

Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2024/25

Caboara

Esame scritto 10 Febbraio

PRIMA PARTE

Punteggio: risposta corretta = 2 pt

**SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE
SU QUESTO FOGLIO**

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

COGNOME:

NOME:

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $z^4 - 2iz^2 - 1 = 0$

Soluzione: Due soluzioni doppie, $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{i5/4\pi}$

2. Dire quali dei seguenti $\mathbb{R}$ -sottospazi di $\mathbb{C}^3$ sono isomorfi

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$$

$$V_2 = \text{Span}((1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 1 + i), (0, 0, i))$$

$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid \text{Re}(x) = \text{Im}(x) = \text{Im}(y) = 0\}$$

Soluzione: $V_2 \simeq V_3$

3. Determinare una base dell' $\mathbb{R}$ -spazio

$$V = \text{Span}(x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6, 3x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6, x^5 + x^6, 5x^5 + 2x^6, x^5 - x^6)$$

Soluzione: i primi quattro polinomi, oppure x^3, x^4, x^5, x^6 o altre

4. Dire quante radici multiple ha il polinomio $p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12$ Soluzione: Nessuna radice multipla

5. Opzionale: dire al variare di $a \in \mathbb{R}$ quante radici multiple ha il polinomio $p(x) = 3x^4 - 4x^3 + a$
Soluzione: per $a = 0$: 0 è radice di molteplicità 3; per $a = 1$: 1 è radice di molteplicità 2

Alcune regole pratiche sullo scritto

- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi i due testi con scritti nome e cognome.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono ammessi cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi - annullare i compiti è sempre sgradevole.
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate. A parte che sul testo, dove è previsto uno spazio apposito, possibilmente in alto a destra. Sempre in stampatello LEGGIBILE.
- Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno sostanziali penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete. Potete sbianchettare, cancellare, etc. etc.

SECONDA PARTE - Giustificare le risposte con esaurienti calcoli e spiegazioni

COGNOME:

NOME:

Esercizio 1 (9pt). Dato $a \in \mathbb{R}$ e le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 - 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

ed X matrice 4×4 incognita, determinare le soluzioni di $B \cdot X \cdot A = A \cdot C$

Soluzione. Vediamo che

- La matrice A invertibile, in quanto si tratta di una matrice a blocchi, della forma $\left(\begin{array}{c|c} A' & A'' \\ \hline 0 & A''' \end{array} \right)$ e le due matrici A' e A''' sono chiaramente non singolari.
- La matrice B invertibile, in quanto si tratta di una matrice a blocchi della forma $\left(\begin{array}{c|c} B' & B'' \\ \hline 0 & B''' \end{array} \right)$ e le due matrici B' e B''' sono chiaramente non singolari B' in quanto triangolare inferiore 3×3 con 1 sull'antidiagonale, e B''' come matrice di ordine 1 con entrata non nulla.
- La matrice C è diagonale.

Dato che esiste l'inversa di A, B

$$B \cdot X \cdot A = A \cdot C \Leftrightarrow B^{-1} \cdot B \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = B^{-1} A \cdot C \cdot A^{-1} \Leftrightarrow X = B^{-1} A \cdot C \cdot A^{-1}$$

Calcoliamo A^{-1} , procediamo con il metodo dell'aggiunta dell'identità

```
Use R:=Q[a];
A:=Mat([[1,1,1,0,1,0,0,0],
        [5,2,0,4,0,1,0,0],
        [0,0,3,0,0,0,1,0],
        [0,0,a^3-1,1,0,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(A);
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
      2^a-(5)*1^a [0, -3, -5, 4, -5, 1, 0, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, 3, 0, 0, 0, 1, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, a^3 - 1, 1, 0, 0, 0, 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
----- [0, -3, -5, 4, -5, 1, 0, 0]
```

0 sotto pivot[0, 0, 3, 0, 0, 0, 1, 0]
0 sotto pivot[0, 0, a³ - 1, 1, 0, 0, 0, 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=3
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
----- [0, -3, -5, 4, -5, 1, 0, 0]
----- [0, 0, 3, 0, 0, 0, 1, 0]
4^a- (1/3a³ - 1/3)*3^a [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1/3a³ + 1/3, 1]

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
2^a*(-1/3) [0, 1, 5/3, -4/3, 5/3, -1/3, 0, 0]
3^a*(1/3) [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1/3, 0]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1/3a³ + 1/3, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 4 colonna
----- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
2^a- (-4/3)*4^a [0, 1, 5/3, 0, 5/3, -1/3, -4/9a³ + 4/9, 4/3]
----- [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1/3, 0]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1/3a³ + 1/3, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 3 colonna
1^a-(1)*3^a [1, 1, 0, 0, 1, 0, -1/3, 0]
2^a-(5/3)*3^a [0, 1, 0, 0, 5/3, -1/3, -4/9a³ - 1/9, 4/3]
----- [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1/3, 0]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1/3a³ + 1/3, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 2 colonna
1^a-(1)*2^a [1, 0, 0, 0, -2/3, 1/3, 4/9a³ - 2/9, -4/3]
----- [0, 1, 0, 0, 5/3, -1/3, -4/9a³ - 1/9, 4/3]
----- [0, 0, 1, 0, 0, 0, 1/3, 0]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, -1/3a³ + 1/3, 1]

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 4/9a^3 - 2/9 & -4/3 \\ 5/3 & -1/3 & -4/9a^3 - 1/9 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3a^3 + 1/3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4a^3 - 2 & -12 \\ 15 & -3 & -4a^3 - 1 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3a^3 + 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo B^{-1} , procediamo con il metodo dell'aggiunta dell'identità

B:=Mat([[1,1,1,0,1,0,0,0],
[1,1,0,0,0,1,0,0],
[1,0,0,0,0,0,1,0],
[0,0,0,1,0,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(B);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot

```

----- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
2^a-(1)*1^a [0, 0, -1, 0, -1, 1, 0, 0]
3^a-(1)*1^a [0, -1, -1, 0, -1, 0, 1, 0]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0],
      [0, -1, -1, 0, -1, 0, 1, 0],
      [0, 0, -1, 0, -1, 1, 0, 0],
      [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]])
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
----- [0, -1, -1, 0, -1, 0, 1, 0]
0 sotto pivot[0, 0, -1, 0, -1, 1, 0, 0]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
----- [0, -1, -1, 0, -1, 0, 1, 0]
----- [0, 0, -1, 0, -1, 1, 0, 0]
0 sotto pivot[0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
----- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
2^a*(-1) [0, 1, 1, 0, 1, 0, -1, 0]
3^a*(-1) [0, 0, 1, 0, 1, -1, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]

Cancello la colonna sopra il pivot nella 4 colonna
----- [1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
----- [0, 1, 1, 0, 1, 0, -1, 0]
----- [0, 0, 1, 0, 1, -1, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 3 colonna

1^a-(1)*3^a [1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]
2^a-(1)*3^a [0, 1, 0, 0, 0, 1, -1, 0]
----- [0, 0, 1, 0, 1, -1, 0, 0]
----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 2 colonna

1^a-(1)*2^a [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0]

```

----- [0, 1, 0, 0, 0, 1, -1, 0]
 ----- [0, 0, 1, 0, 1, -1, 0, 0]
 ----- [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]

Quindi

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed abbiamo (facciamo i conti in modo tale da minimizzarli, tranne l'ultima moltiplicazione di matrici)

$$\begin{aligned} X &= B^{-1} \cdot A \cdot C \cdot A^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 - 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4a^3 - 2 & -12 \\ 15 & -3 & -4a^3 - 1 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3a^3 + 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4a^2 \\ 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & a^4 - a & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4a^3 - 2 & -12 \\ 15 & -3 & -4a^3 - 1 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3a^3 + 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 4 & -3a & 4a^2 \\ 0 & -2 & a & -4a^2 \\ 0 & 0 & a^4 - a & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4a^3 - 2 & -12 \\ 15 & -3 & -4a^3 - 1 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3a^3 + 3 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9a & 0 \\ 60 & -12 & -12a^5 - 16a^3 + 12a^2 - 9a - 4 & 36a^2 + 48 \\ -30 & 6 & 12a^5 + 8a^3 - 12a^2 + 3a + 2 & -36a^2 - 24 \\ 0 & 0 & -3a^5 + 3a^4 + 3a^2 - 3a & 9a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Esercizio 2 (9pt). *Dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$V = \text{Span}((1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 2, 1, 3), (4, 8, 4, 6))$$

e

$$W = \text{Span}((1, 1, 2, a), (1, a, 1, a))$$

determinare basi di V , W , $V + W$, $V \cap W$ al variare di $a \in \mathbb{R}$. Dire se $\underline{v} = (3, 6, 5, 2) \in V + W$.

Soluzione. Procediamo col metodo standard. Troviamo una base di W

Verifichiamo, al variare di a , l'indipendenza lineare dei generatori di W . La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

ha rango due, visto che la sottomatrice $A_{(1,2);(1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è non singolare. I due generatori di W sono quindi indipendenti e formano una sua base, e la sua dimensione due, per ogni a .

Riduciamo con Gauss la matrice le cui colonne sono i generatori di V, W .

```
Use R:=Q[a];
M:=Mat([[1, 1, 1, 4, 1, 1],
        [2, 2, 2, 8, 1, a],
        [1, 1, 1, 4, 2, 1],
        [1, 2, 3, 6, a, a]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 4, 1, 1]
      2^a-(2)*1^a [0, 0, 0, 0, -1, a - 2]
      3^a-(1)*1^a [0, 0, 0, 0, 1, 0]
      4^a-(1)*1^a [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1]
Scambio la 2^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 1, 4, 1, 1],
     [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1],
     [0, 0, 0, 0, 1, 0],
     [0, 0, 0, 0, -1, a - 2]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 4, 1, 1]
----- [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 1, 0]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, -1, a - 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 5]=1
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 4, 1, 1]
----- [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1]
----- [0, 0, 0, 0, 1, 0]
      4^a-(-1)*3^a [0, 0, 0, 0, 0, a - 2]
```

Per ogni a ci sono solo 2 pivot nelle prime quattro colonne, quelle associate a V , e quindi $\dim V = 2$. Una base di V si ha dai vettori associati alle colonne che contengono i pivot, quindi una base di V è $(1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2)$. Esaminiamo i casi $a \neq 2, a = 2$

- $a \neq 2$. Ci sono 4 pivot, $\dim V + W = 4$ e una base di $V + W = \mathbb{R}^4$ è per esempio E_4 .

Dalla formula di Grassmann, abbiamo

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 2 + 2 - 4 = 0$$

Quindi $\dim V \cap W = 0$ e non ho base dell'intersezione. Il vettore $\underline{v}$, come ogni altro vettore di $\mathbb{R}^4$ appartiene a $V + W = \mathbb{R}^4$.

- $a = 2$. Ci sono 3 pivot, quindi $\dim V + W = 3$ e una base di $V + W$ è

$$(1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, a) \xrightarrow{a=2} (1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 2)$$

Dalla formula di Grassmann, abbiamo

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 2 + 2 - 3 = 1$$

La relazione tra i coefficienti del vettore generico di W

$$\alpha(1, 1, 2, a) + \beta(1, a, 1, a) \xrightarrow{a=2} \alpha(1, 1, 2, 2) + \beta(1, 2, 1, 2)$$

è data dalle ultime due entrate dell'ultima riga non nulla della matrice (la terza) $(1, 0)$ moltiplicate per (α, β) ed uguagliate a zero

$$(1, 0) \cdot (\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Quindi un vettore generico dell'intersezione è $\beta(1, 2, 1, 2)$ ed una base per esempio $(1, 2, 1, 2)$.

Per vedere se

$$(3, 6, 5, 2) = \underline{v} \in V + W = \text{Span}((1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 2))$$

vediamo se in una riduzione di Gauss si annulla la quarta riga della matrice

```
M:=Mat([[1,2,1,1],
        [1,2,1,2],
        [1,1,2,2],
        [3,6,5,2]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 1]
      2^a-(1)*1^a [0, 0, 0, 1]
      3^a-(1)*1^a [0, -1, 1, 1]
      4^a-(3)*1^a [0, 0, 2, -1]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 2, 1, 1],
     [0, -1, 1, 1],
     [0, 0, 0, 1],
     [0, 0, 2, -1]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 1]
----- [0, -1, 1, 1]
      0 sotto pivot[0, 0, 0, 1]
```

0 sotto pivot[0, 0, 2, -1]
 Scambio la 3^a e la 4^a riga
 Adesso la matrice e'
 $\text{Mat}([[1, 2, 1, 1],$
 $\quad [0, -1, 1, 1],$
 $\quad [0, 0, 2, -1],$
 $\quad [0, 0, 0, 1]])$

La quarta riga non si riduce a zero e quindi $\underline{v} \notin V + W$.

Riassumendo, abbiamo che per ogni a si ha che $(1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2)$ è base di V e $(1, 1, 2, a), (1, a, 1, a)$ è base di W .

- se $a \neq 2$ abbiamo che E_4 è base di $V + W = \mathbb{R}^4$, $V \cap W = \{\underline{0}\}$ e quindi non ha base ed il vettore $((3, 6, 5, 2) \in V + W$.
- Se $a = 2$ abbiamo che $(1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 1, 2, 2)$ è base di $V + W$, $(1, 2, 1, 2)$ è base di $V \cap W$ ed il vettore $((3, 6, 5, 2) \notin V + W$.

□

Esercizio 3 (5pt). Dato l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$A = (M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

discutere il numero di soluzioni del sistema di equazioni

$$(T^4 - T^3 + T^2 + 2T - I_3)((x, y, z)) = \underline{0}$$

ricordando che rispetto ad una base B per ogni $\underline{v}$ abbiamo $T(\underline{v}) = (M_T)_B^B(\underline{v})$.

Opzionale [1pt]: trovare le soluzioni esplicite in base E_3 .

Soluzione. Il nostro sistema diviene, rispetto ad una base B

$$\left((M_T)_B^{B^4} - (M_T)_B^{B^3} + (M_T)_B^{B^2} + 2(M_T)_B^B - I_3 \right) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B \right) = \underline{0}$$

Dato che siamo interessati al numero di soluzioni, vediamo se possiamo trovare una base in cui i conti saranno più semplici, per esempio una base di autovettori, se esiste. Controlliamo quindi se T è diagonalizzabile

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-\lambda(1-\lambda) - 2) = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione $-\lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$, ovvero

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = -1, 2$$

Dato che si tratta di tre autovalori distinti in $\mathbb{R}^3$, l'endomorfismo T è diagonalizzabile ed esiste una base di autovettori B rispetto alla quale abbiamo

$$M = (M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per il teorema di Cayley-Hamilton, abbiamo che $M = (M_T)_B^B$ soddisfa il polinomio caratteristico e quindi $-M^3 + M^2 + 2M = 0$.

Possiamo quindi trasformare il nostro sistema in un sistema col lo stesso numero di soluzioni

$$\begin{aligned}
& (T^4 - T^3 + T^2 + 2T - I_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \\
& (M^4 - M^3 + M^2 + 2M - I_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \underline{0} \\
& (M^4 - I_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \underline{0} \\
& \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^4 - I_3 \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \underline{0} \\
& \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} - I_3 \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \underline{0} \\
& \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \underline{0}
\end{aligned}$$

Dato che si tratta di un sistema omogeneo, Per il teorema di Rouchè-Capelli, il sistema ha quindi $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Parte opzionale: determinare le soluzioni in base E_3 . Dobbiamo trovare esplicitamente le soluzioni in base B , e fare il cambio di base per questi vettori con la base B di autovettori, che va determinata.

Un vettore generico dell'insieme delle soluzioni (che ha dimensione uno, come visto) di

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = \underline{0} \Leftrightarrow (-x, 0, 7z)_B = \underline{0} \Leftrightarrow x = z = 0$$

è chiaramente $(0, y, 0)$ ed una sua base $(0, 1, 0)_B$. Quindi una base delle soluzioni originarie del nostro sistema è $(0, 1, 0)_B$, ovvero il secondo vettore della base B , basta determinare questo vettore in base E_3 , ovvero l'autovettore associato all'autovalore $\lambda_1 = -1$. Una base di V_{λ_1} è data da una base di

$$\begin{aligned}
\text{Sol} \left(\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right)_{\lambda=-1} \underline{x} = \underline{0} \right) &= \text{Sol} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \right) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

che è chiaramente $(-2, 1, 0)$

Un altro metodo sarebbe potuto essere quello rimanere in base E_3 , usando la matrice A . Per semplificare i conti usiamo il teorema di Cayley-Hamilton sul polinomio caratteristico, Avremmo dovuto risolvere

$$(A^4 - I_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

cosa fattibile.

Riassumendo: il sistema ha ∞^1 soluzioni, ed in base E_3 una base delle soluzioni è $B_S = (-2, 1, 0)$ $\square$