Algebra Lineare - Ing. Chimica e Civile - A. A. 24/25

Esame scritto 14 Luglio 2025

PRIMA PARTE Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

COGNOME: **NOME:**

MAT: **CORSO:**

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $(z^3 - i + 1)(z^2 + i) = 0$.
   Sol: $e^{i\frac{3}{4}\pi}, e^{i\frac{5}{4}\pi}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3}{12}\pi}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{11}{12}\pi}, \sqrt[6]{2}e^{i\frac{19}{12}\pi}$
2. Determinare il numero di radici complesse non reali del polinomio $p(x) = 3x^4 + x - 3$
   Sol: 2
3. Descrivere, se esiste, un morfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diverso da quello identico tale che $f \circ f \equiv \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$
   Sol: per esempio quello associata alla matrice $(M_T)_{E_2}^{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. Determinare una descrizione cartesiana di $V = \mathrm{Span}((1, i, 1, i)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{C}^4$.
   Sol: $V = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 \quad | \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \\ xi - y = 0 \end{cases} \right\}$
5. Determinare il polinomio minimo dell'endomorfismo associato da una base B alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Sol: $x^2 - 1$

Alcune regole pratiche sullo scritto

- **Le soluzioni di ogni esercizio vanno ricapitolate in fondo allo svolgimento dello stesso - la mancanza di questa ricapitolazione verrà penalizzata nel punteggio**.
- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi i due testi con scritti nome e cognome.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono amessi cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi - annullare i compiti è sempre sgradevole.
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate. A parte che sul testo, dove è previsto uno spazio apposito, possibilmente in alto a destra. Sempre in stampatello LEGGIBILE.
- Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno sostanziali penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete. Potete sbianchettare, cancellare, etc. etc.

SECONDA PARTE - Giustificare le risposte con esaurienti calcoli e spiegazioni

COGNOME: NOME:

Esercizio 1 (7pt)**.** *Data $a \in \mathbb{R}$ ed i sottospazi di $\mathbb{R}^4$*

$$V = \text{Span}((1,2,2,a),(1,2,a,1),(1,2,2a-2,-a+2)) \qquad W = \text{Span}((1,1,a,2),(1,a,1,a))$$

determinare al variare di a dimensioni e basi di $V+W$, $V \cap W$.

Soluzione. Vediamo la dimensione di W, calcolaremo quella di V facendo i conti per la base dell'intersezione.

Dato che la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}$ ha le sottomatrici $N_{(1,2);(1,2)}$ e $N_{(1,2);(1,4)}$ di determinante rispettivamente $a-1$ e $a-2$, non esiste un a che renda le due sottomatrici contemporaneamente singolari, e quindi $\dim W = 2$ e i due generatori proposti ne formano una base.

Construiamo la matrice che ha per colonne i generatori di V e W, in quest'ordine, e riduciamola con Gauss.

```
M:=Mat([[1, 1,      1, 1,1],
        [2, 2,      2, 1,a],
        [2, a, 2a - 2, a,1],
        [a, 1, -a + 2, 2,a]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 1, 1]
   2^a-(2)*1^a [0, 0, 0, -1, a - 2]
   3^a-(2)*1^a [0, a - 2, 2a - 4, a - 2, -1]
   4^a-(a)*1^a [0, -a + 1, -2a + 2, -a + 2, 0]
Scambio la 2^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 1, 1, 1],
     [0, -a + 1, -2a + 2, -a + 2, 0],
     [0, a - 2, 2a - 4, a - 2, -1],
     [0, 0, 0, -1, a - 2]])
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=a - 1. Suppongo a diverso a 1, caso
che svolgero' a parte a partire da questa posizione e proseguo.

Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
--------------             [1,       1,      1,               1,     1]
--------------             [0, -a + 1, -2a + 2,          -a + 2,     0]
3^a-((-a + 2)/(a - 1))*2^a [0,       0,      0, (a - 2)/(a - 1),    -1]
  0 sotto pivot            [0,       0,      0, -1,              a - 2]

Moltiplico la terza riga per a-1, che ho supposto essere diverso da 0. La matrice ora e'
Mat([[1,      1,       1,      1,     1],
```

```
     [0, -a + 1, -2a + 2, -a + 2,     0],
     [0,      0,       0,  a - 2,  1 -a],
     [0,      0,       0,     -1, a - 2]]);

Scambio per comodita' la terza e quarta riga. La matrice ora e'

Mat([[1,       1,      1,     1,     1],
     [0, -a + 1, -2a + 2,-a + 2,     0],
     [0,       0,      0,    -1, a - 2],
     [0,       0,      0, a - 2,  1 -a]]);

Ho trovato il pivot in posizione A[3, 4]=-1
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
--------------   [1,      1,       1,      1,            1]
--------------   [0, -a + 1, -2a + 2, -a + 2,            0]
--------------   [0,      0,       0,     -1,        a - 2]
4^a-(-a + 2)*3^a [0,      0,       0,      0, a^2 - 5a + 5]
```

Notiamo che le radici di $a^2 - 5a + 5$ sono $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Esaminiamo i tre casi (i due casi $a = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ sono, ai nostri fini, equivalenti)

- $a \neq 1$ Noto che la terza colonna non ha pivot, quindi è combinazione lineare delle prime due. Una base di V è quindi data dalle prime due colonne della matrice originaria, $(1, 2, 2, a), (1, 2, a, 1)$, e $\dim V = 2$.

  - $a = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ e la quarta riga è nulla. Ci sono tre pivot; una base di $V + W$ è data dai primi due generatori di V e dal primo generatore di W, $\dim V + W = 3$, $dim V \cap W = 1$ per Grassman. Costruiamo una base di $V \cap W$.

    Un vettore generico di $V \cap W$ ̀dato da $\alpha(1, 1, a, 2) + \beta(1, a, 1, a)$. Imponendo la relazione di appartenenza a V, che leggiamo dalla terza riga

    $$-1\alpha + (a - 2)\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = (a - 2)\beta$$

    otteniamo un vettore generico di $V \cap W$,

    $$(a - 2)\beta(1, 1, a, 2) + \beta(1, a, 1, a) = \beta(a - 1, 2a - 2, a^2 - 2a + 1, 3a - 4)$$

    e quindi una base di $V \cap W$ è data da $(a - 1, 2a - 2, a^2 - 2a + 1, 3a - 4)$

  - $a \neq \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ci sono quattro pivot, quindi una base di $V + W$ è data dai primi due generatori di V e dai due generatori di W, $\dim V + W = 4$, $dim V \cap W = 0$ per Grassman e $V \cap W = \mathrm{Span}(\underline{0})$ non ha base.

- $a = 1$. Sostituendo a abbiamo la matrice

```
Mat([[1, 1, 1, 1, 1],
      [0, 0, 0, 1, 0],
```

```
     [0, -1, -2, -1, -1],
     [0, 0, 0, -1, -1]]);

Moltiplico per comodita' le terza e quarta riga per -1, ottenendo la matrice
M1:=Mat([[1, 1, 1, 1, 1],
         [0, 0, 0, 1, 0],
         [0, 1, 2, 1, 1],
         [0, 0, 0, 1, 1]]);
RiduciScalaVerbose(M1);
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 1, 1, 1],
     [0, 1, 2, 1, 1],
     [0, 0, 0, 1, 0],
     [0, 0, 0, 1, 1]])
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 4]=1
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 1, 1]
-------------- [0, 1, 2, 1, 1]
-------------- [0, 0, 0, 1, 0]
   4^a-(1)*3^a [0, 0, 0, 0, 1]
```

E siamo in una condizione uguale al caso $a \neq \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$, con quattro pivot nella prima, seconda, quarta e quinta colonna e quindi senza righe nulle.

Ricapitolando:

1. Se $a \neq \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ una base di $V+W$ è data da
$$B_{V+W} = ((1,2,2,a),(1,2,a,1),(1,1,a,2),(1,a,1,a))$$
e $\dim V+W = 4$, $\dim V \cap W = 0$ e $V \cap W = \mathrm{Span}(\underline{0})$ non ha base.

2. Se $a = \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ una base di $V+W$ è data da
$$B_{V+W} = ((1,2,2,a),(1,2,a,1),(1,1,a,2)) = \left(\left(1,2,2,\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\right),\left(1,2,\frac{5\pm\sqrt{5}}{2},1\right),\left(1,1,\frac{5\pm\sqrt{5}}{2},2\right)\right)$$
$\dim V+W = 3$, $dim V \cap W = 1$ e una sua base è
$$\begin{aligned} B_{V\cap W} &= (a-1, 2a-2, a^2-2a+1, 3a-4) \qquad \text{(sostituendo } a\text{)} \\ &= \left(\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}-1, 2\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}-2, \left(\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}+1, 3\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}-4\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(3\pm\sqrt{5}\right), 3\pm\sqrt{5}, \frac{1}{2}\left(7\pm3\sqrt{5}\right), \frac{1}{2}\left(7\pm3\sqrt{5}\right)\right) \end{aligned}$$

È del tutto accettabile, anzi consigliato, lasciare le a indicate nelle descrizioni precedenti.

$\square$

Esercizio 2 (7pt)**.** *Consideriamo l'endomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (1,a) & \mapsto & \underline{0} \\ & (a,1) & \mapsto & (a-1,0) \end{array}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Determinare per quali a l'endomorfismo T è diagonalizzabile.

Soluzione. Dato che $\det \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 1 - a^2$ abbiamo i tre casi

1. $a = -1$. Dato che il primo vettore $(1,a) = (1,-1)$ va in $\underline{0}$, mentre il secondo, $(a,1) = (-1,1)$ il suo opposto, va in $(-2,0)$, non può esistere un morfismo con queste condizioni.

2. $a = 1$. I due vettori $(1,a),(a,1)$ coincidono, come le loro immagini, Completiamo il vettore $(1,1)$ a base di $\mathbb{R}^2$, $B = (1,1),(1,0)$ con $T((1,0)) = (x,y)$ con $x,y \in \mathbb{R}$. sapendo quindi che Dato che
$$T((1,1)) = \underline{0}_{E_2} = \underline{0}_B$$
e che, con abuso di notazione, possiamo considerare
$$T((1,0)) = (x,y)_B \qquad \text{(consideriamo } x,y\text{) le coordinate del vettore in base } B$$
Abbiamo
$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$
e quindi
$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & x \\ 0 & y-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - y)$$
con due autovalori $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = y$. Consideriamo i casi
    - Se $y \neq 0$ abbiamo due autovalori distinti, T è diagonalizzabile.
    - Se $y = 0$ abbiamo l'autovalore $\lambda_0 = 0$ con $\mathrm{ma}(0) = 2$ e
    $$\mathrm{mg}(0) = 2 - rk \begin{pmatrix} -\lambda & x \\ 0 & y-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=y=0} = 2 - rk \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 00 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2-0=2 & \text{if } x = 0 \\ 2-1=1 & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$$
    e quindi T è diagonalizzabile se e solo se $x = 0$.

3. $a \neq \pm 1$. I due vettori $(1,a),(a,1)$ formano una base B di $\mathbb{R}^2$, esiste unico il morfismo che soddisfa le consizioni e
$$(M_T)_{E_2}^B = \begin{pmatrix} 0 & a-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con un cambiamneto di base, determiniamo

$$\begin{aligned}
(M_T)_B^B &= M_B^{E_2}\,(M_T)_{E_2}^B \\
&= \left(M_{E_2}^B\right)^{-1}(M_T)_{E_2}^B \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1}(M_T)_{E_2}^B \\
&= \frac{1}{1-a^2}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & a-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1-a^2}\begin{pmatrix} 0 & a-1 \\ 0 & -a^2+a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_T(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & a-1 \\ 0 & -a^2+a-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-a^2+a-\lambda)$$

con autovalori $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = -a^2 + a = a(-a+1)$. Ricordando che avevamo supposto $a \neq 1$ abbiamo i seguenti casi

(a) $a \neq 0$. Due autovalori distinti, T diagonalizzabile.

(b) $a = 0$. Un unico autovalore $\lambda_0 = 0$ di molteplicità algebrica 2. Calcoliamo

$$\mathrm{mg}(0) = 2 - rk\begin{pmatrix} -\lambda & a-1 \\ 0 & -a^2+a-\lambda \end{pmatrix}_{|\lambda=a=0} = 2 - rk\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2-1 = 1$$

e quindi T non è diagonalizzabile.

Ricapitolando: T è morfismo se e solo se $a \neq -1$.

1. Se $a \neq 1$, T è diagonalizzabile se e solo se $a \neq 0$.
2. Se $a = 1$, il morfismo nella base $B = (1,1),(1,0)$ ha matrice associata

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

ed è diagonalizzabile se e solo se $y \neq 0$ o $y = x = 0$.

□

Esercizio 3 (10pt). *Dati $a \in \mathbb{C}$ e l'endomorfismo $T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ associato da una base B alla matrice*

$$A = (M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$$

discutere la diagonalizzabilità di T.

Soluzione. Calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico.

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & -\lambda & -a \\ a & a & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + a^2)$$

Gli autovalori sono le radici di $(\lambda - 1)(\lambda^2 + a^2) = (\lambda - 1)(\lambda + ai)(\lambda - ai)$, ovvero

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = ai, \quad \lambda_1 = -ai$$

Vediamo i casi possibili al variare di $a \in \mathbb{C}$

- $\lambda_1 = 1 = ai = \lambda_2 \Leftrightarrow 1 = ai \Leftrightarrow a = \frac{1}{i} = -i$. In questo caso abbiamo $\lambda_{1,2} = 1$, con molteplicità algebrica due. Calcoliamo la sua molteplicità geometrica.

  $$\mathrm{mg}(1) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & -\lambda & -a \\ a & a & -\lambda \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{\lambda=1 \\ a=-i}} = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -i & 1 & i \\ -i & -i & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

  Dato che il la sottomatrice $M_{(2,3);(1,2)}$ è chiaramente non singolare (chiamiamo M la matrice su cui stiamo lavorando) la seconda e terza riga della matrice sono linearmente indipendenti. e quindi $\mathrm{ma}(1) \neq \mathrm{mg}(1)$, e T non è diagonalizzabile.

- $\lambda_1 = 1 = -ai = \lambda_2 \Leftrightarrow 1 = -ai \Leftrightarrow a = -\frac{1}{i} = i$. In questo caso abbiamo $\lambda_{1,2} = 1$, con molteplicità algebrica due. Calcoliamo la sua molteplicità geometrica.

  $$\mathrm{mg}(1) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & -\lambda & -a \\ a & a & -\lambda \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{\lambda=1 \\ a=i}} = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & -i \\ i & i & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

  Dato che il la sottomatrice $M_{(2,3);(1,2)}$ è chiaramente non singolare (chiamiamo M la matrice su cui stiamo lavorando) la seconda e terza riga della matrice sono linearmente indipendenti. e quindi $\mathrm{ma}(1) \neq \mathrm{mg}(1)$, e T non è diagonalizzabile.

- $\lambda_2 = ai = -ai = \lambda_3 \Leftrightarrow ai = -ai \Leftrightarrow a = 0$. In questo caso abbiamo $\lambda_{2,3} = 0$, con molteplicità algebrica due. Calcoliamo la sua molteplicità geometrica.

  $$\mathrm{mg}(0) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & -\lambda & -a \\ a & a & -\lambda \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{\lambda=0 \\ a=0}} = 3 - rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

  Quindi $\mathrm{ma}(0) = \mathrm{mg}(0)$, e dato che la molteplicità algebrica dell'altro autovalore è uno, T è diagonalizzabile.

- Per quanto visto sopra, è impossibile avere $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$
- Se i tre autovalori sono tutti distinti tra loro, ovvero se $a \neq 0, \pm i$, T è diagonalizzabile.

Ricapitolando, T è diagonalizzabile se e solo se $a \neq \pm i$. $\square$