Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2024/25

Caboara

Esame scritto 4 Aprile

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

COGNOME: **NOME:**

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $e^{|z|} = e^{iz+|z|}$.
   Soluzione: $z = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
2. Determinare una descrizione cartesiana di $V = \mathrm{Span}((1,2,3),(5,-1,4),(6,i,6+i)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{C}^3$
   Soluzione: $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{C} \mid x+y=z\}$
3. Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ calcolare il determinante della matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & 1 & 2 \\ b & b & 1 & 2 & b \\ 5 & 4 & 1 & 1 & a \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   Soluzione: $\forall\ a, b\ \det(M) = 2 - a$
4. Determinare la dimensione del $\mathbb{C}$-spazio
   $$V = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right) \underset{SSP}{\subseteq} \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$
   Soluzione: 3

5. Dati i due sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$V_1 = \text{Span}((23, 456, 0), (\sqrt{45}, \pi + 1, 0)), \quad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^8 + z^4 + z^2 = 0\}$$

determinare $V_1 \cap V_2$.
Soluzione: $V_1 \cap V_2 = V_1 = V_2$

Alcune regole pratiche sullo scritto

- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi i due testi con scritti nome e cognome.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono amessi cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi - annullare i compiti è sempre sgradevole.
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate. A parte che sul testo, dove è previsto uno spazio apposito, possibilmente in alto a destra. Sempre in stampatello LEGGIBILE.
- Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno sostanziali penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete. Potete sbianchettare, cancellare, etc. etc.

SECONDA PARTE - Giustificare le risposte con esaurienti calcoli e spiegazioni

COGNOME: NOME:

Esercizio 1 (8pt). *Discutere le $a \in \mathbb{R}$ tali che il sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 4a \\ 0 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underline{0}$$

abbia un unica soluzione.

Soluzione. Dato che si tratta di un sistema omogeneo di quattro equazoni in quattro incognite, c'e' un una sola soluzione, quella nulla, se e solo il determinante della matrice incompleta, A, è non nullo. Calcoliamo questo determinante con Laplace, sviluppando per la prima colonna.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 4a \\ 0 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2a & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4a \\ a & 3 & 0 \\ 0 & 2a & 1 \end{pmatrix} - 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ 0 & 2a & 1 \end{pmatrix} = 8a^3 + 5a - 9 = p(a)$$

Potremmo andarci a cercare, se esistono le soluzioni razionali tra le candidate radici ma visto che i divisori di 8 sono $1, 2, 4, 8$ ed i divisori di 9 sono $1, 3, 9$, dopo aver provato un paio di candidati

$$\begin{aligned} p(1) &= 4 \\ p(2) &= 63 \end{aligned}$$

senza successo, e notando che $p(a)$ non può avere radici negative, determiniamo il numero di soluzioni reali (a questo punto forzatamente positive) di $8a^3 + 5a - 9 = 0$ con Sturm.

```
F0:=8a^3 + 5a - 9;
F1:=24a^2 + 5
GCDPolySTURMVerbose(F0,F1);

(8a^3 + 5a - 9)=(1/3a)*(24a^2 + 5)+(10/3a - 9)

Notiamo che 10/3a - 9 -> -10a + 27 nell'algoritmo di Sturm

(24a^2 + 5)=(-12/5a - 162/25)*(-10a + 27)+(4499/25)

Notiamo che 4499/25 -> -1 nell'algoritmo di Sturm

La sequenza di Sturm = [8a^3 + 5a - 9, 24a^2 + 5, -10a + 27, -1]
```

Per

- Per V_+, $++--$. Un cambio di segno. $V_+ = 1$.
- Per V_-, $-++-$. Due cambi di segno.$V_- = 2$.

ed abbiamo $\mid V_+ - V_- \mid = 1$ e quindi $8a^3 + 5a - 9 = 0$ ha un unica soluzione, positiva, che chiameremo a_0 sui reali, che non sappiamo determinare.

Ricapitolando, il sistema ammette un unica soluzione per ogni $a \neq a_0$, con $a_0 \in \mathbb{R}^+$ non determinato, soluzione di $8a^3 + 5a - 9 = 0$.

□

Esercizio 2 (8pt)**.** *Dati i sottospazi di* $\mathbb{R}^4$

$$V = \mathrm{Span}((1,2,0,1),(1,0,1,0)) \text{ e } W = \mathrm{Span}((1,2,1,k),(1,2,2,k),(1,2,1,k(k-1)))$$

determinare basi e dimensioni di $V, W, V+W, V \cap W$ *al variare di* $k \in \mathbb{R}$*.*

Soluzione. Procediamo col metodo standard. Chiaramente i generatori di V sono una sua base, e quindi $\dim V = 2$. Mettiamo i generatori di W e V, rispettivamente, come colonne di una matrice M e riduciamola con Gauss. Abbiamo scelto di mettere prima W perchè dobbiamo ancora determinare la sua dimensione e base.

```
Use R::=Q[k];
M:=Mat([[1,   1,     1, 1, 1],
        [2,   2,     2, 2, 0],
        [1,   2,     1, 0, 1],
        [k,   k, k^2-k, 1, 0]]);
RiduciScalaVerbose(M);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 1, 1]
   2^a-(2)*1^a [0, 0, 0, 0, -2]
   3^a-(1)*1^a [0, 1, 0, -1, 0]
   4^a-(k)*1^a [0, 0, k^2 - 2k, -k + 1, -k]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 1, 1, 1],
     [0, 1, 0, -1, 0],
     [0, 0, 0, 0, -2],
     [0, 0, k^2 - 2k, -k + 1, -k]])

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 1, 1]
-------------- [0, 1, 0, -1, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, -2]
  0 sotto pivot[0, 0, k^2 - 2k, -k + 1, -k]
```

```
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1,      1,    1,  1],
     [0, 1,      0,   -1,  0],
     [0, 0, k^2-2k, -k+1, -k],
     [0, 0,      0,    0, -2]]);
```

Distinguiamo i casi e riassuminamo, ricordando che per ogni k una base di V è data da $\underline{v}_1 = (1,2,0,1)$, $\underline{v}_2 = (1,0,1,0)$ e $\dim V = 2$. Poniamo

$$\underline{w}_1 = (1,2,1,k), \quad \underline{w}_2 = (1,2,2,k), \quad \underline{w}_3 = (1,2,1,k(k-1)),$$

- Se $k = 0, 2$ la matrice ha quattro pivot, nella prima, seconda, quarta e quinta colonna. Quindi
  - $\dim W + V = 4$ e $\dim W = 2$.
  - Una base di W è data da $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ ed una base di $V+W$ è E_4, dato che $\dim V+W \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}$ e $\dim V + W = 4$ implicano $V + W = \mathbb{R}^4$.
  - $\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 2 + 2 - 4 = 0$ e non esiste base di $V \cap W$.
- Se $k \neq 0, 2$ la matrice ha quattro pivot, nella prima, seconda, terza e quinta colonna. Quindi
  - $\dim W + V = 4$ e $\dim W = 3$.
  - Una base di W è data dai suoi tre generatori, ed una base di $V + W$ è, come sopra, E_4.
  - La condizione di appartenenza del vettore generico di V, $\alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2$, a $V \cap W$ si legge dalla quarta riga ed è $(0, -2) \cdot (\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$. Un vettore generico di $V \cap W$ è quindi $\alpha\underline{v}_1$ ed una sua base $\underline{v}_1$.

□

Esercizio 3 (8pt)**.** *Dire se esiste un applicazione lineare diagonalizzabile* $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *che soddisfa le condizioni*

$$\begin{aligned} T((1,2,3,0)) &= (1,2,3,0) \\ T((5,1,0,0)) &= (1,2,3,0) \\ T((0,1,0,1)) &= \underline{0} \\ \mathrm{ma}(0) &= 2 \\ \mathrm{ma}(1) &= 2 \end{aligned}$$

Opzionale: dire se esiste un applicazione lineare diagonalizzabile $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *che soddisfa le prime tre condizioni.*

Soluzione. Denotiamo i tre vettori

$$\underline{v}_1 = (1,2,3,0) \quad \underline{v}_2 = (5,1,0,0)) \quad \underline{v}_3 = (0,1,0,1)$$

Vediamo se sono linearmente indipendenti. La matrice che ha come righe $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, dato che la sottomatrice

$$A_{(1,2,3),(1,3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è non singolare. I tre vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono quindi linearmente indipendenti. Vediamo di completarli a base, per esempio col vettore $\underline{e}_4$. I quattro vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4 = \underline{e}_4$ formano una base B di $\mathbb{R}^4$, dato che la matrice che li ha come righe

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è non singolare, come si vede immediatamente sviluppando con Laplace secondo la quarta riga e la terza colonna. Nella base B le condizioni divengono

$$\begin{aligned} T(\underline{v}_1) &= \underline{v}_1 \\ T(\underline{v}_2) &= \underline{v}_1 \\ T(\underline{v}_3) &= \underline{0} \\ \mathrm{ma}(0) &= 2 \\ \mathrm{ma}(1) &= 2 \end{aligned}$$

Lasciamo l'immagine di $\underline{v}_4$ generica, $T(\underline{v}_4) = (a, b, c, d)$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Abbiamo che

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_T(\lambda) = \det((M_T)_B^B - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & a \\ 0 & -\lambda & 0 & b \\ 0 & 0 & -\lambda & c \\ 0 & 0 & 0 & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)(d-\lambda)$$

Per avere $\text{ma}(0) = 2,\ \text{ma}(1) = 2$ deve essere $d = 1$, per cui $p_T(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)^2$

Vediamo ora la diagonalizzabilità. Ci sono due autovalori di molteplicità algebrica 2, $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = 1$, e abbiamo $d = 1$. Calcoliamo le molteplicità geometriche di questi autovalori

- Per $\lambda_0 = 0$

$$\text{mg}(0) = 4 - rk\left((M_T)_B^B - 0 \cdot I_4)\right) = 4 - rk \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

- Per $\lambda_1 = 1$

$$\text{mg}(1) = 4 - rk\left((M_T)_B^B - 1 \cdot I_4)\right) = 4 - rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - rk\, M$$

  Calcoliamo il rango di M riducendola con Gauss e contando i pivot

```
Use R::=Q[a,b,c];
M:=Mat([[0,1,0,a],
        [0,-1,0,b],
        [0,0,-1,c],
        [0,0,0,0]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [0, 1, 0, a]
  2^a-(-1)*1^a [0, 0, 0, a + b]
  0 sotto pivot[0, 0, -1, c]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
```

```
Mat([[0, 1,  0,     a],
     [0, 0, -1,     c],
     [0, 0,  0, a + b],
     [0, 0,  0,     0]])
```

Se $b = -a$ il rango è 2, tre altrimenti. Quindi

$$\mathrm{mg}(1) = 4 - rk\, M = \begin{cases} 2 & \text{se } b = -a,\ \forall\ a, c \\ 1 & \text{se } b \neq -a,\ \forall\ a, c \end{cases}$$

Riassumendo: esistono applicazioni linari diagonlizzabili che soddisfano le condizioni se e solo se $T(\underline{e}_1) = (a, -a, c, 1)_B$ per qualche $a, c \in \mathbb{R}$. □