

Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2025/26

Caboara

Esame scritto - Quinto appello 6 luglio

PRIMA PARTE

Punteggio: risposta corretta = 2 pt

**SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE
SU QUESTO FOGLIO**

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome:	Nome:	Matricola:	Corso:
-----------------	--------------	-------------------	---------------

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $\frac{z^4+i-1}{z^4-5} = 0$.

Soluzione. $z_k = \sqrt[8]{2}e^{-\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}} \quad k : 0, \dots, 3$ □

2. Date le due basi di $\mathbb{K}^2$, $B = (1, 2), (1, 3)$ e $C = (2, 1), (3, -1)$. Esprimere $(2, 6)_B$ in coordinate C .

Soluzione. $(2, 6)_B = \left(\frac{74}{5}, -\frac{36}{5}\right)_C$ □

3. (3pt) Il polinomio $p(x) = 4x^3 - 12x^2i - 16i$ ha radici multiple in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$? Se sì, quali?

Soluzione. $p(x)$ ha una radice multipla in $\mathbb{C}$, precisamente $z = 2i$ con molteplicità 2; non ha invece alcuna radice (multipla o no) in $\mathbb{R}$. □

4. Determinare una descrizione parametrica del sottospazio

$$V = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{Q} \mid \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases} \right\}$$

Soluzione. $(x, y, z, t) = t \cdot (0, 0, 0, 1), \quad t \in \mathbb{Q}$ □

5. Determinare un endomorfismo $T: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ che sia diagonalizzabile se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ma non se $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. [Dare la matrice associata alle basi canoniche, le entrate devono essere in $\mathbb{Q}$]

Soluzione. Per esempio, $(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ □

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt). *Dati*

$$V = \text{Span}((1, 2, 0), (-2, a, -1), (5, -a + 6, 1)) \quad W = \text{Span}((3, 1, a), (a, 1, 3), (4, -a + 4, 1))$$

dare al variare di $a \in \mathbb{Q}$ una base di $V \cap W$

Soluzione. Poniamo $\underline{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\underline{v}_2 = (-2, a, -1)$, $\underline{v}_3 = (5, -a + 6, 1)$ e $\underline{w}_1 = (3, 1, a)$, $\underline{w}_2 = (a, 1, 3)$, $\underline{w}_3 = (4, -a + 4, 1)$.

Passo 1: dimensione di V Verifichiamo se $\underline{v}_3$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, cercando α, β tali che $\underline{v}_3 = \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2$:

$$\alpha(1, 2, 0) + \beta(-2, a, -1) = (\alpha - 2\beta, 2\alpha + a\beta, -\beta) = (5, -a + 6, 1).$$

Dalla terza componente: $-\beta = 1 \Rightarrow \beta = -1$. Dalla prima: $\alpha - 2(-1) = 5 \Rightarrow \alpha = 3$. Verifichiamo la seconda componente: $2\alpha + a\beta = 2(3) + a(-1) = 6 - a$, che coincide esattamente con $-a + 6$, **per ogni valore di a** . Quindi

$$\underline{v}_3 = 3\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{Q},$$

e dunque $V = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. Poiché $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ non sono proporzionali (la terza componente di $\underline{v}_1$ è 0 mentre quella di $\underline{v}_2$ è -1), si ha $\dim V = 2$ per ogni a .

Passo 2: dimensione di W Studiamo prima $\underline{w}_1, \underline{w}_2$: sono proporzionali se e solo se esiste k con $\underline{w}_2 = k\underline{w}_1$, cioè $a = 3k$, $1 = k$, $3 = ak$; da $k = 1$ segue $a = 3$ e $3 = a$, condizioni compatibili solo per $a = 3$ (nel qual caso $\underline{w}_1 = \underline{w}_2 = (3, 1, 3)$). Quindi per $a \neq 3$, $\underline{w}_1, \underline{w}_2$ sono indipendenti.

Verifichiamo, per $a \neq 3$, se $\underline{w}_3 \in \text{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$, cercando p, q con $p\underline{w}_1 + q\underline{w}_2 = \underline{w}_3$:

$$(3p + aq, p + q, ap + 3q) = (4, -a + 4, 1).$$

Dalla seconda equazione $p = -a + 4 - q$. Sostituendo nella prima:

$$3(-a + 4 - q) + aq = 4 \implies -3a + 12 - 3q + aq = 4 \implies q(a - 3) = 3a - 8 \implies q = \frac{3a - 8}{a - 3} \quad (a \neq 3).$$

Sostituendo nella terza:

$$\begin{aligned} a(-a + 4 - q) + 3q &= 1 \implies -a^2 + 4a - aq + 3q = 1 \\ &\implies q(3 - a) = a^2 - 4a + 1 \\ &\implies q = \frac{a^2 - 4a + 1}{3 - a} = -\frac{a^2 - 4a + 1}{a - 3} \end{aligned}$$

Uguagliando le due espressioni di q (stesso denominatore $a - 3 \neq 0$):

$$3a - 8 = -(a^2 - 4a + 1) \implies a^2 - a - 7 = 0 \implies a = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Queste sono le uniche eventuali soluzioni per cui $\underline{w}_3 \in \text{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$, ma **non sono numeri razionali** (il discriminante 29 non è un quadrato perfetto). Quindi, per ogni $a \in \mathbb{Q}$ con $a \neq 3$, $\underline{w}_3 \notin \text{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2)$, e dunque $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ è una base di $\mathbb{Q}^3$: $W = \mathbb{Q}^3$, $\dim W = 3$.

Per $a = 3$: $\underline{w}_1 = \underline{w}_2 = (3, 1, 3)$ e $\underline{w}_3 = (4, 1, 1)$, che non è multiplo di $\underline{w}_1$; quindi $W = \text{Span}((3, 1, 3), (4, 1, 1))$, con $\dim W = 2$.

Passo 3: calcolo di $V \cap W$

- Caso $a \neq 3$. Qui $W = \mathbb{Q}^3$, quindi $V \cap W = V$. Una base di $V \cap W$ è $\{(1, 2, 0), (-2, a, -1)\}$.
- Caso $a = 3$. Qui

$$V = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \text{Span}((1, 2, 0), (-2, 3, -1))$$

e

$$W = \text{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_3) = \text{Span}((3, 1, 3), (4, 1, 1))$$

N.B. Potremmo costruire la solita matrice, ridurla con Gauss e procedere col metodo standard. Vediamo un metodo leggermente diverso.

Cerchiamo i vettori comuni: sia $s\underline{v}_1 + t\underline{v}_2 = p\underline{w}_1 + q\underline{w}_3$, cioè

$$(s - 2t, 2s + 3t, -t) = (3p + 4q, p + q, 3p + q).$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} s - 2t = 3p + 4q \\ 2s + 3t = p + q \\ -t = 3p + q \end{cases}$$

Dalla terza: $t = -3p - q$. Sostituendo nella prima:

$$s - 2(-3p - q) = 3p + 4q \implies s + 6p + 2q = 3p + 4q \implies s = -3p + 2q.$$

Sostituendo s, t nella seconda:

$$\begin{aligned} 2(-3p + 2q) + 3(-3p - q) &= p + q \implies -6p + 4q - 9p - 3q = p + q \\ &\implies -15p + q = p + q \\ &\implies -16p = 0 \\ &\implies p = 0. \end{aligned}$$

Quindi $p = 0$, e allora $s = 2q$, $t = -q$, con q libero. Ponendo $q = 1$ otteniamo il vettore (dal lato W):

$$p\underline{w}_1 + q\underline{w}_3 = 0 \cdot (3, 1, 3) + 1 \cdot (4, 1, 1) = (4, 1, 1),$$

e verifichiamo dal lato V : $2\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = 2(1, 2, 0) - (-2, 3, -1) = (4, 1, 1)$. Coerente.

Quindi, per $a = 3$,

$$V \cap W = \text{Span}((4, 1, 1)), \quad \dim(V \cap W) = 1,$$

con base $(4, 1, 1)$.

In conclusione,

- se $a \neq 3$: base di $V \cap W = (1, 2, 0), (-2, a, -1)$.
- Se $a = 3$: base di $V \cap W = (4, 1, 1)$.

□

Esercizio 2 (8pt). Dato il morfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfa le condizioni

$$T((1, 0, 2)) = (0, 1, 1) \quad T((0, 1, 1)) = (2, 0, 4) \quad T((1, 0, 1)) = (4, 2, 10)$$

ed un sottospazio $V = \text{Span}((1, 1, 1), (1, 0, 0)) \subseteq_{SSP} \mathbb{R}^3$

1. Dimostrare che $W = \{T(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

2. Trovare una base di W .

Soluzione.

osservazione chiave.

Poniamo i vettori $\underline{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\underline{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\underline{v}_3 = (1, 0, 1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$, poiché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) - 0 + 1 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = 1 - 2 = -1 \neq 0.$$

Allora

$$T(\underline{v}_1) = (0, 1, 1) = \underline{v}_2, \quad T(\underline{v}_2) = (2, 0, 4) = 2\underline{v}_1, \quad T(\underline{v}_3) = (4, 2, 10).$$

Le prime due relazioni ci permettono di calcolare T su ogni combinazione di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ *senza mai invertire matrici*: ci basta decomporre i generatori di V nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ e applicare la linearità.

Passo 1: decomposizione dei generatori di V nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$

Sia $\underline{w}_2 = (1, 0, 0)$. Cerchiamo α, β, γ con $\underline{w}_2 = \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 + \gamma\underline{v}_3$:

$$\alpha(1, 0, 2) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 0, 1) = (\alpha + \gamma, \beta, 2\alpha + \beta + \gamma) = (1, 0, 0).$$

Dalla seconda componente, $\beta = 0$ (comodo: tra $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ solo $\underline{v}_2$ ha componente y non nulla, quindi il coefficiente β è sempre uguale alla componente y del vettore da decomporre). Restano

$$\alpha + \gamma = 1, \quad 2\alpha + \gamma = 0,$$

da cui, sottraendo, $\alpha = -1$ e quindi $\gamma = 2$. Dunque

$$\underline{w}_2 = (1, 0, 0) = -\underline{v}_1 + 2\underline{v}_3.$$

Per $\underline{w}_1 = (1, 1, 1)$, notiamo subito che

$$\underline{w}_1 - \underline{w}_2 = (1, 1, 1) - (1, 0, 0) = (0, 1, 1) = \underline{v}_2,$$

quindi $\underline{w}_1 = \underline{w}_2 + \underline{v}_2 = -\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + 2\underline{v}_3$ (nessun altro calcolo necessario).

Passo 2: applicazione di T

Sfruttiamo $T(\underline{v}_1) = \underline{v}_2$, $T(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_1$. Per linearità,

$$T(\underline{w}_2) = T(-\underline{v}_1 + 2\underline{v}_3) = -T(\underline{v}_1) + 2T(\underline{v}_3) = -\underline{v}_2 + 2(4, 2, 10) = -(0, 1, 1) + (8, 4, 20) = (8, 3, 19).$$

E, usando $\underline{w}_1 = \underline{w}_2 + \underline{v}_2$ e ancora la linearità,

$$T(\underline{w}_1) = T(\underline{w}_2) + T(\underline{v}_2) = (8, 3, 19) + 2\underline{v}_1 = (8, 3, 19) + 2(1, 0, 2) = (8, 3, 19) + (2, 0, 4) = (10, 3, 23).$$

Si noti come la relazione $T(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_1$ abbia permesso di ottenere $T(\underline{w}_1)$ direttamente da $T(\underline{w}_2)$, sommando semplicemente $2\underline{v}_1$, senza ricalcolare da capo la decomposizione di $\underline{w}_1$ né costruire la matrice di T rispetto alla base canonica.

1. $W = \{T(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V\}$ è un sottospazio. Potremmo anche dire direttamente che l'immagine di un sottospazio è un sottospazio, ma dimostriamolo esplicitamente.

Il sottospazio $V = \text{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2) = \text{Span}((1, 1, 1), (1, 0, 0))$ è costituito da tutti i vettori della forma $\underline{v} = \alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_2$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Per la linearità di T ,

$$T(\underline{v}) = T(\alpha\underline{w}_1 + \beta\underline{w}_2) = \alpha T(\underline{w}_1) + \beta T(\underline{w}_2).$$

Quindi

$$W = \{T(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V\} = \{\alpha T(\underline{w}_1) + \beta T(\underline{w}_2) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \text{Span}(T(\underline{w}_1), T(\underline{w}_2)).$$

Ma lo Span di un insieme (finito) di vettori è sempre un sottospazio vettoriale (è chiuso per combinazioni lineari per definizione). Quindi W , essendo uno Span, è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

2. Punto 2: base di W . Dal Passo 2 abbiamo già

$$T(\underline{w}_2) = (8, 3, 19), \quad T(\underline{w}_1) = (10, 3, 23),$$

quindi $W = \text{Span}((8, 3, 19), (10, 3, 23))$. Dato che i due vettori sono chiaramente linearmente indipendenti (non sono proporzionali), formano una base di W .

In conclusione,

1. $W = \{T(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
2. $B = (8, 3, 19), (10, 3, 23)$ è una base di W .

□

Esercizio 3 (5pt). Dato il morfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

1. Determinare il polinomio minimo di T .

2. Dire se T è diagonalizzabile.

Soluzione. Poniamo $M = (M_T)_{E_3}^{E_3}$. Calcoliamo il polinomio minimo, per esercizio senza passare dal polinomio caratteristico.

Il polinomio minimo non può essere lineare perché M non è diagonale. Vediamo se esiste un polinomio monico di secondo grado annullato da M . Sul polinomio generico $p(x) = x^2 + ax + b$, con a, b incognite, imponiamo la condizione

$$\begin{aligned} p(M) = 0 &\Leftrightarrow M^2 + aM + bI_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}^2 + a \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} + \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} + \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si vede, dopo qualche calcolo, che una soluzione unica del sistema nelle incognite a, b è $a = -(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, $b = \sqrt{6}$. Quindi il polinomio minimo è

$$PM_T(\lambda) = \lambda^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})\lambda + \sqrt{6}$$

Consideriamo il polinomio minimo. Dato che $\Delta = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 4\sqrt{6} = 5 - 2\sqrt{6} \geq 0$ il polinomio minimo di T ha due radici distinte in $\mathbb{R}$. Per il criterio di diagonalizzabilità con polinomio minimo, T è quindi diagonalizzabile.

In conclusione

1. $PM(\lambda)_T = \lambda^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})\lambda + \sqrt{6}$.

2. T è diagonalizzabile.

□