Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2025/26

Caboara

Esame scritto - Primo appello 14 Gennaio

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $e^{z\overline{z}} = e^{z^2}$

   Soluzione. $z \in \mathbb{R}$ □

2. Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ i & 0 & 3 & 0 \\ \pi & e & i & 1 \\ e & 4 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$

   Soluzione. $rk(A) = 4$ □

3. Dare una descrizione cartesiana di $V = \mathrm{Span}((1,0,1,2),(1,0,1,-1),(3,0,3,5)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$

   Soluzione. $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \;\mid\; y = 0,\; x - z = 0\}$ □

4. Determinare il numero di radici reali del polinomio $2x^3 - 6x - 3$.

   Soluzione. 3 □

5. Data la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo associato dalle basi canoniche alla matrice M è diagonalizzabile.

   Soluzione. $a = b = 0$ $\square$

Alcune regole pratiche sullo scritto

- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi il testo con nome e cognome.
- È possibile andare in bagno a partire da due ore dall'inizio dello scritto,consegnandomi il cellulare. Andateci immediatamente prima che si inizi. Ovvero, ADESSO.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono amessi in aula cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi (ovviamente!)
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate. A parte che sul testo, possibilmente in alto a destra.
- NON CONSEGNATE LA BRUTTA. Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno forti penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete.

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt). *Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & k \\ k^2 & k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k-1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Riduciamo con gauss e poi usiamo il Teorema di Rouchè-Capelli.

```
Use R::=Q[k];
N:=Mat([[1,0,1,1],
        [1,k,k,0],
        [k^2,k,1,k-1]]);
RiduciScalaVerbose(N);

Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0, 1, 1]
   2^a-(1)*1^a [0, k, k - 1, -1]
 3^a-(k^2)*1^a [0, k, -k^2 + 1, -k^2 + k - 1]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=k
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0,            1,         1]
-------------- [0, k,        k - 1,        -1]
   3^a-(1)*2^a [0, 0, -k^2 - k + 2, -k^2 + k]
```

Dato che $-k^2 - k + 2 = (k+2)(1-k)$, possiamo riscrivere la matrice come

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & k-1 & -1 \\ 0 & 0 & (k+2)(1-k) & k(1-k) \end{pmatrix}$$

Procediamo col Teorema di Rouchè-Capelli. Il determinante della matrice incompleta è $k(k+2)(1-k)$. Abbiamo i casi

1. $k \neq 0, 1, -2$, il determinante dell' incompleta è non nullo, il rango dell'incompleta è quindi 3 e questo forza il rango della completa ad essere 3. Dato che i due ranghi sono uguali e uguali al numero di variabili, esiste un unica soluzione.

2. $k = 0$. La matrice diviene
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
La matrice incompleta ha rango 2, mentre la completa A ha rango 3, dato che la sottomatrice $A_{(1,3,4);(1,2,3)}$ è non singolare. Il sistema è quindi impossibile.

3. $k = -2$. La matrice diviene
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$
La matrice incompleta ha rango 2, mentre la completa A ha rango 3, dato che la sottomatrice $A_{(1,2,4);(1,2,3)}$ è non singolare. Il sistema è quindi impossibile.

4. $k = 1$. La matrice diviene
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
La matrice incompleta ha rango 2, come la completa (la terza riga è nulla, la sottomatrice $A_{(1,2);(1,2)}$ è non singolare). Abbiamo quindi $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Riassumendo,

1. Se $k \neq 0, 1, -2$ esiste un unica soluzione.
2. Se $k = 1$ esistono ∞^1 soluzioni.
3. Se $k = 0, -2$ il sistema è impossibile.

$\square$

Esercizio 2 (8pt)**.** *Data una funzione* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che*

$$T((1,2,1)) = (5,10,15) \quad T((2,1,2)) = (1,2,3) \quad T((5,2,5)) = (1,2,3)$$

1. *Determinare le* T *che siano morfismi.*

   Per queste,

   (a) *Dire se* T *è isomorfismo.*

   (b) *Scegliere una base* B *di* $\mathbb{R}^3$ *e determinare* $(M_T)_B^B$.

   (c) *Nel caso si abbia anche* $T((0,0,1)_B) = (0,0,1)_B$ *discutere la diagonalizzabilità di* T.

Soluzione. Vediamo se i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,2,1), \quad \underline{v}_2 = (2,1,2), \quad \underline{v}_3 = (5,2,5)$$

formano una base B di $\mathbb{R}^3$, usando l'algpritmo tag-variable per trovare un eventuale dipendenza.

```
M:=Mat([[1, 2, 1,x],
        [2, 1, 2,y],
        [5, 2, 5,z]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1, x]
   2^a-(2)*1^a [0, -3, 0, -2x + y]
   3^a-(5)*1^a [0, -8, 0, -5x + z]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1, x]
-------------- [0, -3, 0, -2x + y]
 3^a-(8/3)*2^a [0, 0, 0, 1/3x - 8/3y + z]
```

abbiamo che i tre vettori non sono linearmente indipendenti, dato che vale la relazione

$$\underline{v}_1 - 8/3\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = 0 \Leftrightarrow \underline{v}_1 - 8\underline{v}_2 + 3\underline{v}_3 = 0 \Leftrightarrow \underline{v}_1 = 8\underline{v}_2 - 3\underline{v}_3$$

Dato che

$$\begin{aligned} T(\underline{v}_1) &= T(8\underline{v}_2 - 3\underline{v}_3) = 8T(\underline{v}_2) - 3T(\underline{v}_3) \\ (1,2,3) &= 8(1,2,3) - 3(1,2,3) \\ (5,10,15) &= 5(1,2,3) \end{aligned}$$

la condizione è superflua e possiamo completare $\underline{v}_2, \underline{v}_3$ a base di $\mathbb{R}^3$, per esempio con $\underline{e}_1$, ottenendo la base

$$B = \underline{v}_2 = (2,1,2), \quad \underline{v}_3 = (5,2,5), \quad \underline{e}_1 = (1,0,0)$$

Dato che non abbiamo condizioni sull'immagine di $\underline{e}_1$ tutti e soli i morfiasmi del tipo

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (2,1,2) & \mapsto & (1,2,3) \\ & (5,2,5) & \mapsto & (1,2,3) \\ & (1,0,0) & \mapsto & (a,b,c) \end{array}$$

soddisfano le condizioni.

1. Nessuno di questi morfismi è un isomorfismo perchè nessuno è iniettivo, dato che $T(2,1,2) = T(5,2,5)$.
2. Dobbiamo determinare la matrice

$$(M_T)_B^B = M_B^{E_3} \cdot (M_T)_{E_3}^B$$

Avendo le matrici $(M_T)_{E_3}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 3 & c \end{pmatrix}$ e $M_B^{E_3} = \left(M_{E_3}^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ Calcoliamo l'inversa di $M_{E_3}^B$ col metodo dell'aggiunta dell'identità

```
Use R::=Q[a,b,c];
M:=Mat([[2, 5,0,1,0,0],
        [1, 2,0,0,1,0],
        [2, 5,1,0,0,1]]);
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 5, 0, 1, 0, 0]
 2^a-(1/2)*1^a [0, -1/2, 0, -1/2, 1, 0]
   3^a-(1)*1^a [0, 0, 1, -1, 0, 1]
Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
    1^a*(1/2)  [1, 5/2, 0, 1/2, 0, 0]
     2^a*(-2)  [0, 1, 0, 1, -2, 0]
-------------- [0, 0, 1, -1, 0, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 3 colonna
-------------- [1, 5/2, 0, 1/2, 0, 0]
-------------- [0, 1, 0, 1, -2, 0]
-------------- [0, 0, 1, -1, 0, 1]
Cancello la colonna sopra il pivot nella 2 colonna
1^a-(5/2)*2^a  [1, 0, 0, -2, 5, 0]
-------------- [0, 1, 0, 1, -2, 0]
-------------- [0, 0, 1, -1, 0, 1]
```

Quindi $\left(M_{E_3}^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 3 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & -2a+5b \\ -3 & -3 & a-2b \\ 2 & 2 & -a+c \end{pmatrix}$$

Imponiamo la condizione

$$\begin{aligned} T((0,0,1)_B) &= (0,0,1)_B \\ (M_T)_B^B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \\ \begin{pmatrix} 8 & 8 & -2a+5b \\ -3 & -3 & a-2b \\ 2 & 2 & -a+c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \\ \begin{pmatrix} -2a+5 \\ a-2b \\ -a+c \end{pmatrix}_B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \\ \begin{cases} -2a+5b=0 \\ a-2b=0 \\ -a+c=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi siamo nell'ipotesi $a=b=c=0$ e $(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calcoliamo

$$p_T(\lambda) = \det (M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 8-\lambda & 8 & 0 \\ -3 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 = \lambda^2(5-\lambda)$$

Abbiamo due autovalori, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$, con $\mathrm{ma}(\lambda_1) = 2$ e $\mathrm{ma}(\lambda_2) = 1$. Dato che $\mathrm{ma}(\lambda_2) = 1$, necessariamente $\mathrm{mg}(\lambda_2) = 1$. Determiniamo

$$\mathrm{mg}(\lambda_1) = 3 - rk \begin{pmatrix} 8-\lambda & 8 & 0 \\ -3 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}_{|\lambda=0} = 3 - rk \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3-1=2$$

E dato che anche $\mathrm{mg}(\lambda_1) = \mathrm{ma}(\lambda_1)$ l'endomorfismo T è diagonalizzabile.

Riassumendo,

1. Le funzioni T che sono morfismi sono associate dalla base $B = (2,1,2),(5,2,5),\underline{e}_1$ alla matrice
$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 8 & 8 & a \\ -3 & -3 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix} \qquad \text{con } a,b,c \in \mathbb{R}$$

   Per queste,

   (a) T non è mai isomorfismo.

   (b) Nel caso si abbia anche $T((0,0,1)_B) = (0,0,1)_B$, abbiamo un unico morfismo T (forzatamente $a = b = c = 0$) associato alla matrice $(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e questo è diagonalizzabile.

$\square$

Esercizio 3 (8pt)**.** *Dato l' endomorfismo* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *con*

$$(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

discutere la diagonalizzabilità di T *al variare di* a*.*

Soluzione. Calcoliamo il polinomio caratteristico sviluppando secondo la prima colonna

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & a \\ 0 & a-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & a-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((a-\lambda)^2 - 4) = (1-\lambda)(a-\lambda+2)(a-\lambda-2)$$

dato che il secondo fattore è una differenza di quadrati. Abbiamo i tre autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = a+2$, $\lambda_3 = a-2$ tutti in $\mathbb{R}$ ma non necessariamente distinti. Discutiamo i vari casi al variare di a.

1. I tre autovalori coincidono.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2 = 1 \\ a-2 = 1 \end{cases} \qquad \text{Impossibile}$$

   Per nuessun a i tre autovalori coindidono.

2. Due soli autovalori coincidono

   (a) $\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow 1 = a+2 \Leftrightarrow a = -1$. Dato che $\mathrm{ma}(\lambda_3) = 1$, abbiamo $\mathrm{mg}(\lambda_3) = 1 = \mathrm{ma}(\lambda_3)$. Vediamo per $\lambda_{1,2} = 1$, per cui abbiamo $\mathrm{ma} = 2$. Calcoliamo

$$\mathrm{mg}(\lambda_{1,2}) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & a \\ 0 & a-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & a-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=1, a=-1} = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$$

   e dato che $\mathrm{mg}(\lambda_{1,2}) \neq \mathrm{ma}(\lambda_{1,2})$ abbiamo che T non è diagonalizzabile.

   (b) $\lambda_1 = \lambda_3 \Leftrightarrow 1 = a-2 \Leftrightarrow a = 3$. Dato che $\mathrm{ma}(\lambda_2) = 1$, abbiamo $\mathrm{mg}(\lambda_2) = 1 = \mathrm{ma}(\lambda_2)$. Vediamo per $\lambda_{1,3} = 1$, per cui abbiamo $\mathrm{ma} = 2$. Calcoliamo

$$\mathrm{mg}(\lambda_{1,3}) = 3 - rk \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & a \\ 0 & a-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & a-\lambda \end{pmatrix}_{\lambda=1, a=3} = 3 - rk \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$$

   e dato che $\mathrm{mg}(\lambda_{1,3}) \neq \mathrm{ma}(\lambda_{1,3})$ abbiamo che T è diagonalizzabile.

   (c) $\lambda_2 = \lambda_3 \Leftrightarrow a+2 = a-2$ Impossibile; per nessun a abbiamo $\lambda_2 = \lambda_3$.

3. I tre autovalori sono distinti, ovvero non siamo in nessuno dei casi precedenti, e quindi $a \neq 1, 3$. Dato che gli autovalori sono in $\mathbb{R}$, l'endomorfismo è diagonalizzabile.

Ricapitolando, T è diagonalizzabile se e solo se $a \neq 1$. □