

Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 13 Febbraio

PRIMA PARTE

Punteggio: risposta corretta = 1 pt

**SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE
SU QUESTO FOGLIO**

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome:

Nome:

1. Disegnare sul piano di Argand Gauss le soluzioni del sistema di equazioni $\begin{cases} z^4 - 2 = 0 \\ z^{64} - 2 = 0 \end{cases}$.

Soluzioni: $\emptyset$

2. (2pt) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & y+1 & 9 & 2y+2 \\ x+2 & 1 & \pi & 0 \\ 9 & \pi & 1 & 25 \\ 3x-1 & 0 & 25 & 1 \end{pmatrix}$ determinare un valore della coppia (x, y) tale che T_A è diagonalizzabile. Soluzione: $x = 5, y = 6$

3. Dati $V = \text{Span}((0, 1, 2), (0, 1, 3))$ e $W = \{(x, y, z) \mid x - y + 3z = 0\}$ determinare una base di $V \cap W$. Soluzione: $(0, 3, 1)$

4. Calcolare $\gcd(x^{17} + x^7 - 3x^2 + 7, x^2 - 2x + 1)$. Soluzione $\gcd = 1$

5. Data $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ base di $\mathbb{R}^3$ calcolare $\dim \ker T$ per

$$\begin{array}{lll} T: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ & \underline{v}_1 & \mapsto (1, 1, 0, 2) \\ & \underline{v}_2 & \mapsto (3, 4, 0, 7) \\ & \underline{v}_3 & \mapsto (0, 5, 0, 9) \end{array}$$

Soluzione: $\dim \ker T = 0$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1. (9 pt) Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ xk - 8x + 2yk - y - 4z = 4 - k \\ -3x + yk^2 + 3y - z = 3 - k^2 \end{cases}$$

e determinare le soluzioni

Soluzione. Costruiamo la matrice associata al sistema e risolviamo con Gauss

```
Use R:=QQ[k];
M:=Mat([[ 1,      2,  1,      0],
        [ 3,      1,  2,      1],
        [k - 8, 2k - 1, -4,    4-k],
        [-3, k^2 + 3, -1,   3-k^2]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 0]
      2^a-3*1^a [0, -5, -1, 1]
      3^a-k + 8*1^a [0, 15, -k + 4, -k + 4]
      4^a+3*1^a [0, k^2 + 9, 2, -k^2 + 3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-5
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 0]
----- [0, -5, -1, 1]
      3^a+3*2^a [0, 0, -k + 1, -k + 7]
4^a+1/5k^2 + 9/5*2^a [0, 0, -1/5k^2 + 1/5, -4/5k^2 + 24/5]
Moltiplico la terza riga per -5
[1, 2, 1, 0]
[0, -5, -1, 1]
[0, 0, -k + 1, -k + 7]
[0, 0, k^2 - 1, 4k^2 - 24]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=-k + 1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, 0]
----- [0, -5, -1, 1]
----- [0, 0, -k + 1, -k + 7]
      4^a+k + 1*3^a [0, 0, 0, 3k^2 + 6k - 17]
```

Verifichiamo facilmente che

$$3k^2 + 6k - 17 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-6 \pm \sqrt{240}}{6} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{15}}{6} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{15}}{3}$$

- Se $k \neq \frac{-3 \pm 2\sqrt{15}}{3}$ ho un'equazione impossibile e quindi non ho soluzioni.
- Se $k = \frac{-3 \pm 2\sqrt{15}}{3}$, ho $k - 1 \neq 0$ ed ho tre pivot, tre variabili e un'unica soluzione. Il sistema diviene

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -5y - z = 1 \\ (1 - k)z = 7 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/5z + 2/5 \\ y = -1/5z - 1/5 \\ z = \frac{7-k}{1-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3/5 \frac{7-k}{1-k} + 2/5 \\ y = -1/5 \frac{7-k}{1-k} - 1/5 \\ z = \frac{7-k}{1-k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1/5k+19/5}{k-1} \\ y = \frac{-2/5k+8/5}{k-1} \\ z = \frac{7-k}{1-k} \end{cases}$$

Riassumendo:

- Se $k \neq \frac{-3 \pm 2\sqrt{15}}{3}$ il sistema non ha soluzioni.
- Se $k = \frac{-3 \pm 2\sqrt{15}}{3}$ ho un'unica soluzione,

$$\begin{cases} x = \frac{-1/5k+19/5}{k-1} \\ y = \frac{-2/5k+8/5}{k-1} \\ z = \frac{7-k}{1-k} \end{cases}$$

□

Esercizio 2. (9 pt) Sia dato l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con matrice associata

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-1 \\ 3k & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$

1. Calcolare $\text{sp}(T)$.
2. Dire se T è diagonalizzabile.
3. Determinare una base di T -autovettori di $\mathbb{R}^3$.
4. Determinare altre due basi di T -autovettori di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione.

1. Il polinomio caratteristico di T è

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & k-1 \\ 3k & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & k-1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Quindi $\text{sp}(T) = \{1, 2\}$.

2. T è diagonalizzabile se e solo se $\text{mg}(1) = 2$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \text{mg}(1) &= 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & k-1 \\ 3k & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=1} \\ &= 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & k-1 \\ 3k & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} 3-1=2 & \text{se } k=1 \\ 3-2=1 & \text{se } k \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi T è diagonalizzabile se e solo se $k=1$.

3. Per $k=1$ determiniamo basi di V_{λ_1} , V_{λ_2}

- Per $V_{\lambda_1} = \text{Sol}([(M_T)_{E_3}^{E_3} - I_3]\underline{x} = \underline{0}) = \text{Sol} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \right)$ Il sistema è

$$\begin{cases} 3x + y + 5z = 0 \\ y = -3x - 5z \end{cases} \Leftrightarrow$$

quindi aggiungiamo questa condizione ad un vettore generico (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ per ottenere un vettore generico

$$(x, -3x - 5z, z) = x(1, -3, 0) + (0, -5, 1)$$

di V_{λ_1} . Una base di V_{λ_1} è quindi $(1, -3, 0), (0, -5, 1)$.

- Per $V_{\lambda_2} = \text{Sol}([(M_T)_{E_3}^{E_3} - 2I_3]\underline{x} = \underline{0}) = \text{Sol}\left(\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\underline{x} = \underline{0}\right)\right)$ Il sistema è

$$\begin{cases} -x = 0 \\ 3x + 5z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

aggiungiamo queste condizioni ad un vettore generico (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ per ottenere un vettore generico

$$(0, y, 0) = y(0, 1, 0)$$

di V_{λ_2} . Una base di V_{λ_2} è quindi $(0, 1, 0)$.

Dato che T è diagonalizzabile, una base B di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T si ottiene dall'unione delle basi degli autospazi, e quindi $B = (1, 0, 0), (0, -5, 1), (0, 1, 0)$.

4. Altre due basi costituite da autovettori di T sono

$$B' = (1, -3, 0), (0, -5, 1), 2(0, 1, 0) = (1, -3, 0), (0, -5, 1), (0, 2, 0)$$

e

$$B'' = (1, -3, 0), (0, -5, 1) + (1, -3, 0), (0, 1, 0) = (1, -3, 0), (1, -8, 1), (0, 1, 0)$$

Riassumendo:

1. $\text{sp}(T) = \{1, 2\}$.
2. T è diagonalizzabile se e solo se $k = 1$.
3. Per $k = 1$, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori è $B = (1, 0, 0), (0, -5, 1), (0, 1, 0)$.
4. Altre due basi $\mathbb{R}^3$ formate da autovettori sono

$$B' = (1, -3, 0), (0, -5, 1), (0, 2, 0) \text{ e } B'' = (1, -3, 0), (1, -8, 1), (0, 1, 0)$$

□

Esercizio 3. (6 pt) Al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ determinare tutti i morfismi $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfano le condizioni

$$\begin{aligned} T((1, 2, 1)) &= (1, 1, 0) \\ T((1, 1, 2)) &= (0, 1, 1) \\ T((-1, 2, -5)) &= (a + b + 3, -a, -4) \\ T((1, 5, -2)) &= (5 - a, b + 2, -3) \\ T((0, 0, 1)) &= (a + b, b + c, -c) \\ rk T &= 2 \end{aligned}$$

Soluzione.

□

Determiniamo le relazioni lineari tra i cinque vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 1), \underline{v}_2 = (1, 1, 2), \underline{v}_3 = (-1, 2, -5), \underline{v}_4 = (1, 5, -2), \underline{v}_5 = (0, 0, 1)$$

mediante il metodo delle variabili tag.

```
Use R:=QQ[a,b,c,v[1..5]];
M:=Mat([[ 1, 2, 1, v[1]],
        [ 1, 1, 2, v[2]],
        [-1, 2, -5, v[3]],
        [ 1, 5, -2, v[4]],
        [ 0, 0, 1, v[5]]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, v[1]]
      2^a-1*1^a [0, -1, 1, -v[1] + v[2]]
      3^a+1*1^a [0, 4, -4, v[1] + v[3]]
      4^a-1*1^a [0, 3, -3, -v[1] + v[4]]
      0 sotto pivot[0, 0, 1, v[5]]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 1, v[1]]
----- [0, -1, 1, -v[1] + v[2]]
      3^a+4*2^a [0, 0, 0, -3v[1] + 4v[2] + v[3]]
      4^a+3*2^a [0, 0, 0, -4v[1] + 3v[2] + v[4]]
      0 sotto pivot[0, 0, 1, v[5]]
```

Una base di $\mathbb{R}^3$ è quindi data da $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_5$ ((i vettori le cui righe corrispondenti hanno le componenti non tag nulle) e T deve soddisfare le relazioni

$$T(-3\underline{v}_1 + 4\underline{v}_2 + \underline{v}_3) = \underline{0} \quad e \quad T(-4\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2 + \underline{v}_4) = \underline{0}$$

- Per la prima abbiamo

$$\begin{aligned} -3T(\underline{v}_1) + 4T(\underline{v}_2) + T(\underline{v}_3) &= \underline{0} \\ -3(1, 1, 0) + 4(0, 1, 1) + (a + b + 3, -a, -4) &= \underline{0} \\ (a + b, -a + 1, 0) &= \underline{0} \end{aligned}$$

- Per la seconda abbiamo

$$\begin{aligned} -4T(\underline{v}_1) + 3T(\underline{v}_2) + T(\underline{v}_4) &= \underline{0} \\ -4(1, 1, 0) + 3(0, 1, 1) + (5 - a, b + 2, -3) &= \underline{0} \\ (-a + 1, b + 1, 0) &= \underline{0} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + 1 = 0 \\ -a + 1 = 0 \\ b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Sostituiamo i valori di a, b nella matrice

$$(M_T)_{E_3}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a + b \\ 1 & 1 & b + c \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & c - 1 \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}$$

e vediamo che ha rango almeno due dato che la sua sottomatrice

$$\left((M_T)_{E_3}^B \right)_{(1,2);(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è non singolare ed ha rango due se e solo se il suo determinante è nullo, ovvero se (sviluppiamo per la prima riga)

$$-c - (c - 1) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

Dato che il rango della matrice $(M_T)_{E_3}^B$ è la dimensione dell'immagine e quindi il rango del morfismo T , $\text{rk } T = 2 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$.

Riassumendo: Esiste un morfismo che soddisfa le condizioni se e solo se $a = 1$, $b = -1$, $c = \frac{1}{2}$.