

Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2025/26

Caboara

Esame scritto - Terzo appello 23 Febbraio

PRIMA PARTE

Punteggio: risposta corretta = 2 pt

**SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE
SU QUESTO FOGLIO**

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome:

Nome:

Matricola:

Corso:

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $2e^z = -e^{\bar{z}}e^{i(\operatorname{Im} z)^6}$

Soluzione. $\emptyset$

□

2. Data $A = \begin{pmatrix} a^3 + 3 & 0 & a - b & a^2 + b^2 \\ ab - 1 & 2 & a^2 - b^2 & a^3 + b \end{pmatrix}$ determinare $rk A$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione. $rk A = 2$

□

3. Dire quando, al variare di $a \in \mathbb{R}$ la somma

$$\operatorname{Span}((0, 3, 0, 7), (0, \pi, 0, 1)) + \operatorname{Span}((1, 0, 0, a), (2, 0, 5, 2a)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$$

è diretta

Soluzione. $\forall a \in \mathbb{R}$

□

4. Determinare gli $a, b \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $(a - b, a^2 - 5, a - b, \sqrt{2})$ appartenga allo spazio vettoriale $\operatorname{Span}((0, 3, 0, 7), (0, \pi, 0, 1))$

Soluzione. $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = b\}$

□

5. Determinare il polinomio minimo dell'endomorfismo associato dalle basi canoniche alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. $PM_T(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$

□

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (6pt). *Discutere al variare di $k \in \mathbb{C}$ le soluzioni del sistema con tre incognite con matrice completa*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & k & k \\ 3 & k & 0 & 1 \\ 2 & 1 & k+1 & k \end{array} \right)$$

Soluzione. Use $R := \mathbb{Q}[k]$;

```
M:=Mat([[ 1, -k,  k,k],
        [ 3,  k,  0,1],
        [ 2,  1, 1+k,k]]);
```

```
L:=RiduciScalaVerbose(M);
```

Ho trovato il pivot in posizione $A[1, 1]=1$

Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot ottenendo la matrice A

```
----- [1, -k, k, k]
      2^a-(3)*1^a [0, 4k, -3k, -3k + 1]
      3^a-(2)*1^a [0, 2k + 1, -k + 1, -k]
```

Ho trovato il pivot in posizione $A[2, 2]=4k$

Procedo supponendo k diverso da 0, tratto a parte il caso $k=0$

Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot ottengo la matrice B

```
----- [1, -k, k, k]
----- [0, 4k, -3k, -3k + 1]
3^a-((1/2k + 1/4)/k)*2^a [0, 0, 1/2k + 7/4, (1/2k^2 + 1/4k - 1/4)/k]
```

Abbiamo quindi i tre casi

- $k \neq 0, -\frac{7}{2}$: la matrice incompleta ha tre pivot, quindi ha rango massimo uguale al numero di indeterminate, e per il Teorema di Rouché-Capelli abbiamo un'unica soluzione.
- $k = -\frac{7}{2}$: la matrice incompleta ha due pivot, e la matrice completa, ottenuta in questo caso sostituendo $k = \frac{7}{2}$ nella matrice B

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 7/2 & -7/2 & -7/2 \\ 0 & -14 & 21/2 & 23/2 \\ 0 & 0 & 0 & -10/7 \end{array} \right)$$

ha tre pivot. Non esistono quindi soluzioni.

- $k = 0$: la matrice associata al sistema, ottenuta sostituendo $k = 0$ nella matrice A, è

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Chiaramente il rango dell'incompleta è due, il rango della completa è tre e non esistono quindi soluzioni.

Ricapitolando, esiste un'unica soluzione del sistema se e solo se $k \neq 0, -\frac{7}{2}$.

□

Esercizio 2 (8pt). *Determinare i morfismi $T: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ tali che, al variare di $a \in \mathbb{C}$*

1. $(1, 2, 3, 4), (3, 3, 4, 5), (2a - 3, 4a - 3, 6a - 4, 8a - 5), (7, 5, 6, 7) \in \ker T$.
2. $(1, 1, 2, 3), (2, 0, 4, a), (4, -2, 8, a - 1), (1, 3, 2, 9 - a) \in \operatorname{Im} T$.

Per tali morfismi, discutere la diagonalizzabilità.

Soluzione.

- Esaminiamo $\ker T$. Controlliamo quali tra i vettori espressi nelle condizioni sul $\ker$ sono linearmente indipendenti

```
M:=Mat([ [1,2,3,4],
          [3,3,4,5],
          [2a - 3, 4a - 3, 6a - 4, 8a - 5],
          [7, 5, 6, 7] ]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 4]
      2^a-(3)*1^a [0, -3, -5, -7]
3^a-(2a - 3)*1^a [0, 3, 5, 7]
      4^a-(7)*1^a [0, -9, -15, -21]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 2, 3, 4]
----- [0, -3, -5, -7]
      3^a-(-1)*2^a [0, 0, 0, 0]
      4^a-(3)*2^a [0, 0, 0, 0]
```

I prime due vettori sono quindi linearmente indipendenti, il terzo ed il quarto sono, $\forall a \in \mathbb{C}$, combinazioni lineari dei primi due. Quindi $\dim \ker T \geq 2$.

- Esaminiamo $\operatorname{Im} T$. Per il teorema della dimensione, $\dim \ker T \leq 2$. Dato che i primi due vettori delle condizioni sono linearmente indipendenti, dobbiamo avere che il terzo ed il quarto vettore siano combinazione lineare dei primi due. Controlliamo quali tra i vettori espressi nelle condizioni sull' immagine sono linearmente indipendenti

```
M:=Mat([ [1,1,2,3],
          [2,0,4,a],
          [4, -2, 8, a-1],
          [1, 3, 2, 9-a] ]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 2, 3]
```

```

2~a-(2)*1~a [0, -2, 0, a - 6]
3~a-(4)*1~a [0, -6, 0, a - 13]
4~a-(1)*1~a [0, 2, 0, -a + 6]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-2
Cancello la 2~a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 2, 3]
----- [0, -2, 0, a - 6]
      3~a-(3)*2~a [0, 0, 0, -2a + 5]
      4~a-(-1)*2~a [0, 0, 0, 0]

```

Dato che $\dim \operatorname{Im} T \leq 2$, siamo forzati ad avere al più due vettori lindipendenti (i primi due), e quindi ad avere $-2a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$.

Abbiamo quindi che $a = \frac{5}{2}$ e, prendendo i vettori riga dopo la riduzione di Gauss, cambiando i segni ai secondi vettori e moltiplicando via la frazione

$$\begin{aligned}\ker T &= \operatorname{Span}((1, 2, 3, 4), (0, 3, 5, 7)) \\ \operatorname{Im} T &= \operatorname{Span}((1, 1, 2, 3), (0, 4, 0, 7))\end{aligned}$$

Estendiamo i generatori di $\ker T$ a base di $\mathbb{C}^4$ con $\underline{e}_3, \underline{e}_4$, ottenendo la base

$$B = (1, 2, 3, 4), (0, 3, 5, 7), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$$

E su questa base esprimiamo il morfismo

$$\begin{array}{llll} T: & \mathbb{C}^4 & \rightarrow & \mathbb{C}^4 \\ & (1, 2, 3, 4) & \mapsto & \underline{0} \\ & (0, 3, 5, 7) & \mapsto & \underline{0} \\ & \underline{e}_3 & \mapsto & (1, 1, 2, 3) \\ & \underline{e}_4 & \mapsto & (0, 4, 0, 7) \end{array} \quad \text{con} \quad (M_T)_{E_4}^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Per determinare il poynomialo caratteristico, scegliamo di esprimere il morfismo in base B , dato che in abbiamo che 0 è un autovettore di molteplicità algebrica 2, e la matrice avrà le prime due colonne nulle.

$$(M_T)_B^B = M_B^{E_4} \cdot (M_T)_{E_4}^B = (M_{E_4}^B)^{-1} \cdot (M_T)_{E_4}^B$$

Per calcolare l'inversa di $M_{E_4}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ invece di usare il procedimento standard,

per semplificare i calcoli, notiamo che siamo in una forma a blocchi molto particolare. Per trovare l'inversa $X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$, dobbiamo risolvere l'equazione matriciale

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & I_2 \end{array} \right)$$

Da cui risultano, per le regole del prodotto delle matrici a blocchi,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot A &= I_2 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot B &= 0 \Leftrightarrow B = 0 \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot A + I_2 \cdot C &= 0 \Leftrightarrow C = - \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot B + I_2 \cdot D &= I_2 \Leftrightarrow D = I_2 = \frac{1}{3} \cdot 3 I_2\end{aligned}$$

da cui abbiamo

$$M_{E_4}^B = \frac{1}{3} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -5 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

e quindi

$$\begin{aligned}(M_T)_B^B &= (M_B^{E_4}) (M_T)_{E_4}^B \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -20 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Calcoliamo

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & -20 \\ 0 & 0 & 4 & -7-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2((-2-\lambda)(-7-\lambda) - 40) = \lambda^2(\lambda^2 + 9\lambda - 26)$$

e dato che il discriminante $\Delta = 81 - 26 \cdot 4 = -23$ dell'equazione $\lambda^2 + 9\lambda - 26 = 0$ è non nullo, abbiamo tre autovalori distinti, due di molteplicità algebrica 1 ed uno, 0, di molteplicità algebrica 2. Dato che la molteplicità geometrica di 0 è la dimensione di V_0 , che è la dimensione del ker, ovvero 2, abbiamo che T è diagonalizzabile.

Ricapitolando, abbiamo che esiste un solo morfismo che soddisfa le condizioni se e solo se $a = \frac{5}{2}$, e questo morfismo,

$$\begin{array}{rcl}
 T: & \mathbb{C}^4 & \rightarrow \mathbb{C}^4 \\
 & (1, 2, 3, 4) & \mapsto \underline{0} \\
 & (0, 3, 5, 7) & \mapsto \underline{0} \\
 & \underline{e}_3 & \mapsto (1, 1, 2, 3) \\
 & \underline{e}_4 & \mapsto (0, 4, 0, 7)
 \end{array}$$

è diagonalizzabile.

□

Esercizio 3 (8pt). Dato l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$(M_T)_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Discutere la diagonalizzabilità di T .
2. Determinare una base B di $\mathbb{R}^3$ che contenga due autovettori.
3. Per $k \in \mathbb{N}$ trovare le soluzioni di

$$\left((M_T)_B^B\right)^k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione. È immediato che $p_T(\lambda) = (1 - \lambda)^2(3 - \lambda)$. Gli autovalori sono $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 3$ con molteplicità algebrica rispettivamente 2 ed 1. Determiniamo le basi degli autospazi:

- Base di V_{λ_0} . Risolviamo

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{\lambda=1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Un vettore generico delle soluzioni, e quindi di V_{λ_0} è $(x, 0, 0)$, una base $\underline{e}_1$ e dato che $\text{mg}(\lambda_0) = 1 \neq \text{ma}(\lambda_0) = 2$ notiamo che l'endomorfismo non è diagonalizzabile.

- Base di V_{λ_1} . Risolviamo

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\lambda=1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\begin{cases} -2x + y + 2z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/2y \\ z = 2y \end{cases}$$

Un vettore generico delle soluzioni, e quindi di V_{λ_1} è $(5/2y, y, 2y)$, una base $(5, 2, 4)$.

Per ottenere una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga due autovettori basta completare l'unione delle basi di V_{λ_0} , V_{λ_1} a base di $\mathbb{R}^3$. È immediato che

$$B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 = \underline{e}_1, (5, 2, 4), \underline{e}_3$$

è una tale base.

Vogliamo risolvere al variare di k il sistema di equazioni

$$\left((M_T)_B^B\right)^k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determiniamo per quanto possibile le colonne della matrice $\left((M_T)_B^B\right)^k$

- Ricordando che $T(\underline{v}_1) = \underline{v}_1$ abbiamo che $T(\underline{v}_1))^k = \underline{v}_1 = (1, 0, 0)_B$ è la prima colonna della matrice.
- Ricordando che $T(\underline{v}_2) = 3\underline{v}_2$ abbiamo che $T(\underline{v}_2))^k = 3^k \underline{v}_2 = (3^k, 0, 0)_B$ è la seconda colonna della matrice.
- Per ora scegliamo di non esplicitare $T(\underline{v}_3))^k$, lasciamo quindi la terza colonna della matrice generica $(a, b, c)_B$

Abbiamo evitato di esplicitare completamente sia $(M_T)_B^B$ che $\left((M_T)_B^B\right)^k$. Il sistema è quindi

$$\left((M_T)_B^B\right)^k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3^k & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3^k y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Da cui si ha che esiste soluzione, unica, se e solo se $k = 1$ ed è $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{2}{3^k} \end{cases}$ Altri metodi sono possibili, usando per esempio la forma normale di Jordan, o il calcolo esplicito della matrice $(M_T)_B^B$. La scelta di altre basi B può produrre calcoli più complessi, o più semplici.

Ricapitolando,

1. L'endomorfismo T non è diagonalizzabile.
2. La base $B = \underline{e}_1, (5, 2, 4), \underline{e}_3$ di $\mathbb{R}^3$ contiene due autovettori di T .

3. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ Esiste soluzione unica del sistema $\left((M_T)_B^B\right)^k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

N.B. Volendo, è possibile calcolare esplicitamente $(M_T)_B^B$, e poi, ma i conti possono essere complessi, trovare la formula per $\left((M_T)_B^B\right)^k$. $\square$