

Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 11 Settembre

PRIMA PARTE

Punteggio: risposta corretta = 1 pt

**SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE
SU QUESTO FOGLIO**

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome:

Nome:

1. Disegnare sul piano di Argand Gauss le soluzioni complesse dell'equazione $e^{iz} = e^z$.

Sol: $z = k\pi - ik\pi = k\pi(1 - i) \quad k \in \mathbb{Z}$

2. Trovare una fattorizzazione, non necessariamente in fattori irriducibili, del polinomio $x^8 + x^4 + 1 \in \mathbb{C}[x]$.

Sol: $\left(x^4 - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \left(x^4 - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

3. Dato $V = \text{Span}((1, 0, 1, 2), (7, 0, 1, 3), (0, 0, 0, 1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$ determinare un vettore in V

Soluzione: Qualunque vettore con seconda componente nulla, p.e. $(1, 0, 2, 3)$

4. Determinare una funzione $f \in \{g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ tale che le funzioni f, F, G siano linearmente dipendenti, date

$$\begin{array}{lll} F: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & a & \mapsto 1 \end{array}, \quad \begin{array}{lll} G: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & \clubsuit & \mapsto \cos^2 \clubsuit \end{array}$$

Soluzione: $\begin{array}{lll} f: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & t & \mapsto \sin^2 t \end{array}$

5. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ è invertibile la matrice $\begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a-b \end{pmatrix}$ **Soluzione:** $b \neq 0, b \neq -a$,

6. Determinare, per le $a, b \in \mathbb{R}$ che soddisfano le condizioni del punto precedente, l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a-b \end{pmatrix}$ **Soluzione:** $-\frac{1}{2b(a+b)} \begin{pmatrix} a-b & -a-b \\ -a-b & a+b \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1. (9 pt) Dati i tre sottospazi

$$\begin{aligned}V_1 &= \text{Span}((3, 2, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 0)), \\V_2 &= \text{Span}((1, 1, 0, 1), (2, 3, 0, 1), (1, 0, 0, 0)), \\V_3 &= \text{Span}((2, 1, 0, 0), (4, 2, 0, 0), (6, 3, 0, 0)),\end{aligned}$$

Determinare una base di $V_1 \cap V_2 \cap V_3$

Soluzione.

I tre generatori di V_1 sono linearmente indipendenti, dato che si vede immediatamente che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che li ha per righe è 3. Dato che tutti e tre i generatori di V_1 hanno la terza componente nulla, $V_1 = \{(x, y, z, t) \mid z = 0\}$

I tre generatori di V_2 sono linearmente indipendenti, dato che si vede immediatamente che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che li ha per righe è 3. Dato che tutti e tre i generatori di V_2 hanno la terza componente nulla, $V_2 = \{(x, y, z, t) \mid z = 0\}$ e quindi $V_2 = V_1$

Dato che tutti i generatori di V_3 hanno la terza componente nulla, appartengono a V_1 , quindi $V_3 \subseteq V_1$

Quindi $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = V_3$. Dato che il secondo e terzo generatore di V_3 sono multipli del primo, una base di $V_1 \cap V_2 \cap V_3$ è data da $(2, 1, 0, 0)$.

□

Esercizio 2. (9 pt) Data una base B di $\mathbb{R}^4$ e l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$(M_T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Al variare di $a \in \mathbb{K}$ calcolare il polinomio caratteristico di T e discutere la diagonalizzabilità di T .

Soluzione. Calcoliamo il polinomio caratteristico di T

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & a-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda^2 - 2\lambda - 1)(a - \lambda)(1 - \lambda) \end{aligned}$$

Dato che

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Abbiamo quattro autovalori $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, $\lambda_3 = a$, non necessariamente distinti. Distinguiamo i quattro casi

1. $a \neq 1, \pm\sqrt{2}$: Abbiamo quattro autovalori distinti di molteplicità algebrica uno, e quindi T è diagonalizzabile
2. $a = 1$: Abbiamo due autovalori distinti di molteplicità algebrica uno, $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, ed un autovalore di molteplicità algebrica due, $\lambda_0 = 1$. Calcoliamo $\text{mg}(\lambda_0)$.

$$\begin{aligned} \text{mg}(\lambda_0) &= 4 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-\lambda \end{pmatrix}_{a=\lambda=1} \\ &= 4 - rk \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

L'endomorfismo T non è diagonalizzabile.

3. $a = 1 + \sqrt{2}$: Abbiamo due autovalori distinti di molteplicità algebrica uno, $\lambda_0 = 1$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$, ed un autovalore di molteplicità algebrica due, $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$. Calcoliamo $\text{mg}(\lambda_1)$.

$$\begin{aligned}
 \text{mg}(\lambda_1) &= 4 - rk \left(\begin{array}{cccc} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-\lambda \end{array} \right)_{a=\lambda=1+\sqrt{2}} \\
 &= 4 - rk \left(\begin{array}{cccc} -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
 &= 4 - 2 = 2
 \end{aligned}$$

L'endomorfismo T è diagonalizzabile. Abbiamo determinato facilmente il rango dato che le prime due righe della matrice sono multiple l'una dell'altra, come pure la terza e quarta.

4. $a = 1 - \sqrt{2}$: Abbiamo due autovalori distinti di molteplicità algebrica uno, $\lambda_0 = 1$ e $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, ed un autovalore di molteplicità algebrica due, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Calcoliamo $\text{mg}(\lambda_2)$.

$$\begin{aligned}
 \text{mg}(\lambda_2) &= 4 - rk \left(\begin{array}{cccc} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-\lambda \end{array} \right)_{a=\lambda=1-\sqrt{2}} \\
 &= 4 - rk \left(\begin{array}{cccc} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
 &= 4 - 2 = 2
 \end{aligned}$$

L'endomorfismo T è diagonalizzabile. Abbiamo determinato facilmente il rango dato che le prime due righe della matrice sono multiple l'una dell'altra, come pure la terza e quarta.

In conclusione, l'endomorfismo T non è diagonalizzabile se e solo se $a = 1$. □

Esercizio 3. (6 pt) Sia data $a \in \mathbb{R}$ e una funzione $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che soddisfa le condizioni $T((1, a)) = (1, 1)$, $T((a, 1)) = (1, a)$, determinare al variare di a tutte le funzioni T che

1. Siano endomorfismi.
2. Non siano isomorfismi.

e per queste discutere la diagonalizzabilità di T e determinare una base di autovettori per T .

Soluzione. I due vettori $(1, a)$, $(a, 1)$ formano una base di $\mathbb{R}^2$ se e solo $\det \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

Discutiamo i tre casi $a = \pm 1, a \neq \pm 1$

1. $a \neq \pm 1$: una base di $\mathbb{R}^2$ è quindi data da $B = (1, a), (a, 1)$ e se T è un morfismo è associato mediante la base B alla matrice

$$(M_T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Dato che $a \neq 1$, questa matrice è non singolare e quindi T è isomorfismo, non soddisfacendo le condizioni.

2. $a = -1$: le due condizioni $T((1, a)) = (1, 1)$, $T((a, 1)) = (1, a)$ divengono $T((1, -1)) = (1, 1)$, $T((-1, 1)) = (1, -1)$. Dato che per le proprietà dei morfismi si dovrebbe avere

$$-T((-1, 1)) = T(-(-1, 1)) = T((1, -1)) = (1, 1)$$

ed abbiamo

$$-T((-1, 1)) = -(1, -1) = (-1, 1)$$

T non può essere un morfismo e quindi non soddisfa le condizioni.

3. $a = 1$: le due condizioni $T((1, a)) = (1, 1)$, $T((a, 1)) = (1, a)$ coincidono. Prendendo la base $B = v_1 = (1, 1), v_2 = (1, 0)$, abbiamo che $T(v_1) = v_1 = (1, 0)_B$ mentre l'immagine di v_2 è libera, e quindi $T(v_2) = (x, y)_B$. Quindi se T è un morfismo, abbiamo

$$(M_T)_B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Perché T non sia un isomorfismo, è necessario e sufficiente che la matrice $(M_T)_B$ sia singolare, e dato che il suo determinante è uguale a y , dobbiamo avere $y = 0$ e quindi

$$(M_T)_B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & x \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 1)$$

vediamo che non dipende da x e dato che ha due radici distinte, T è sempre diagonalizzabile con autovalori $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1$

Troviamo le due basi degli autospazi. I vettori sono espressi in coordinate B .

(a) V_{λ_0} : una base è data dai vettori (t, u) soluzioni dell'equazione

$$T((t, u)) = \lambda_0(t, u) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = 0(t, u) \Leftrightarrow (t + ux, 0) = (0, 0) \Leftrightarrow t = -xu$$

Quindi un vettore generico delle soluzioni è dato da $(-xu, u) = u(-x, 1)$ ed una base di V_{λ_0} è $(-x, 1)$.

(b) V_{λ_1} : una base è data dai vettori (t, u) soluzioni dell'equazione

$$\begin{aligned} T((t, u)) &= \lambda_1(t, u) \\ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} &= 1(t, u) \\ (t + ux, 0) &= (t, u) \\ (ux, -u) &= (0, 0) \end{aligned}$$

e quindi $u = 0$. Un vettore generico delle soluzioni è quindi dato da $(t, 0) = t(1, 0)$ ed una base di V_{λ_1} è $(1, 0)$.

In conclusione, T è un morfismo se e solo se $a = 1$, ed in questo caso, data la base $B = (1, 1), (1, 0)$, T non è isomorfismo se e solo se

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}$$

T è sempre diagonalizzabile, ed una base di autovettori è $B' = (-x, 1), (1, 0)$

□