se $a^2 + 4b = 0$ abbiamo un unico autovalore $\lambda_0 = \frac{a}{2}$ di molteplicità algebrica 2. Calcoliamo la molteplicità geometrica, ricordando che $a^2 + 4b = 0$

$$\text{mg}(\lambda_0) = 2 - rk \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}_{|\lambda=\frac{a}{2}} = 2 - rk \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & b \\ 1 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix} = 2 - rk(M)$$

Indicando la matrice come M . Dato che $\det M = -\frac{a^2}{4} - b = -\left(\frac{a^2+4b}{4}\right) = 0$, e che M ha l'entrata $(2, 1)$ non nulla, abbiamo che $rk(M) = 1$ e quindi $\text{mg}(\lambda_0) = 1 \neq 2 = \text{ma}(\lambda_0)$. L'endomorfismo F non è quindi diagonalizzabile.

Conclusioni: F è diagonalizzabile se e solo se $a^2 + 4b > 0$. □