Capitolo 3

Terza Lezione - Numeri complessi

3.1 Il campo dei complessi

Osservazione 3.1. [BBB00] *L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni sui reali. Introduciamo l'oggetto $i \notin \mathbb{R}$ con la proprietà $i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$. Abbiamo già visto che se aggiungo i ad $\mathbb{R}$, ottengo il campo $\mathbb{R}[i]$, che indicheremo d'ora in poi come $\mathbb{C}$, il campo dei complessi. Chiaramente $\mathbb{C} \supsetneq \mathbb{R}$, dato che ogni numero reale è anche un complesso, e che $i \notin \mathbb{R}$, dato che nei reali i quadrati sono tutti positivi o nulli.*

Diamo qualche notazione su $\mathbb{C}$

Definizione 3.2. [BBB50]

1. *Un numero complesso scritto come $a + ib$ si dice* in forma cartesiana.

   Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$:

2. *la* parte reale *di z è a e si indica* $\mathrm{Re}(z)$.
3. *La* parte immaginaria *di z è b e si indica* $\mathrm{Im}(z)$.
4. *Se* $\mathrm{Re}\, z = a = 0$ *allora z è detto* immaginario puro.
5. *Se* $\mathrm{Im}\, z = b = 0$ *allora* $z \in \mathbb{R}$.
6. *Il* modulo *di z è $\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e si indica $|z|$.*

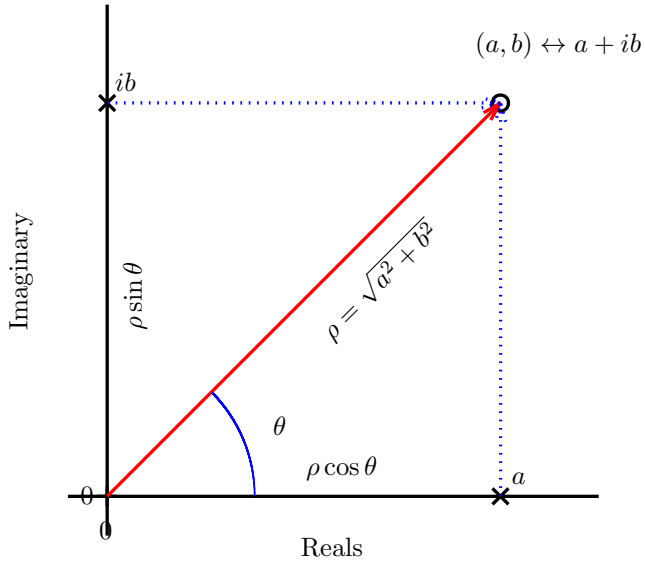
Osservazione 3.3. [BBX50] *C'è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & a + ib & \mapsto & (a, b) \end{array}$$

Possiamo quindi identificare, dal punto di vista insiemistico, i complessi col piano reale. Ogni punto si può identificare come una coppia ordinata di numeri reali (a, b).

Osservazione 3.4. [BBG50] *Possiamo disegnare un numero complesso* $a+ib$ *sul piano reale (detto in questo contesto il piano di Argand-Gauss) mediante la sua identificazione con la coppia reale* (a,b).

GNU1:



Per il teorema di Pitagora abbiamo che la distanza di (a,b) *dall'origine è* $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, *il modulo del compesso* $a+ib$. *Diciamo che* θ *è l'argomento di* $a+ib$ *e notiamo che l'argomento dello zero non è definito.*

Definizione 3.5. [BBB99] *[Forma vettoriale o trigonometrica] Un numero complesso* $z = a+ib \in \mathbb{C}$ *può essere identificato con l' elemento* (a,b) *del piano reale* $\mathbb{R}^2$, *con sulle ascisse la parte reale e sulle ordinate la parte complessa, che in questo caso si indica come il* piano di Argand-Gauss. *In questo caso il modulo* $|z|$ *(si scrive spesso come* ρ*) è la lunghezza del vettore centrato nell'origine* (a,b) *e possiamo definire l'argomento* $\arg(z) = \theta$. *L'argomento è noto a meno di multipli interi di* 2π, *dato che dalla trigonometria elementare abbiamo che*

$$a = \mathrm{Re}(z) = \rho\cos\theta \ \text{ e } \ b = \mathrm{Im}(z) = \rho\sin\theta$$

e le funzioni sin, cos *sono periodiche di periodo* 2π. *Possiamo scrivere ogni complesso* in forma trigonometrica.

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Ricordiamo che l'argomento di 0 *non è definito.*

Esempio 3.6. [BBB88] *Portiamo* $1+i \in \mathbb{C}$ *in forma trigonometrica. Ricordiamo che*

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \rho\cos\theta = a, \quad \rho\sin\theta = b$$

Qundi $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ *ed abbiamo per* $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2}\cos\theta \\ b = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

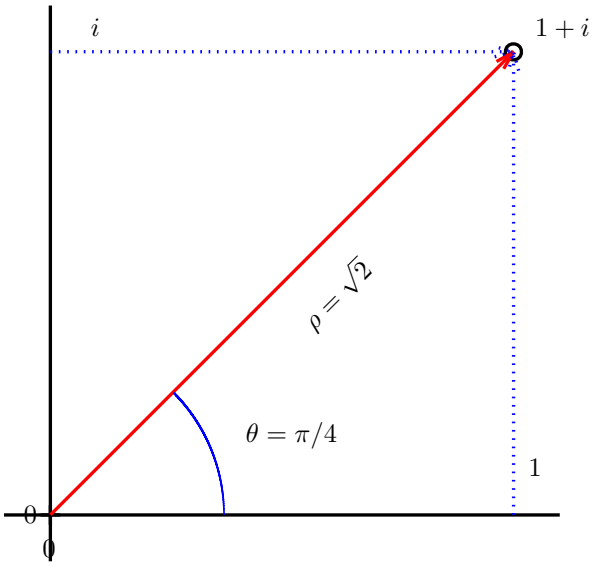
dato che sia a *che* b *sono positivi* z *appartiene al primo quadrante del piano di Argand-Gauss, e quindi delle due possibili soluzioni* $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$, *scegliamo* $\frac{\pi}{4}$. *La forma trigonometrica di* $1+i$ *è quindi*

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Osservazione 3.7. [BBB82] *Semplicemente disegnando il complesso sul piano di Argand-Gauss spesso possiamo determinare immediatamente la sua forma trigonometrica*

Esempio 3.8. [BBX82] *Determiniamo modulo ed argomento del complesso* $1+i$

GNU2: Rappresentazione trigonometrica di 1+i



Quindi $1 + i = \sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4})$

Esempio 3.9. [BBB98] *Portare il complesso* z *di modulo* 3 *ed argomento* $\frac{\pi}{2}$ *in forma cartesiana. Svolgiamo semplicemente i conti.*

Dato che $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, *abbiamo* $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3i$

Osservazione 3.10. [BBZ15] *Abbiamo un numero complesso in forma trigonometrica* $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. *Possiamo sempre portarlo in forma* ridotta, *ovvero trovare un unico* $\theta' \in \mathbb{R}$, $0 \le \theta' < 2\pi$ *tale che*

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

Per determinare θ' basta sommare a θ un opportuno multiplo intero di 2π, anche negativo se del caso.

Esempio 3.11. [BBZ16] *Diverse forme trigonometriche del numero complesso* $4(\cos 11\pi + i \sin 11\pi)$ *come, per esempio*

$$4(\cos 9\pi + i \sin 9\pi), \quad 4(\cos 3\pi + i \sin 3\pi), \quad 4(\cos \pi + i \sin \pi), \quad 4(\cos -\pi + i \sin -\pi)$$

Tra queste rappresentazioni la forma ridotta è $4(\cos \pi + i \sin \pi)$*, dato che l'argomento appartiene all intervallo* $[0, 2\pi)$.

E' immediato dalla definizione di forma trigonometrica e dal principio di identità dei complessi in forma cartesiana che due numeri complessi in forma trigonometrica sono uguali se sono ambedue nulli o se hanno uguale modulo ed il loro argomento differisce per un multiplo intero di 2π.

Dalla definizione di forma trigonometrica e dalle proprietà elementari discende il

Osservazione 3.12. [BBB15] *[Principio di identità dei complessi in forma trigonometrica]*

$$\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \equiv \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \text{ per un qualche } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Detto in un altro modo

$$\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \equiv \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

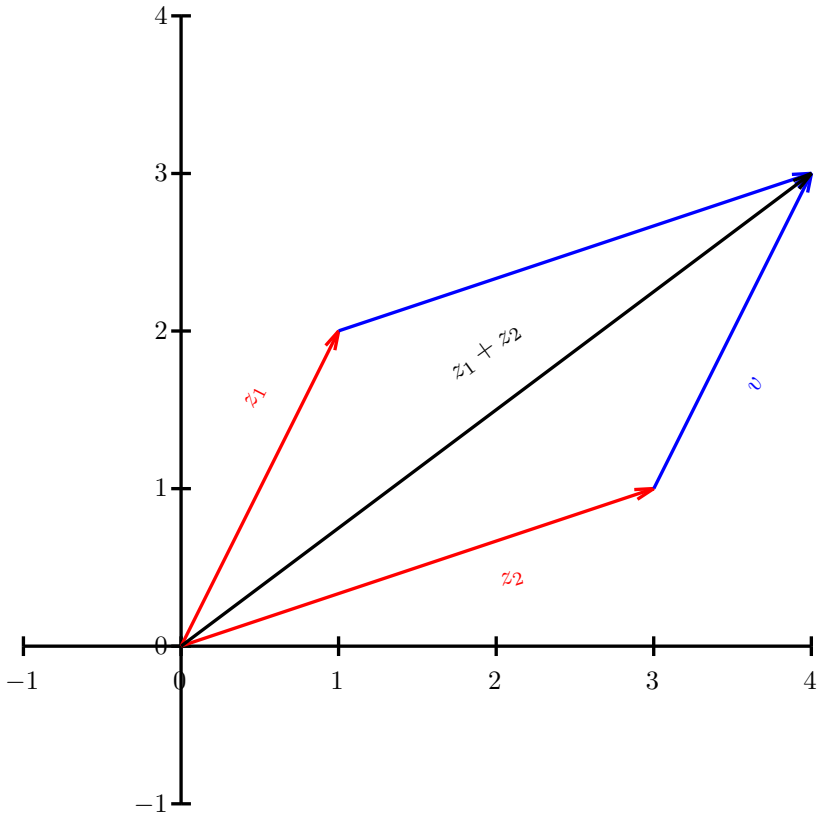
Valgono le seguenti proprietà del modulo

Proposizione 3.13. [BBB12] *Siano* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Allora*

1. $|z| \geq 0$ *e* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
3. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *[Disuguaglianza Triangolare]*
5. $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Dimostrazione. Facili verifiche per le proprietà 1-3. Per le proprietà 4-5, cfr. [Abate], 11.3, oppure ci possiamo rifare alla geometria euclidea:

GNU3: Disuguaglianza Triangolare e regola del parallelogramma



Il lato v ha stesso modulo ed orientamento di z_1 e per il triangolo di lati $z_1 + z_2, z_2, v$ è già noto che:

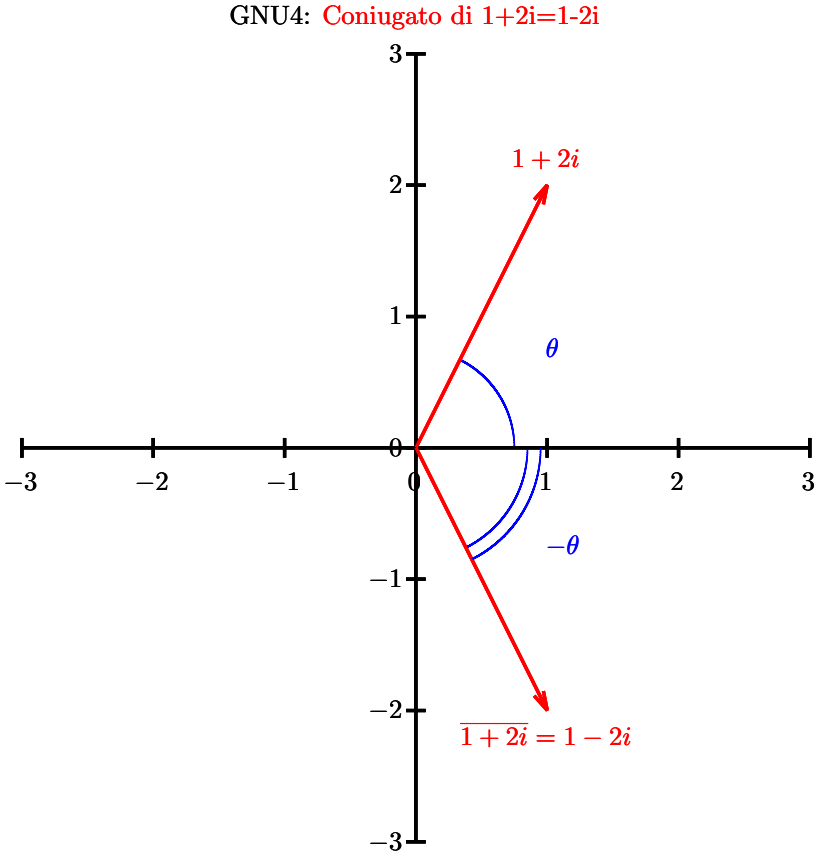
- La lunghezza del lato $z_1 + z_2$ è minore della somma delle lunghezze degli altri due, z_2, v.

- La lunghezza del lato $z_1 + z_2$ è maggiore del valore assoluto della differenza delle lunghezze degli altri due, z_2, v.

E considerando che $|z_1|$, la lunghezza di z_1, è uguale a $|v|$, la lunghezza di v ne seguono le proprietà 4,5. □

Definizione 3.14. [BBV11] *Dato $a + ib \in \mathbb{C}$, il complesso $\overline{a + ib} = a - ib$ è detto coniugato di $a + ib$.*

Sul piano di Argand-Gauss, il coniugato di un complesso z è il suo simmetrico rispetto all'asse reale



Valgono le seguenti proprietà del coniugio

Proposizione 3.15. [BBB11] *Dato* $z, z_1 \in \mathbb{C}$,

1. $|\overline{z}| = |z|$.
2. *Se* $\arg(z) = \theta$, $\arg(\overline{z}) = -\theta$.
3. $\overline{\overline{z}} = z$.
4. $\overline{z + z_1} = \overline{z} + \overline{z_1}$.
5. $\overline{z \cdot z_1} = \overline{z} \cdot \overline{z_1}$.
6. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ *se* $z \neq 0$.
7. $\overline{z} = z$ *se e solo se* $z \in \mathbb{R}$.
8. $\overline{z} = -z$ *se e solo se* z *è immaginario puro.*.
9. $z\overline{z} = |z|^2 \geq 0$ *e* $z\overline{z} = 0$ *se e solo se* $z = 0$.
10. *Possiamo indicare l'inverso moltiplicativo usando coniugio e modulo. Se* $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

$$(a + ib)^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Dimostrazione. Facili verifiche □

Esempio 3.16. [BBB40] *Alcuni esempi di equazioni risolvibili in* $\mathbb{C}$.

- z^2+1, *soluzioni* $z=\pm i$.
- x^2+2, *soluzioni* $x=\pm i\sqrt{2}$.
- x^2+x+1, *soluzioni* $x=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.
- *È facile vedere che tutte le equazioni di secondo grado hanno soluzioni in* $\mathbb{C}$, *basta usare la formula. In particolare, basta dare un occhiata alla formula risolutiva*

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

per vedere che tutti i polinomi di secondo grado a coefficienti reali con discriminante negativo hanno due radici complesse non reali distinte, una coniugata dell'altra, come nei tre casi dell'esercizio precedente 3.15.

Osservazione 3.17. [BBB41] $\forall\ a,b\in\mathbb{C},\quad a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$

3.2 Potenze e radici di un complesso.

La somma e la differenza di complessi in forma cartesiana sono facili da calcolare. Appena più complicati il prodotto e inverso. La potenza può presentare dei problemi.

Esempio 3.18. [BBB20] *Calcolare* $i^3, i^7, i^{12}, i^{323}$. *Dato che* $i^2=-1$ *abbiamo che*

$$i^0=1,\quad i^1=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=ii^2=-i,\quad i^4=i^2\cdot i^2=1$$

Notiamo che le potenze di i *sono cicliche di ordine* 4, *e* $i^n=i^r$ *dove* r *è il resto della divisione di* n *per* 4. *Quindi*

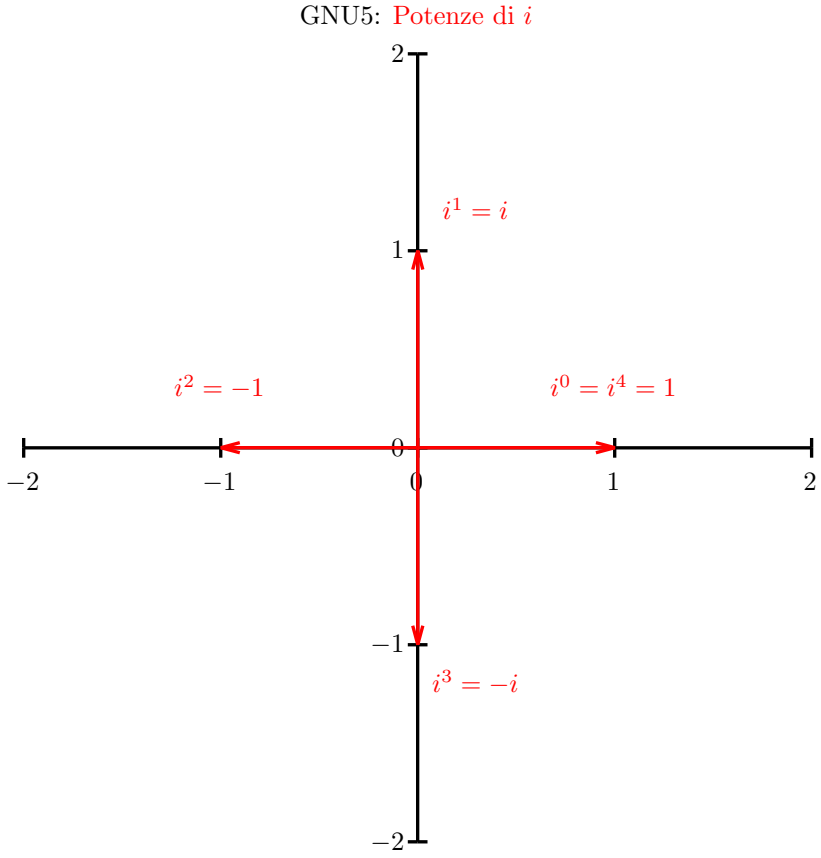
$$i^3=-i,\quad i^7=i^3=-i,\quad i^{12}=i^0=1$$

e dato che $323=4\cdot 80+3$, *(vediamo in dettaglio, ma potremmo saltare direttamente al risultato)*

$$i^{323}=i^{80\cdot 4+3}=i^{4\cdot 80}\cdot i^3=\left(i^4\right)^{80}\cdot -i=1^{80}\cdot -i=-i$$

Notiamo altresì che dall'identità $i^4=i^3\cdot i=1$ *discende immediatamente che*

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=i^3=-i$$



Il Teorema del binomio verrà affrontato nel corso di Analisi I. Qui diamo solo l'enunciato ed alcuni metodi di calcolo.

Esempio 3.19. [BBB21] *Usando il teorema del binomio*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^n \quad a, b \in \mathbb{K}$$

La seconda uguaglianza discende dalle seguenti proprietà:

- $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ *e* $0! = 1$
- $\forall\ n, k \in \mathbb{N},$ *con* $n \geq k,\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\forall\ n, k \in \mathbb{N},$ *con* $n \geq k,\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\begin{aligned}(2+i)^5 &= 2^5 + 5 \cdot 2^4 i + 10 \cdot 2^3 i^2 + 10 \cdot 2^2 i^3 + 5 \cdot 2 i^4 + i^5 \\ &= 32 + 80i - 80 - 40i + 10 + i \\ &= -38 + 41i\end{aligned}$$

Osservazione 3.20. [BBK30] *Quindi, fare le potenze di un complesso può essere lungo e noioso. E come calcolare le radici di un complesso?*

Richiamo 3.21. [BBB30] *Ricordiamo dalla trigonometria elementare la formula della somma per il seno e coseno*

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ \text{ e } \ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

e che

$$\begin{cases} \cos\theta = \cos\alpha \\ \sin\theta = \sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \theta = \alpha + 2k\pi$$

Il prodotto e la divisione di complessi in forma trigonometrica, come la loro potenza, sono relativamente semplici

Proposizione 3.22. [BBB22] *Dati i due complessi in forma trigonometrica*

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \ \text{ e } \ z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

Abbiamo che

1. $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$
2. $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{\rho_1}(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)) = \dfrac{1}{\rho_1}(\cos(\theta_1) - i\sin(\theta_1))$
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$
4. $z_1^n = (\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1))^n = \rho_1^n(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1))$ *[Formula di DeMoivre]*

Dimostrazione.

1. Il prodotto $\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ mi dà

$$\begin{aligned} &\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) = \\ &= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned}$$

   per la regola sul seno e coseno dell'angolo somma.

2. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)} &= \frac{1}{\rho_1}\frac{1}{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}\cdot\frac{\cos\theta_1 - i\sin\theta_1}{\cos\theta_1 - i\sin\theta_1} \\ &= \frac{1}{\rho_1}\frac{\cos\theta_1 - i\sin\theta_1}{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)} \\ &= \frac{1}{\rho_1}\frac{\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)}{\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1} \\ &= \frac{1}{\rho_1}\frac{\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)}{1} \\ &= \frac{1}{\rho_1}\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1) \\ &= \frac{1}{\rho_1}\cos(\theta_1) - i\sin(\theta_1) \end{aligned}$$

   usando la formula $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$ e le proprietà di seno e coseno.

3. Discende immediatamente dal punto precedente.

4. Lasciato per esercizio. Discende immediatamente dal primo punto, con una facile dimostrazione per induzione. Per l'induzione, facciamo riferimento al corso di Analisi.

□

Una immediata conseguenza è la formula per l'estrazione delle n radici n-esime di un complesso in forma trigonometrica.

Definizione 3.23. [BBB23] *Sia $w \in \mathbb{C}$ e $n \geq 1$. Una* radice n-esima di w *è un complesso z tale che $z^n = w$. L'insieme delle radici n-esime di w si indica come $\sqrt[n]{w}_{\mathbb{C}}$.*

Proposizione 3.24. [BBB24] *Sia w un complesso non nullo e $n \geq 1$. Allora esistono esattamente n radici distinte di w. Se $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \quad \textit{con } k = 0, \ldots, n-1 \tag{3.1}$$

Abbiamo che $\sqrt[n]{w}_{\mathbb{C}} = \{z_0, \ldots, z_{n-1}\}$ e gli z_k sono tutti distinti

Dimostrazione. Innanzitutto, grazie alla formula di DeMoivre, abbiamo che

$$z_k^n = \rho\left[\cos\left(\theta + 2k\pi\right) + i\sin\left(\theta + 2k\pi\right)\right] = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = w$$

e quindi gli z_k sono radici di w (cfr. definzione di radice). Rimane da vedere che siano le uniche e siano tutte distinte.

Per l'unicità: se $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ è una radice n-esima di w, dato che

$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = w$$

dobbiamo avere, per il principio di identità dei complessi in forma trigonometrica

$$r = \sqrt[n]{\rho} \text{ e } n\alpha = \theta + 2k\pi \text{ per un qualche } k \in \mathbb{Z}$$

per cui z è della forma 3.1

Dimostriamo ora che gli z_k, con $k : 1, \ldots, n-1$ sono tutti distinti. Per costruzione, i loro argomenti sono distinti e compresi tra $\frac{\theta}{n}$ e $\frac{\theta+2\pi}{n}$. Quindi per il principio di identità dei complessi in forma trigonometrica gli z_k sono tutti distinti. □

Esempio 3.25. [BBB44] *Risolvere $z^3 - 1 = 0$.*

Basta estrarre le tre radici terze dell'unità: $z = \sqrt[3]{1}_{\mathbb{C}}$. Mettiamo 1 in forma trigonometrica

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

Dalla formula

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right)\right) \quad \textit{k:0...2}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1\left(\cos\left(\frac{0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0}{3}\right)\right) && = 1 && k = 0\\
z_1 &= 1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) && = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} && k = 1\\
z_2 &= 1\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) && = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} && k = 2
\end{aligned}$$

Definizione 3.26. [BBB25] *Si usa scrivere il complesso* $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ *come* $\rho e^{i\theta}$. *Questa è la* forma esponenziale *del complesso. Al nostro livello, questa è* **semplicemente una notazione**.

L'utilità della notazione è immediata, dato che sono rispettate tutte le usuali regole delle potenze, *anche se non lo dimostreremo*:

Osservazione 3.27. [BBB26] *[Proprietà della forma esponenziale] Dati* $\rho, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}_0^+$ *e* $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

1. *Principio di identità dei complessi in forma esponenziale*

$$\rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ tale che} \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

2. $\rho_1 e^{i\theta_1}\rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
3. $\left(\rho e^{i\theta}\right)^{-1} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}}$.
4. $\dfrac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.
5. $\left|\left(\rho e^{i\theta}\right)\right| = \rho$.
6. $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.
7. $\arg\left(\rho e^{i\theta}\right) = \theta$.
8. $\overline{(\rho e^{i\theta})} = \rho e^{-i\theta}$.
9. $e^{i\pi} = -1$.
10. *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *allora* $e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$

Osservazione 3.28. [BBB46] *[Formula delle radici in forma esponenziale] Se* $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$

$$\sqrt[n]{z}_{\mathbb{C}} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}_{\mathbb{C}} = \left\{ \sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\frac{\theta+k2\pi}{n}} \ \middle|\ k : 0\dots n-1 \right\} = \left\{ \sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)} \ \middle|\ k : 0\dots n-1 \right\}$$

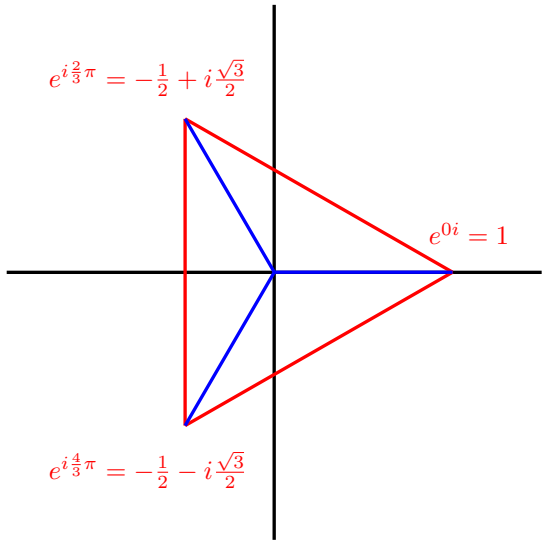
o anche, scritto in altro modo, sempre con $k : 0\dots n-1$

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}_{\mathbb{C}} = \left\{ \underbrace{\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\frac{\theta}{n}}}_{k=0}, \underbrace{\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}}_{k=1}, \underbrace{\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n}+2\frac{2\pi}{n}\right)}}_{k=2}, \dots \underbrace{\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}}_{k=k}, \dots, \underbrace{\sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}}_{k=n-1} \right\}$$

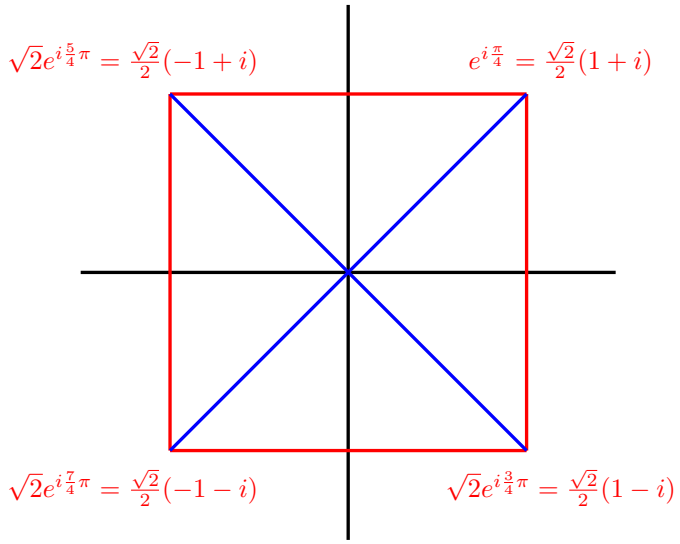
Discende immediatamente dall'osservazione precedente che

Corollario 3.29. [BBB60] *Le n radici n-esime di un complesso z sono i vertici di un poligono regolare con n lati nel piano di Argand-Gauss, dato che gli argomenti (angoli associati) di due radici "sucessive"* $j, j+1$ *differiscono sempre per lo stesso angolo.*

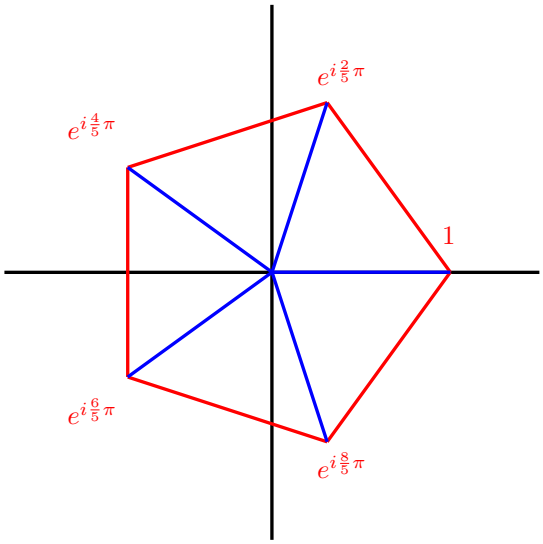
GNU6: Le radici terze di 1 formano i vertici di un triangolo equilatero



GNU7: Le radici quarte di -1 formano i vertici di un quadrato



GNU8: Le radici quinte di 1 formano i vertici di un pentagono regolare



Osservazione 3.30. [BBB95] *Dato* $z = e^{i\pi/4} \in \mathbb{C}$

1. $2 \cdot e^{i\pi/4} = 2e^{i\pi/4}$ *il modulo di* z *viene moltiplicato per* 2. *[Allunga]*
2. $e^{i\pi/3} \cdot e^{i\pi/4} = e^{i7\pi/12}$ *sommo* $\pi/3$ *all'argomento di* z. *[Ruota]*
3. $2e^{i\pi/3} \cdot e^{i\pi/4} = 2e^{i7\pi/12}$ *moltiplico il modulo di* z *per* 2 *E sommo* $\pi/3$ *al suo argomento. [Torce]*

Per chi fosse interessato ad approfondire la formula di Eulero $e^{i\pi} - 1 = 0$ che noi abbiamo enunciato senza fornire dettagli, consigliamo il link

https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/eulero/la-matematica-e-piena-di-eulero-la-piu-bella-formula-della-matematica/