Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2022/23

Caboara

Esame scritto 29 Aprile

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 1 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Trovare le soluzioni del sistema di equazioni $\begin{cases} z^3 - 2z^2 + i - 2 = 0 \\ z^4 - 1 = 0 \end{cases}$.

   Soluzioni: $z = i$

2. Determinare un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$e $x \in \mathbb{R}$ tali che i vettori $\underline{v}, (1,2,3), (3,2,x)$ siano a due a due ortogonali.

   Soluzione: $x = -\frac{7}{3}$, $\underline{v} = (8/3z, -17/6z, z)$. Per esempio $\underline{v} = (-2,1,0)$ ma anche $\underline{v} = (0,0,0)$ va bene.

3. Determinare l'intersezione dei sottospazi di $\mathbb{R}^3$

   $$V = \text{Span}((2,-3,4)) \text{ e } W = \{(x,y,z) \ \mid \ \begin{cases} x + 2y + z, 3x + 2y = 0 \end{cases} \}$$

   Soluzione: $V \cap W = V$

4. Calcolare $\gcd(x^{117} + 7, x^{12} - 1)$. Soluzione $\gcd = 1$

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1. *(6 pt) Determinare* 13 *coppie* $a, b \in \mathbb{R}$ *tale che il sistema*

$$\begin{cases} 3x + 5y + t - z = 1 \\ x + 2y - t + z = a \\ (a^2 - b^2)x + (a^3 - b^3)y + z - 5t = 1 \\ (a-b)^3 x + (a-b)y + z - 4t = b \end{cases}$$

abbia un unica soluzione e determinarla per ogni coppia.

Soluzione. Scriviamo la matrice associata al sistema

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & a \\ a^2 - b^2 & a^3 - b^3 & 1 & -5 & 1 \\ (a-b)^3 & a-b & 1 & -4 & b \end{array} \right)$$

Notiamo che se $b = a$ la matrice diviene

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & a \end{array} \right)$$

dato che la matrice incompleta è a blocchi del tipo $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$ e

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \text{ e } \det C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = 1$$

la matrice incompleta è non singolare e la soluzione è unica per ogni coppia (a, b) con $b = a$.

Determiniamo le soluzioni generali del sistema nel caso $b = a$. Conviene risolvere prima la terza e quarta equazione, sostituire queste soluzioni nella prima e seconda e risolvere queste.

Abbiamo

$$\begin{cases} z - 5t = 1 \\ z - 4t = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - 5a \\ t = 1 - a \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 3x + 5y + t - z = 1 \\ x + 2y - t + z = a \end{cases} \Bigg| \begin{array}{l} z = 4 - 5a \\ t = 1 - a \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y + 4a - 4 = 0 \\ x + 2y - 5a + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23 - 33a \\ y = 19a - 13 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono quindi

$$\begin{cases} x = 23 - 33a \\ y = 19a - 13 \\ z = 4 - 5a \\ t = 1 - a \end{cases}$$

ed al variare di $a = 0, \dots, 12$ ottengo le 13 soluzioni richieste.

$\square$

Esercizio 2. *(10 pt) Dati i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, linearmente indipendenti, $a \in \mathbb{R}$ e il morfismo*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \underline{v}_1 & \mapsto & \underline{v}_1 + a\underline{v}_2 + \underline{v}_3 \\ & \underline{v}_2 & \mapsto & \underline{v}_1 + 3\underline{v}_2 + 2\underline{v}_3 \\ & \underline{v}_3 & \mapsto & a\underline{v}_2 \end{array}$$

1. *Determinare la a per cui $rk\,T = 1, 2$.*

2. *Per ognuna di queste a determinare una opportuna base K di $\mathbb{R}^3$ e la matrice $(M_T)_K^K$.*

Soluzione. Scegliamo base di $\mathbb{R}^3$ $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Il rango di T può essere uguale a $1, 2$ solo se la matrice $(M_T)_B^B$, che ha determinante a (sviluppiamo per la terza colonna), è singolare. Quindi $rk\,T = 1, 2$ se e solo se $a = 0$.

2. Consideriamo quindi solo il caso $a = 0$. Abbiamo

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   E questa è la matrice richiesta $(M_T)_K^K$ se scegliamo $K = B$

$\square$

Esercizio 3. *(9 pt) Determinare una matrice* $M \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}\times 3}(3)$ *che abbia* $1,2,3$ *come autovalori e abbia le entrate della diagonale tutte diverse da* $1,2,3$

Soluzione. Basta trovare una matrice $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}\times 3}(3)$ invertibile e calcolare

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

verificando poi le condizioni richieste.

Consideriamo la matrice, presa a caso con abbastanza entrate nulle e numeri bassi per semplificare i calcoli $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A è invertibile dato che $\det B = 3$, come si vede facilmente. È facile calcolare $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi la matrice richiesta è

$$\begin{aligned} M &= A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot (A^{-1}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 8 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che essendo simile alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ha gli stessi autovalori $1,2,3$ e soddisfa le condizioni richieste dato che non ha $1,2,3$ sulla diagonale. $\square$