

Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2025/26

Caboara

Esame scritto - Quarto appello 15 giugno

PRIMA PARTE

Punteggio: risposta corretta = 2 pt

**SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE
SU QUESTO FOGLIO**

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome:	Nome:	Matricola:	Corso:
-----------------	--------------	-------------------	---------------

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $z^6 - z^3 - 6 = 0$.

Soluzione. Dato che $z^6 - z^3 - 2 = (z^3 - 3)(z^3 + 2)$

$$\begin{aligned} z_1 &= -\sqrt[3]{2} & z_4 &= \sqrt[3]{3}, \\ z_2 &= \sqrt[3]{2} e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), & z_5 &= \sqrt[3]{3} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{3} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ z_3 &= \sqrt[3]{2} e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right), & z_6 &= \sqrt[3]{3} e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[3]{3} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

□

2. Determinare quando esiste al variare di $a \in \mathbb{R}$ e calcolare quando possibile l'inversa della

matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione. L'inversa esiste se e solo se $a \neq 0$, e

$$A^{-1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & -a & a^2 \\ -1 & 1 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

□

3. Il polinomio $p(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x +$ ha radici multiple? Se sì, quali?

Soluzione. $p(x)$ ha un'unica radice multipla, $x = 1$ (con molteplicità 2). □

4. Determinare una descrizione cartesiana del sottospazio

$$V = \text{Span}((1, 2, 1, 3), (1, 0, 1, 1), (1, 3, 1, 4))$$

Soluzione.

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x_3 - x_1 = 0 \\ x_4 - x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

□

5. Determinare un morfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ che abbia le seguenti caratteristiche

$$T(\underline{e}_1) = \underline{e}_3 \quad \dim \ker T = 3 \quad \text{esiste un autovalore di molteplicità algebrica almeno 2}$$

Soluzione. Per esempio, il morfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt). *Discutere al variare di $k \in \mathbb{Q}$ le soluzioni del sistema con tre incognite con matrice completa*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & k \\ k & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Riduciamo per righe la matrice completa. Poniamo $R_2 \leftarrow R_2 - kR_1$ e $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & k \\ 0 & -3k & 1-k & 1-k^2 \\ 0 & -1 & k-1 & 3-k \end{pmatrix}$$

Notiamo che $1 - k^2 = (1 - k)(1 + k)$. Scambiamo $R_2 \leftrightarrow R_3$ (per comodità):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & k \\ 0 & -1 & k-1 & 3-k \\ 0 & -3k & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \leftarrow R_3 - 3k \cdot R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & k \\ 0 & -1 & k-1 & 3-k \\ 0 & 0 & 1-k-3k(k-1) & 1-k^2-3k(3-k) \end{pmatrix}$$

Semplifichiamo la terza riga:

$$1 - k - 3k(k - 1) = 1 - k - 3k^2 + 3k = 1 + 2k - 3k^2 = -(3k^2 - 2k - 1) = -(3k + 1)(k - 1),$$

$$1 - k^2 - 3k(3 - k) = 1 - k^2 - 9k + 3k^2 = 2k^2 - 9k + 1.$$

La matrice ridotta è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & k \\ 0 & -1 & k-1 & 3-k \\ 0 & 0 & -(3k+1)(k-1) & 2k^2-9k+1 \end{pmatrix}$$

Caso $k = 1$: Il pivot in posizione $(3, 3)$ vale 0. La terza riga della matrice completa diventa $(0, 0, 0, 2 - 9 + 1) = (0, 0, 0, -6)$. Poiché il termine noto è $-6 \neq 0$, il sistema è **impossibile**.

Caso $k = -\frac{1}{3}$: Il pivot in posizione $(3, 3)$ vale 0. Calcoliamo il termine noto: $2 \cdot \frac{1}{9} + 3 + 1 = \frac{2}{9} + 4 = \frac{38}{9} \neq 0$. Anche in questo caso il sistema è **impossibile**.

Caso $k \neq 1$ e $k \neq -\frac{1}{3}$: Il rango della matrice dei coefficienti è 3 uguale al rango della matrice completa, quindi il sistema è **compatibile con soluzione unica**.

Riepilogo:

- $k = 1$: sistema impossibile.
- $k = -\frac{1}{3}$: sistema impossibile.
- $k \neq 1, k \neq -\frac{1}{3}$: sistema con **unica soluzione**.

□

Esercizio 2 (8pt). *Determinare i morfismi $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ che, al variare di $a \in \mathbb{C}$, soddisfano le condizioni*

$$T((a, 3)) = (1, 1) \quad T((a, 1)) = (a, a)$$

Discutere la diagonalizzabilità di tali morfismi.

Soluzione.

Controlliamo quando i due vettori $(a, 3)$ e $(a, 1)$ formano una base di $\mathbb{R}^2$, ovvero quando sono linearmente indipendenti, ovvero quando la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ è non singolare, ovvero quando $\det A = -2a \neq 0$. Discutiamo i due casi

- $a = 0$. Abbiamo

$$T((0, 3)) = T(0, 3) = (1, 1) \quad \text{e} \quad T(0, 1) = (a, a) = (0, 0)$$

ma

$$T((0, 3)) = 3T((0, 1)) = (0, 0) \neq (1, 1)$$

Abbiamo quindi una contraddizione e $a = 0$ non è ammissibile.

- Se $a \neq 0$, troviamo le immagini di e_1 ed e_2 secondo T per costruire la matrice $(M_T)_{E_2}^{E_2}$. Sottraiamo le due condizioni (usando la linearità):

$$T((a, 3)) - T((a, 1)) = T((0, 2)) = (1, 1) - (a, a) = (1 - a, 1 - a).$$

$$\text{Quindi } T((0, 2)) = (1 - a, 1 - a), \text{ da cui } T((0, 1)) = \left(\frac{1 - a}{2}, \frac{1 - a}{2} \right).$$

Dalla prima condizione:

$$T((a, 3)) = T((a, 0)) + 3T((0, 1)) = T((a, 0)) + \frac{3(1 - a)}{2}(1, 1) = (1, 1).$$

$$\text{Quindi } T((a, 0)) = \left(1 - \frac{3(1 - a)}{2}, 1 - \frac{3(1 - a)}{2} \right) = \left(\frac{2 - 3 + 3a}{2}, \frac{2 - 3 + 3a}{2} \right) = \frac{3a - 1}{2}(1, 1).$$

$$\text{Dato che } a \neq 0: T((1, 0)) = \frac{3a - 1}{2a}(1, 1).$$

Dalla seconda condizione $T((a, 1)) = (a, a)$:

$$T((a, 0)) + T((0, 1)) = (a, a),$$

$$\frac{3a - 1}{2}(1, 1) + \frac{1 - a}{2}(1, 1) = \frac{3a - 1 + 1 - a}{2}(1, 1) = \frac{2a}{2}(1, 1) = a(1, 1).$$

Questo vale $(a, a) \checkmark$ per ogni a . Dunque le due condizioni sono compatibili per **ogni** $a \in \mathbb{C}$.

Determiniamo ora la matrice di T . Dalla linearità, per ogni $a \in \mathbb{C}$ abbiamo trovato:

$$T((0, 1)) = \frac{1 - a}{2}(1, 1), \quad T((1, 0)) = \frac{3a - 1}{2a}(1, 1) \quad (\text{ricordiamo } a \neq 0).$$

Quindi $a \neq 0$ e la matrice di T rispetto alla base canonica (colonne = immagini dei vettori base) è:

$$(M_T)_{E_2}^{E_2} = \begin{pmatrix} \frac{3a-1}{2a} & \frac{1-a}{2} \\ \frac{3a-1}{2a} & \frac{1-a}{2} \end{pmatrix}.$$

Vediamo ora la diagonalizzabilità. Il polinomio caratteristico è:

$$p_T(\lambda) = \det \left((M_T)_{E_2}^{E_2} - \lambda I \right) = \lambda^2 - \operatorname{tr} (M_T)_{E_2}^{E_2} \cdot \lambda + \det (M_T)_{E_2}^{E_2}.$$

Dato che le due righe sono uguali, $\det (M_T)_{E_2}^{E_2} = 0$, mentre

$$\operatorname{tr} (M_T)_{E_2}^{E_2} = \frac{3a-1}{2a} + \frac{1-a}{2} = \frac{3a-1}{2a} + \frac{a(1-a)}{2a} = \frac{3a-1+a-a^2}{2a} = \frac{-a^2+4a-1}{2a}.$$

Quindi

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - \frac{-a^2+4a-1}{2a} \lambda = \lambda \left(\lambda - \frac{-a^2+4a-1}{2a} \right)$$

e i due autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \frac{-a^2+4a-1}{2a}$.

- Se $\lambda_2 \neq 0$ (cioè $-a^2+4a-1 \neq 0$, ovvero $a \neq 2 \pm \sqrt{3}$): gli autovalori 0 e λ_2 sono distinti, quindi T è **diagonalizzabile**.
- Se $\lambda_2 = 0$ (cioè $a = 2 \pm \sqrt{3}$): l'unico autovalore è 0 con molteplicità algebrica 2. In tal caso $(M_T)_{E_2}^{E_2} \neq 0$ (poiché $a \neq 0$), quindi $\operatorname{mg}(0) = \dim \ker (M_T)_{E_2}^{E_2} = 1 < 2 = \operatorname{ma}(0)$ e T **non è diagonalizzabile**.

Ricapitolando, esistono morfismi che soddisfano le condizioni se e solo se $a \neq 0$.

- Per $a \neq 2 \pm \sqrt{3}$ i morfismi sono diagonalizzabili.
- Per $a = 2 \pm \sqrt{3}$ non lo sono.

□

Esercizio 3 (8pt). Dato l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ con

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Discutere la diagonalizzabilità di T su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.
2. Determinare almeno un autospazio di T .

Soluzione. **Soluzione**

Passo 1: Calcolo del polinomio caratteristico

La matrice associata a T è:

$$(M_T)_{E_4}^{E_4} = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo $p_T(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 - \lambda & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Sviluppiamo lungo la quarta riga, che ha elementi non nulli in colonna 1 e colonna 4:

$$\det(A - \lambda I) = 1 \cdot (-1)^{4+1} \det(M_{41}) + (1 - \lambda) \cdot (-1)^{4+4} \det(M_{44}),$$

dove M_{41} e M_{44} sono i minori complementari.

Quindi:

$$p(\lambda) = -\det(M_{41}) + (1 - \lambda) \det(M_{44}).$$

Calcolo di $\det(M_{41})$: Eliminando riga 4 e colonna 1:

$$M_{41} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 1 - \lambda & 2 \end{pmatrix}.$$

Sviluppo lungo la prima riga:

$$\begin{aligned} \det(M_{41}) &= 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 - \lambda & 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -1 \cdot [(-\lambda)(2) - (-2)(1)] + 2 \cdot [(-\lambda)(1 - \lambda) - 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -1 \cdot (-2\lambda + 2) + 2 \cdot (-\lambda + \lambda^2) \\
&= 2\lambda - 2 - 2\lambda + 2\lambda^2 \\
&= 2\lambda^2 - 2.
\end{aligned}$$

Calcolo di $\det(M_{44})$: Eliminando riga 4 e colonna 4:

$$M_{44} = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Sviluppo lungo la seconda riga (elemento $-\lambda$ in posizione (2,2)):

$$\begin{aligned}
\det(M_{44}) &= (-\lambda) \cdot (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -\lambda \cdot [(-1-\lambda)(1-\lambda) - (-1)(1)].
\end{aligned}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
(-1-\lambda)(1-\lambda) &= -1 + \lambda - \lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 1. \\
(\lambda^2 - 1) - (-1) &= \lambda^2 - 1 + 1 = \lambda^2.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\det(M_{44}) = -\lambda \cdot \lambda^2 = -\lambda^3.$$

Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= -(2\lambda^2 - 2) + (1-\lambda)(-\lambda^3) \\
&= -2\lambda^2 + 2 - \lambda^3 + \lambda^4 \\
&= \lambda^4 - \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2
\end{aligned}$$

Cerchiamo di fattorizzare il polinomio caratteristico. Vediamo immediatamente che $p_T(1) = 0$, quindi $\lambda - 1$ è un fattore. Usiamolo nella fattorizzazione, scrivendo x al posto di λ per ragioni tecniche.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - x^3 - 2x^2 & + 2 \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ x^3 - 2x - 2 \end{array} \right. \\
\underline{-x^4 + x^3} & \\
-2x^2 & \\
\underline{2x^2 - 2x} & \\
-2x + 2 & \\
\underline{2x - 2} & \\
0 &
\end{array}$$

Quindi

$$p_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^3 - 2\lambda - 2)$$

Vediamo facilmente che $q(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - 2$ non ha radici razionali, dato che $q(\pm 1) \neq 0$ e $q(\pm 2) \neq 0$. Vediamo di trovare il numero di radici reali di $q(\lambda)$ con il metodo di Sturm

Costruzione della successione di Sturm per $q(x)$: Nuovamente, scambiamo λ con x per ragioni tecniche.

$$q_0(x) = q(x) = x^3 - 2x - 2$$

$$q_1(x) = q'(x) = 3x^2 - 2$$

Ora eseguiamo l'algoritmo euclideo prendendo i resti cambiati di segno.

Prima divisione: dividiamo $q_0(x)$ per $q_1(x)$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x - 2 & 3x^2 - 2 \\ -x^3 + \frac{2}{3}x & \frac{1}{3}x \\ \hline -\frac{4}{3}x - 2 & \end{array}$$

Per comodità, moltiplichiamo il resto per $\frac{3}{2}$, possiamo farlo dato che 3 è positivo e cambiamo il segno del risultato ottenendo $q_2(x) = 2x + 3$.

Seconda divisione: dividiamo $q_1(x)$ per $q_2(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 & -2 \\ -3x^2 - \frac{9}{2}x & \frac{2x+3}{\frac{3}{2}x - \frac{9}{4}} \\ \hline -\frac{9}{2}x - 2 & \\ \frac{9}{2}x + \frac{27}{4} & \\ \hline \frac{19}{4} & \end{array}$$

e moltiplicando per il razionale positivo $\frac{4}{19}$ e cambiando segno otteniamo $q_3(x) = -1$.

La sequenza di Sturm è

$$q_0(x) = x^3 - 2x - 2$$

$$q_1(x) = 3x^2 - 2$$

$$q_2(x) = 2x + 3$$

$$q_4(x) = -1$$

Le sequenza dei segni sono $c_+ = (+, +, +, +, -)$ e $c_- = (-, +, -, -)$ e quindi

$$V_+ = 1 \text{ una variazione e } V_- = 2 \text{ due variazioni}$$

Il numero di radici reali è quindi $|2 - 1| = 1$.

Quindi $p_T(\lambda) = (1 - \lambda)q(\lambda)$ ha due radici complesse non reali, e dato che il l'ultimo polinomio della sequenza di Sturm è 1 abbiamo che $\gcd(q(x), q(x)') = 1$ e non ci sono radici multiple. Quindi $p_T(\lambda)$ ha esattamente due radici reali e due complesse, tutte semplici ($q(x)$ non ha 1 come radice).

Diagonalizzabilità

In $\mathbb{C}$ gli autovalori sono 1, α (reale, radice di q), e β e $\bar{\beta}$ (complessi coniugati), tutti distinti. Quindi T è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$. Dato che non tutte le radici sono in $\mathbb{R}$, il morfismo non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Ci è richiesto un autospazio; per semplicità scegliamo quello associato all'autovalore $\lambda = 1$. Sarà di dimensione uno, dato che $\text{ma}(1) = 1 \Rightarrow \text{mg}(1) = 1$.

Per trovare le condizioni di appartenenza di $\underline{v} = (x, y, z, t)$ a V_1 risolviamo il sistema

$$(A - I_4) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2x & 0 & 1z & 2t \\ 0 & -y & 0 & -2t \\ -x & y & 0 & 2t \\ x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Si tratta di un sistema semplice, risolviamo direttamente con opportune sostituzioni:

Dalla quarta riga: $x = 0$.

Dalla seconda riga: $-y - 2t = 0 \Rightarrow y = -2t$.

Dalla prima riga: $z + 2t = 0 \Rightarrow z = -2t$.

Verifichiamo che la terza riga è soddisfatta ($-2t + 2t = 0$).

Quindi:

$$\underline{v} = (0, -2t, -2t, t) = t(0, -2, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'autospazio $V_1 = \text{Span}(0, -2, -2, 1)$ ha come previsto dimensione 1.

Ricapitoliamo: l'endomorfismo T è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ ma non su $\mathbb{R}$, ha autovalore semplice (con $\text{ma} = 1$) $\lambda_1 = 1$ e l'autospazio associato è

$$V_1 = \text{Span}(0, -2, -2, 1)$$

□