

Algebra Lineare
Ingegneria Chimica e Civile - A. A. 2025/26

Caboara

Esame scritto - appello straordinario 22 Novembre

PRIMA PARTE

Punteggio: risposta corretta = 2 pt

**SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE
SU QUESTO FOGLIO**

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome:

Nome:

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $e^{\bar{z}+1} = e^{2z}$

Soluzione. $z = 1 + \frac{2k\pi}{3}i \quad k \in \mathbb{Z}$ □

2. Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 2a & i & i+1 & 3 \\ 1 & i & i+1 & 1 \\ a & i & i+2 & 2 \\ 1 & i & i+1 & 5 \end{pmatrix}$

Soluzione. $\begin{cases} a \neq \frac{1}{2} & rk(A) = 4 \\ a = \frac{1}{2} & rk(A) = 3 \end{cases}$ □

3. Dare una descrizione cartesiana dello spazio vettoriale $V = \text{Span}((1, 0, 2, 1), (3, 0, 6, 12)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$

Soluzione. $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid y = 0, 2x - z = 0\}$ □

4. Determinare il numero di radici reali del polinomio $x^4 - x^3 + x^2 - 1$.

Soluzione. 2 □

5. Data la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinare M^{23} .

Soluzione. $\begin{pmatrix} 1 & 23 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

□

Alcune regole pratiche sullo scritto

- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi il testo con nome e cognome.
- È possibile andare in bagno a partire da due ore dall'inizio dello scritto, consegnandomi il cellulare. Andateci immediatamente prima che si inizi. Ovvero, ADESSO.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono ammessi in aula cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi (ovviamente!)
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate. A parte che sul testo, possibilmente in alto a destra.
- NON CONSEGNATE LA BRUTTA. Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno forti penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete.

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 1 (8pt). *Al variare di $a \in \mathbb{R}$, dati*

$$\begin{aligned} V &= \text{Span}((1, 0, 1, 0), (1, 1, a, 1), (1, 1, 0, 1)) \\ W &= \text{Span}((1, 0, 0, 3), (1, 3, 1, 5), (1, 1, 1, 1)) \end{aligned}$$

determinare basi e dimensioni di $V + W$, $V \cap W$.

Soluzione. Analizzando i generatori di V, W , per evitare di spezzare i calcoli fin dall'inizio, scegliamo di costruire la matrice $[V|W]$. Iniziamo determinando, come al solito, una base di W .

Costruiamo la matrice che ha come righe i generatori di W e riduciamola con Gauss.

```
N:=Mat([[1,0,0,3],
        [1,3,1,5],
        [1,1,1,1]]);
RiduciScalaVerbose(N);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Canello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 0, 3]
      2^a-(1)*1^a [0, 3, 1, 2]
      3^a-(1)*1^a [0, 1, 1, -2]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=3
Canello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 0, 0, 3]
----- [0, 3, 1, 2]
      3^a-(1/3)*2^a [0, 0, 2/3, -8/3]
```

Ci sono tre pivot, quindi $\dim W = 3$ e scegliamo come base di W $B = (1, 0, 0, 3), (0, 3, 1, 2), (0, 0, 1, -4)$, avendo opportunamente moltiplicato l'ultima riga della matrice ridotta per $-\frac{3}{2}$. Costruiamo adesso la matrice che ha come colonne i generatori di V e la base B di W , in quest'ordine, e riduciamola con Gauss.

```
M:=Mat([[1,1,1,1,0,0],
        [0,1,1,0,3,0],
        [1,a,0,0,1,1],
        [0,1,1,3,2,-4]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Canello la 1^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1, 0, 0]
      0 sotto pivot[0, 1, 1, 0, 3, 0]
```

```

3^a-(1)*1^a [0, a - 1, -1, -1, 1, 1]
0 sotto pivot[0, 1, 1, 3, 2, -4]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1, 0, 0]
----- [0, 1, 1, 0, 3, 0]
3^a-(a - 1)*2^a [0, 0, -a, -1, -3a + 4, 1]
4^a-(1)*2^a [0, 0, 0, 3, -1, -4]

```

abbiamo i due casi

- $a \neq 0$. In questo caso abbiamo quattro pivot, di cui tre nelle colonne relative a V , quindi $\dim V = 3$ e $V + W = \mathbb{R}^4$. Dato che $\dim W = 3$ le formule di Grassmann ci dicono che

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 3 + 3 - 4 = 2$$

La riga della matrice ridotta che ha nulle le prime tre componenti è $(0, 0, 0, 3, -1, -4)$. Quindi le condizioni da applicare al vettore generico

$$a(1, 0, 0, 3) + b(0, 3, 1, 2) + c(0, 0, 1, -4) \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

di W perchè appartenga a V sono

$$3a - b - 4c = 0 \Leftrightarrow b = 3a - 4c$$

Il vettore generico di $V \cap W$ è

$$a(1, 0, 0, 3) + (3a - 4c)(0, 3, 1, 2) + c(0, 0, 1, -4) = (a, 9a - 12c, 3a - 3c, 9a - 12c) = a(1, 9, 3, 9) + c(0, -12, -3, -12)$$

da cui una base di $V \cap W$ è, per esempio

$$(1, 9, 3, 9), (0, 12, 3, 12) \text{ oppure } (1, 9, 3, 9), (0, 4, 1, 4)$$

- $a = 0$. In questo caso la matrice ridotta diviene, dopo la sostituzione $a = 0$,

```

P:=Mat([[1, 1, 1, 1, 0, 0],
        [0, 1, 1, 0, 3, 0],
        [0, 0, 0, -1, 4, 1],
        [0, 0, 0, 3, -1, -4]]);
-- Finiamo la riduzione
RiduciScalaVerbose(P);
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 4]=-1
Cancello la 4^a colonna, sotto il pivot
----- [1, 1, 1, 1, 0, 0]
----- [0, 1, 1, 0, 3, 0]
----- [0, 0, 0, -1, 4, 1]
4^a-(-3)*3^a [0, 0, 0, 0, 11, -1]

```

In questo caso abbiamo quattro pivot, di cui due nelle colonne relative a V , quindi $\dim V = 2$ e $V + W = \mathbb{R}^4$. Dato che $\dim W = 3$ le formule di Grassmann ci dicono che

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 2 + 3 - 4 = 1$$

e le righe della matrice ridotta che hanno nulla le prime tre componenti sono $(0, 0, 0, 3, -1, -4), (0, 0, 0, 0, 11, -1)$. Quindi le condizioni da applicare al vettore generico

$$a(1, 0, 0, 3) + b(0, 3, 1, 2) + c(0, 0, 1, -4) \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

di W perchè appartenga a V sono

$$\begin{cases} 3a - b - 4c = 0 \\ 11b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b - 4c = 0 \\ c = 11b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b - 44b = 0 \\ c = 11b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 15b \\ c = 11b \end{cases}$$

e quindi il vettore generico di $V \cap W$ è

$$15b(1, 0, 0, 3) + b(0, 3, 1, 2) + 11b(0, 0, 1, -4) = (15b, 3b, 12b, 3b) = b(15, 3, 12, 3)$$

da cui una base di $V \cap W$ è, per esempio

$$(15, 3, 12, 3) \text{ oppure } (5, 1, 4, 1)$$

Ricapitolando, per ogni a $V + W = \mathbb{R}^4$ e quindi una sua base è E_4 e la sua dimensione 4, mentre

- Se $a \neq 0$ abbiamo $\dim V \cap W = 2$ e una sua base è $(1, 9, 3, 9), (0, 4, 1, 4)$.
- Se $a = 0$ abbiamo $\dim V \cap W = 1$ e una sua base è $(5, 1, 4, 1)$.

□

Esercizio 2 (8pt). Data $a \in \mathbb{R}$ e una funzione $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$T((2a+1, 2)) = (2a+1, a+2) \quad T((0, a)) = \underline{0}$$

1. Determinare gli a per cui T può essere un morfismo.

Per queste a , supponendo T morfismo,

(a) Scegliere una base B di $\mathbb{R}^2$ e determinare $(M_T)_B^B$.

(b) Dire se T è isomorfismo.

(c) Discutere la diagonalizzabilità di T .

Soluzione. Denotiamo $\underline{v}_1 = (2a+1, a+2)$, $\underline{v}_2 = (0, a)$. Abbiamo che $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono base di $\mathbb{R}^2$ se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 2a+1 & a+2 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a(2a+1) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0, -\frac{1}{2}$$

Notiamo che se T è morfismo, $(2a+1, a+2)$ genera $\text{Im } T$, e quindi $\dim \text{Im } T < 2$, T non è quindi surgettiva, e quindi non è isomorfismo per alcun valore di a . Per il resto, distinguiamo i tre casi

1. Se $a \neq 0, -\frac{1}{2}$ i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono base di $\mathbb{R}^2$, e quindi l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} T: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ & \underline{v}_1 & \mapsto (2a+1, a+2) \\ & \underline{v}_2 & \mapsto \underline{0} \end{array}$$

è ben definita e morfismo. Scegliamo $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2$, notiamo che

$$(2a+1, a+2) = (2a+1, 2) + (0, a) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (1, 1)_B$$

ed abbiamo $(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-1)$$

e abbiamo due autovalori distinti $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ e T è diagonalizzabile..

2. Se $a = 0$, le condizioni

$$T((2a+1, 2)) = (2a+1, a+2) \quad T((0, a)) = \underline{0} \quad \text{divengono} \quad T((1, 2)) = (1, 2) \quad T((0, 0)) = \underline{0}$$

compatibili, e la seconda è superflua. Consideriamo la base $B = (1, 2), \underline{e}_1$ di $\mathbb{R}^2$. Non abbiamo condizioni sull'immagine di $\underline{e}_1$, quindi

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Calcoliamo

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & x \\ 0 & y-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(y-\lambda)$$

Abbiamo quindi i due autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = y$.

- Se $y \neq 1$ abbiamo due autovalori distinti e T è diagonalizzabile.
- Se $y = 1$ abbiamo un unico autovalore $\lambda_0 = 1$ con $\text{ma}(\lambda_0) = 2$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \text{mg}(\lambda_0) &= 2 - rk \left(\begin{array}{cc} 1-\lambda & x \\ 0 & y-\lambda \end{array} \right) \Big|_{\substack{\lambda=1 \\ y=1}} \\ &= 2 - rk \left(\begin{array}{cc} 0 & x \\ 0 & 0 \end{array} \right) \\ &= \begin{cases} \text{se } x = 0 & 2 - 0 = 0 \Rightarrow \text{mg}(\lambda_0) = \text{ma}(\lambda_0) \Leftrightarrow T \text{ è diagonalizzabile} \\ \text{se } x \neq 0 & 2 - 1 = 1 \Rightarrow \text{mg}(\lambda_0) \neq \text{ma}(\lambda_0) \Leftrightarrow T \text{ non è diagonalizzabile} \end{cases} \end{aligned}$$

- Se $a = -\frac{1}{2}$, le condizioni

$$T((2a+1, 2)) = (2a+1, a+2), \quad T((0, a)) = \underline{0} \quad \text{divengono} \quad T((0, 2)) = \left(0, \frac{3}{2}\right), \quad T\left(\left(0, -\frac{1}{2}\right)\right) = \underline{0}$$

Dato che

$$\begin{aligned} (0, 2) + 4 \left(0, -\frac{1}{2}\right) &= \underline{0} \\ \text{ma} \\ T\left((0, 2) + 4 \left(0, -\frac{1}{2}\right)\right) &= T((0, 2)) + 4T\left(\left(0, -\frac{1}{2}\right)\right) = \left(0, \frac{3}{2}\right) + \underline{0} \neq \underline{0} \end{aligned}$$

le due condizioni sono incompatibili e T non può essere morfismo.

Ricapitolando, T è morfismo se $a \neq -\frac{1}{2}$; in questi casi T non è mai un isomorfismo.

1. Se $a \neq 0$ prendiamo come base di $\mathbb{R}^2$ $B = (2a+1, a+2), (0, a)$; $(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e T è diagonalizzabile.
2. Se $a = 0$ prendiamo come base di $\mathbb{R}^2$ $B = (1, 2), e_1$; $(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ e T è diagonalizzabile se $y \neq 1$, $\forall x$ o se $y = 1$, $x = 0$.

□

Esercizio 3 (8pt). Data la base B di $\mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ ed un endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$(M_T)_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

discutere la diagonalizzabilità di T al variare di a .

Soluzione. Calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-a)$$

Abbiamo quindi i tre autovalori

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = a$$

Esaminiamo le possibilità

- Se $a \neq 1, 2$, i tre autovalori sono tutti distinti e T è diagonalizzabile.
- Se $a = 1$ i primi due autovalori coincidono (ad 1) ed abbiamo i due autovalori, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2 ed 1 rispettivamente. L'autovalore con molteplicità algebrica 1 ha forzatamente molteplicità geometrica 1, per l'altro va calcolata la molteplicità geometrica. Sostituiamo $\lambda = a = 1$ nella matrice $M - \lambda I$ e calcoliamo la molteplicità geometrica

$$\begin{aligned} \text{mg}(\lambda_1) &= 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \bigg|_{\substack{\lambda=1 \\ a=1}} \\ &= 3 - \text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 - 1 = 2 = \text{ma}(\lambda_1) = 2 \end{aligned}$$

e quindi T è diagonalizzabile.

- Se $a = 2$ il secondo e terzo autovalore coincidono (a 2) ed abbiamo i due autovalori, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 1 e 2 rispettivamente. L'autovalore con molteplicità algebrica 1 ha forzatamente molteplicità geometrica 1, per l'altro va calcolata

la molteplicità geometrica. Sostituiamo $\lambda = a = 2$ nella matrice $M - \lambda I$ e calcoliamola.

$$\begin{aligned} \text{mg}(\lambda_1) &= 3 - rk \left(\begin{array}{ccc} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{array} \right) \Bigg|_{\substack{\lambda=2 \\ a=2}} \\ &= 3 - rk \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ &= 3 - 2 = 1 \neq \text{ma}(\lambda_1) = 2 \end{aligned}$$

e quindi T non è diagonalizzabile.

Riassumendo,

- T è diagonalizzabile per ogni $a \in \mathbb{R}$ diverso da 2.

□