Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2025/26

Caboara

Esame scritto - Secondo appello 2 Febbraio

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:** **Matricola:** **Corso:**

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $e^{3z-1} = 1 - i$

   Soluzione. $z = \dfrac{\log_e(\sqrt{2}) + 1}{3} + i\dfrac{8k\pi - \pi}{12}$ □

2. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & a & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Determinare a in modo che l'equazione $p_T(\lambda) + \lambda^3 = 0$ abbia non più di una soluzione.

   Soluzione. $a = -5$ □

3. Dare una base di

   $$\mathrm{Span}((0,3,0,7),(0,\pi,0,1),(0,\sqrt{2},0,3)) \cap \mathrm{Span}((1,1,0,3),(2,2,0,115)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$$

   Soluzione. $B = \underline{e}_4$ □

4. Determinare la matrice associata ad un endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ in modo tale che ci sia un autovalore di molteplicità algebrica 2, uno di molteplicità algebrica 1 e che T non sia diagonalizzabile. [*Hint: usare Jordan*]

Soluzione. Per esempio $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ □

5. (1pt)s Determinare gi $a \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $(a, a, 1)$ appartenga allo spazio vettoriale

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ \left\{ x - 2y + z = 0 \right. \right\}$$

Soluzione. $a = 1$ □

6. Determinare il polnomio minimo dell'endormofismo

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x, y, z, t) & \mapsto & (0, 0, x + y, x + y + z) \end{array}$$

Soluzione. $PM_T(\lambda) = \lambda^3$ □

Alcune regole pratiche sullo scritto

- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi il primo testo con nome e cognome.
- Va consegnato anche il secondo testo, senza nome e cognome.
- Dopo l'inizio dello scritto, non sarà possibile andare in bagno per due ore. Dopo, solo consegnandomi il cellulare ed il compito. Andateci immediatamente prima che si inizi. Ovvero, ADESSO.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono amessi in aula cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi (ovviamente!)
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate tranne che per il secondo testo. A parte che sul testo, possibilmente in alto a destra.
- NON CONSEGNATE LA BRUTTA. Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno forti penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete. Scrivete nome e cognome in STAMPATELLO.

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (7pt)**.** *Dati* $a, b, c, k \in \mathbb{C}$ *ed i sotto spazi vettoriali di* $\mathbb{C}^3$

$$V = \mathrm{Span}((a+b-c, a-b, -2a+c), (a+b, a+c, a+b)) \quad e \quad W = \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+ky=0 \end{cases}$$

discutere al variare di k *l'esistenza di* a, b, c *non tutti nulli per cui per cui si abbia* $V \underset{SSP}{\subseteq} W$.

Soluzione. Basta verificare per quali a, b, c, k i due vettori soddisfano le condizioni di appartenenza a W, ovvero sostituire le componenti dei vettori nelle equazioni che definiscono W. Dato che cerchiamo i valori di a, b, c, queste sono incognite, mentre k, dato ma che non conosciamo, è parametro. Otteniamo

$$\begin{cases} (a+b-c)+(a-b)+(-2a+c)=0 & \text{primo vett., prima eq.} \\ (a+b)+(a+c)+(a+b)=0 & \text{secondo vett., prima eq.} \\ (a+b-c)+k(a-b)=0 & \text{primo vett., seconda eq.} \\ (a+b)+k(a+c)=0 & \text{secondo vett., seconda eq.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ (1+k)a+(1-k)b-c=0 \\ (1+k)a+b+kc=0 \end{cases}$$

questo è un sistema lineare omogeneo di tre equazioni in tre incognite a, b, c, con parametro k. Ricordiamo che dato che il sistema è omogeneo il rango dell' incompleta è uguale al rango della completa ed esiste sempre almeno la soluzione nulla. Noi stiamo cercando quando esistono anche altre soluzioni. Riduciamo parzialmente con Gauss la matrice associata al sistema (prendiamo le tre variabili nell'ordine c, b, a per comodità).

```
Use R::=Q[k];
M:=Mat([[ 1,   2,   3],
        [-1, 1-k, 1+k],
        [ k,   1, 1+k]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1,       2,       3]
  2^a-(-1)*1^a [0,  -k + 3,   k + 4]
   3^a-(k)*1^a [0, -2k + 1, -2k + 1]
```

Per Rouché Capelli esistono soluzioni non nulle se e solo se il rango dell'incompleta è minore di 3, ovvero se la matrice incompleta è singolare, ovvero se

$$(3-k)(1-2k)-(k+4)(1-2k)=0 \Leftrightarrow ((1-2k)(3-k-k-4)=0 \Leftrightarrow (1-2k)(-1-2k)=0 \Leftrightarrow k=\pm\frac{1}{2}$$

Ricapitolando, esistono a, b, c non nulli per cui $V \underset{SSP}{\subseteq} W$ se e solo se $k = \pm\frac{1}{2}$. □

Esercizio 2 (6pt)**.** *Determinare un morfismo* $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *che soddisfi le seguenti condizioni*

1. $\dim \ker T = 2$.
2. $(1,2,0,1) \in \ker T$.
3. $(1,2,0,1),(1,3,1,1),(0,1,1,0) \in \operatorname{Im} T$.

Per un tale morfismo, determinare una base del ker.

Soluzione. Innanzitutto, mettiamo i tre vettori che devono stare nell' immagine in una matrice, per riga, per verificare se sono linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{un passo di Gauss} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I tre vettori non sono indipendenti, e $(1,2,0,1),(1,3,1,1) \in \operatorname{Im} T \Rightarrow (0,1,1,0) \in \operatorname{Im} T$. Prendiamo i vettori

$$B = \underline{v}_1 = (1,2,0,1), \underline{v}_2 = \underline{e}_1, \underline{v}_3 = \underline{e}_2, \underline{v}_4 = \underline{e}_3$$

che formano una base di $\mathbb{R}^4$ dato che la matrice che li ha per righe

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è non singolare e definiamo il morfismo

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \underline{v}_1 & \mapsto & \underline{0} \\ & \underline{v}_2 & \mapsto & (1,2,0,1) \\ & \underline{v}_3 & \mapsto & (1,3,1,1) \\ & \underline{v}_4 & \mapsto & \underline{0} \end{array}$$

Vediamo che $\dim \operatorname{Im} T = 2 \Rightarrow \dim \ker T = 4-2 = 2$, $(1,2,0,1) \in \ker T$ e $(1,2,0,1),(1,3,1,1),(0,1,1,0) \in \operatorname{Im} T$. Abbiamo anche che

$$(M_T)^B_{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\ker T = \{\underline{x}_B = (x,y,z,t)_B \mid (M_T)^B_B \cdot \underline{x}_B = \underline{0}\}$$
$$\ker T = \{\underline{x}_B = (x,y,z,t)_B \mid M^{E_4}_B \, (M_T)^B_{E_4} \cdot \underline{x}_B = \underline{0}\}$$

e dato che $M_B^{E_4}$, matrice di cambio base, è invertibile

$$\ker T = \{\underline{x}_B = (x, y, z, t)_B \ \mid \ (M_T)_{E_4}^B \cdot \underline{x}_B = \underline{0}\}$$

abbiamo che una base di $\ker T$, espressa in coordinate della base B, è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_B = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni di appartenenza al ker nel vettore generico di $\mathbb{R}^4$ espresso in base B abbiamo

$$(x, y, z, t)_B + \{y = z = 0 \Rightarrow (x, 0, 0, t)_B = x(1, 0, 0, 0)_B + t(0, 0, 0, 1)_B = x\underline{v}_{1B} + t\underline{v}_{4B}$$

Una base in coordinate B è quindi data da

$$\underline{v}_{1B}, \underline{v}_{4B} = (1, 0, 0, 0)_B, (0, 0, 0, 1)_B$$

Volendo la base in coordinate E_4, questa è data da

$$\underline{v}_{1E_4}, \underline{v}_{4E_4} = (1, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$$

Ricapitolando, il morfismo

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \underline{v}_1 & \mapsto & \underline{0} \\ & \underline{v}_2 & \mapsto & (1, 2, 0, 1) \\ & \underline{v}_3 & \mapsto & (1, 3, 1, 1) \\ & \underline{v}_4 & \mapsto & \underline{0} \end{array}$$

soddisfa le condizioni, ed una base del suo ker espressa in coordinate canoniche è $B = (1, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 0)$.
$\square$

Esercizio 3 (8pt)**.** *Dato l' endomorfismo* $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *con*

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Provare che l'endomorfismo* T *è diagonalizzabile.*
2. *Determinare una base* B *di* $\mathbb{R}^3$ *formata da autovettori di* T*.*
3. *Trovare e dimostrare formule per* $\left((M_T)_B^B\right)^k$, $\left((M_T)_{E_3}^{E_3}\right)^k$.
4. *Determinare una base delle soluzioni* $(T^5 - T^3 + 2T)(\underline{v}) = \underline{0}$ *in coordinate* B *e* E_3*.*

Soluzione. Calcoliamo

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - (1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + (1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda-3) \end{aligned}$$

Abbiamo due autovalori, $\lambda_0 = 0$ con $\mathrm{ma}(\lambda_0) = 2$ e $\lambda_1 = 3$ con $\mathrm{ma}(\lambda_1) = 1 = \mathrm{mg}(\lambda_1)$ per ragioni teoriche. Calcoliamo

$$\mathrm{ma}(0) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=0} = 3 - rk \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

L'endomorfismo T è quindi diagonalizzabile e rispetto ad una base B si autovettori

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determiniamo tale B facendo l'unione delle base degli autospazi $V_{\lambda_0}, V_{\lambda_1}$

- Per $V_{\lambda_0} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=0} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

  Da cui la condizione di appartenenza di (x, y, z), vettore generico di $\mathbb{R}^3$, a V_{λ_0} è $x+y+z = 0$, quindi un vettore generico di V_{λ_0} è

$$(-y-z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

  ed una base di V_{λ_0} è $(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)$.

- Per $V_{\lambda_1} = 3$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Riduciamo con Gauss la matrice associata al sistema

```
N:=Mat([[-2, 1, 1],
        [1, -2, 1],
        [1, 1, -2]]);
RiduciScalaVerbose(N);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=-2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [-2, 1, 1]
2^a-(-1/2)*1^a [0, -3/2, 3/2]
3^a-(-1/2)*1^a [0, 3/2, -3/2]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3/2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [-2, 1, 1]
-------------- [0, -3/2, 3/2]
  3^a-(-1)*2^a [0, 0, 0]
```

Da cui le condizioni di appartenenza di (x, y, z), vettore generico di $\mathbb{R}^3$, a V_{λ_1} sono

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

quindi un vettore generico di V_{λ_1} è

$$(z, z, z) = z(1, 1, 1)$$

ed una base di V_{λ_1} è $(1, 1, 1)$.

Quindi una base di autovettori è $B = (-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)$.

Abbiamo

$$\left((M_T)_B^B\right)^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

Per determinare la formula per $\left((M_T)_{E_3}^{E_3}\right)^k$ abbiamo due strade

- Procedere per induzione su k. Vediamo di trovare una candidata formula provando qualche potenza di $(M_T)_{E_3}^{E_3}$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&9&9\\9&9&9\\9&9&9\end{pmatrix}$$

La candidata formula è quindi ${(M_T)_{E_3}^{E_3}}^k = 3^{k-1}\,(M_T)_{E_3}^{E_3}$. Dimostriamola per induzione

Passo base $k=1$: $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^1 = 3^{1-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ OK

Passo induttivo: dimostriamo $\left((M_T)_{E_3}^{E_3}\right)^{k+1} = 3^k\,(M_T)_{E_3}^{E_3}$ dato $\left((M_T)_{E_3}^{E_3}\right)^k = 3^{k-1}\,(M_T)_{E_3}^{E_3}$.

$$\begin{aligned}
{(M_T)_{E_3}^{E_3}}^{k+1} &= {(M_T)_{E_3}^{E_3}}^{k}\cdot (M_T)_{E_3}^{E_3}\\
&= 3^{k-1}\,(M_T)_{E_3}^{E_3}\cdot (M_T)_{E_3}^{E_3}\\
&= 3^{k-1}{(M_T)_{E_3}^{E_3}}^{2}\\
&= 3^{k-1}\cdot 3\,(M_T)_{E_3}^{E_3}\ \text{ quadrato visto precedentemente}\\
&= 3^{k}\,(M_T)_{E_3}^{E_3}
\end{aligned}$$

- Sfruttare la formula $\left((M_T)_B^B\right)^k = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3^k\end{pmatrix}$

Sappiamo che $M_{E_3}^B = \begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$. Calcoliamo la sua inversa

```
M:=Mat([[-1, -1, 1,1,0,0],
        [1, 0, 1,0,1,0],
        [0, 1, 1,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=-1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [-1, -1, 1, 1, 0, 0]
  2^a-(-1)*1^a [0, -1, 2, 1, 1, 0]
  0 sotto pivot[0, 1, 1, 0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [-1, -1, 1, 1, 0, 0]
-------------- [0, -1, 2, 1, 1, 0]
```

```
  3^a-(-1)*2^a [0, 0, 3, 1, 1, 1]
Metto tutti i pivots a 1
     1^a*(-1)  [1, 1, -1, -1, 0, 0]
     2^a*(-1)  [0, 1, -2, -1, -1, 0]
    3^a*(1/3)  [0, 0, 1, 1/3, 1/3, 1/3]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 3 colonna
 1^a-(-1)*3^a  [1, 1, 0, -2/3, 1/3, 1/3]
 2^a-(-2)*3^a  [0, 1, 0, -1/3, -1/3, 2/3]
-------------- [0, 0, 1, 1/3, 1/3, 1/3]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 2 colonna
  1^a-(1)*2^a  [1, 0, 0, -1/3, 2/3, -1/3]
-------------- [0, 1, 0, -1/3, -1/3, 2/3]
-------------- [0, 0, 1, 1/3, 1/3, 1/3]
```

Quindi ${M_{E_3}^B}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Usando la formula di cambio base, abbiamo

$$\begin{aligned}
{(M_T)_{E_3}^{E_3}}^k &= \left(M_{E_3}^B\,(M_T)_B^B\,{M_{E_3}^B}^{-1}\right)^k \\
&= \left(M_{E_3}^B\,(M_T)_B^B\,{M_{E_3}^B}^{-1}\right)\cdot\left(M_{E_3}^B\,(M_T)_B^B\,{M_{E_3}^B}^{-1}\right)\cdots\left(M_{E_3}^B\,(M_T)_B^B\,{M_{E_3}^B}^{-1}\right) \\
&= M_{E_3}^B\left((M_T)_B^B\right)^k {M_{E_3}^B}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 3^{k-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Risolviamo il sistema di equazioni $(T^5-T^3+2T)((x,y,z)_B)=0$ in coordinate B, metteremo poi le soluzioni in coordinare canoniche mediante cambio base dei vettori.

$$\begin{aligned}
(T^5 - T^3 + 2T)((x,y,z)_B) &= \underline{0} \\
\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}^5 - \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}^3 + 2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_B &= \underline{0} \\
\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3^5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3^3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_B &= \underline{0} \\
\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&240\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_B &= \underline{0}
\end{aligned}$$

che ci dà il sistema $z = 0$. Un vettore generico delle soluzioni è chiaramente

$$(x,y,0)_B = x(1,0,0)_B + y(0,1,0)_B = x\underline{v}_{1B} + y\underline{v}_{2B}$$

ed una base delle soluzioni in coordinate B è

$$B_B = (1,0,0)_B, (0,1,0)_B$$

In coordinate E_3 una base delle soluzioni è

$$B_{E_3} = \underline{v}_1, \underline{v}_2 = (-1,1,0), (-1,0,1)$$

.

Avremmo potuto lavorare direttamente in coordinate canoniche, sfruttando il fatto di conoscere la formula per la potenza della matrice, oppure il fatto che, dato che $P_T(\lambda) = -\lambda^2(\lambda-3)$ e che T è diagonalizzabile, il polinomio minimo è

$$PM_T\lambda = \lambda(\lambda-3) = \lambda^2 - 3\lambda$$

da cui $(M_T)_{E_3}^{E_3\,2} = 3\,(M_T)_{E_3}^{E_3}$.

Ricapitolando:

1. Abbiamo provato che T è diagonalizzabile.
2. Una base B di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori è $B = (-1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1)$
3. $(M_T)_B^{B\,k} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3^k\end{pmatrix}$, $(M_T)_{E_3}^{E_3\,k} = 3^{k-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.
4. Una base delle soluzioni di $(T^5 - 27T^3 + 2T)(\underline{v}) = \underline{0}$ in coordinate B è $(1,0,0)_B, (0,1,0)_B$, in coordinate E_3 è $(-1,1,0), (-1,0,1)$.

$\square$