Capitolo 4

Quarta Lezione - Esercizi

4.1 Esercizi svolti

Ricordiamo la definizione di ordine totale per un anello.

Definizione 4.1. [BBP55] *Su un anello commutativo A un* ordinamento totale compatibile con le operazioni *è una relazione $>$ tale che*

1. $\forall\ a, b \in A$ *abbiamo* $a > b$ *o* $b > a$ *o* $a = b$. *[Totalità]*
2. $\forall\ a, b \in A\ a > b$ *e* $b > a \Rightarrow a = b$.*[Proprietà antisimmetrica]*
3. $\forall\ a, b, c \in A\ a > b$ *e* $b > c \Rightarrow a > c$.*[Proprietà transitiva]*
4. $\forall\ a, b, c \in A$ *abbiamo* $a > b \Rightarrow a + c = b + c$. *[Compatibilità con la somma]*
5. $\forall\ a, b, c \in A$ *con* $c > 0$ *abbiamo* $a > b \Rightarrow ac > bc$. *[Compatibilità col prodotto]*
6. *Conseguenze:* $\forall\ a, b, c \in A$ *con* $c < 0$ *abbiamo* $a > b \Rightarrow bc > ac$.
7. $1 > 0$ *e* $-1 < 0$.

Notazione 4.2. [BBP42] *Con lieve abuso di notazione*

- *Definamo "maggiore o uguale"*
$$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a > b \text{ o } a = b$$
- *se $a > b$ diciamo anche che $b < a$. Analogamente per $\geq, \leq$.*

Se poniamo su $\mathbb{R}$ l'ordinamento usuale, vediamo che è impossibile porre su $\mathbb{C}$ un ordinamento compatibile con questo.

Esercizio 4.3. [BBP98] *Non esiste su $\mathbb{C}$ un ordinamento totale $>$ compatibile con le operazioni.*

Soluzione. Dato che $i \neq 0$, dobbiamo avere $i > 0$ o $i < 0$

- Se $i > 0$, allora $i \cdot i > i \cdot 0 \Leftrightarrow -1 > 0$ assurdo.
- Se $i < 0$, allora $-i > 0$, ma allora $(-i) \cdot (-i) > 0 \Leftrightarrow i^2 > 0 \Leftrightarrow -1 > 0$ assurdo.

□

Esercizio 4.4. [BBQ98] *Portare il complesso* $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ *in forma cartesiana.Il modulo di* z *è* 2 *ed il suo argomento* $\frac{\pi}{4}$*. Svolgiamo semplicemente i conti.*

Dato che $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *abbiamo* $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Esercizio 4.5. [BBB13] *Portiamo* $2 - 3i \in \mathbb{C}$ *in forma trigonometrica. Abbiamo* $\rho = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ *ed abbiamo*

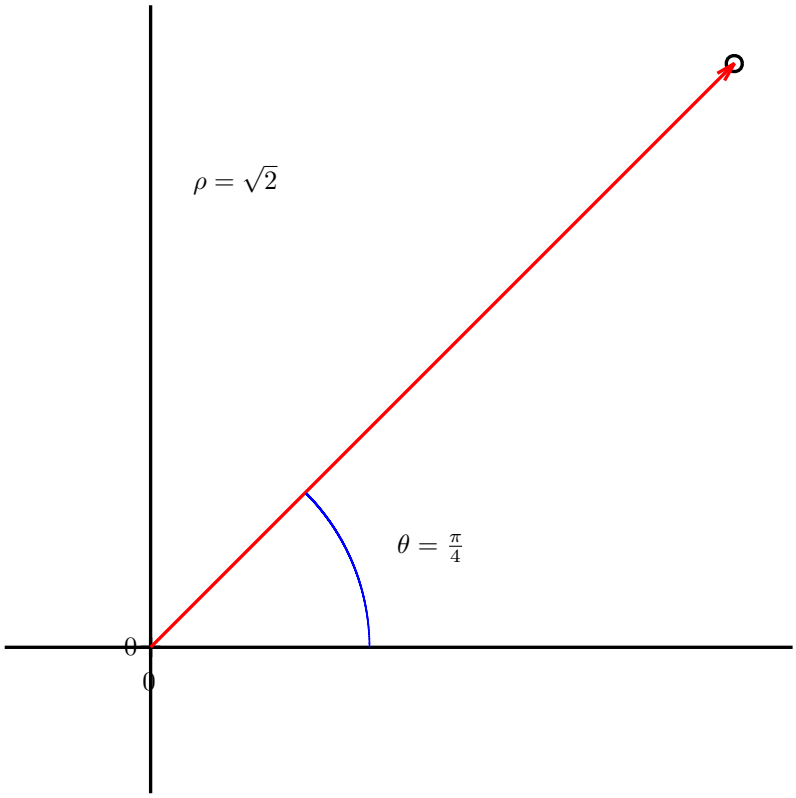
$$\begin{cases} a = \sqrt{13}\cos\theta \\ b = \sqrt{13}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{3}{2} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \operatorname{atan}\left(-\frac{3}{2}\right)$$

Ricordando il grafico dell'arcotangente, funzione dispari positiva sui positivi e negativa sui negativi, $\operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right) > 0$*, dato che* θ *è un angolo con coseno positivo e seno negativo, controllando sul piano di Argand-Gauss* θ *appartiene al quarto quadrante. La forma cartesiana di* $2 - 3i$ *è quindi*

$$\sqrt{13}\left(\cos\operatorname{atan}\left(-\frac{3}{2}\right) + i\sin\left(+\operatorname{atan}\left(-\frac{3}{2}\right)\right)\right)$$
$$\sqrt{13}\left(\cos\operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right) - i\sin\operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

Esercizio 4.6. [BBB47] *Calcolare le radici seste di* $i + 1$*. Mettiamo* $1 + i$ *in forma esponenziale e usiamo la formula. Usiamo il piano di Argand-Gauss.*

GNU9: Rappresentazione trigonometrica di $1 + i$



$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

$$\sqrt[6]{1+i} = \sqrt[6]{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt[12]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{6}} \qquad k : 0 \dots 5$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\sqrt[6]{1+i} &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{24}} && k=0\\
\sqrt[6]{1+i} &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\frac{9\pi}{4}}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{9\pi}{24}} && k=1\\
\sqrt[6]{1+i} &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{17\pi}{24}} && k=2\\
\sqrt[6]{1+i} &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+6\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{25\pi}{24}} && k=3\\
\sqrt[6]{1+i} &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+8\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{33\pi}{24}} && k=4\\
\sqrt[6]{1+i} &= \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+10\pi}{6}} = \sqrt[12]{2} \cdot e^{i\frac{41\pi}{24}} && k=5
\end{aligned}$$

Notiamo che per $k = 6$ avremmo $\frac{49\pi}{24} = \frac{\pi}{24} + 2\pi$ e quindi per $k > n-1$ ritroviamo le radici che avevamo già.

$$\sqrt[12]{2}e^{i\frac{49\pi}{24}} = \sqrt[12]{2}e^{i\frac{\pi}{24}}$$

Esercizio 4.7. `[EE01]` *Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $(z^4+1)=0$*

Soluzione.

$$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1$$

quindi cerchiamo le radici quarte di $-1 = 1e^{i\pi}$. Le radici si calcolano con la formula applicata come segue

$$w_4 = \sqrt[4]{1} \cdot e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

con $k = 0, 1, 2, 3$ e otteniamo le quattro radici complesse:

$$\begin{aligned}
z_0 &= e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} && k=0\\
z_1 &= e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} && k=1\\
z_2 &= e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} && k=2\\
z_3 &= e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} && k=3
\end{aligned}$$

Una fattorizzazione di z^4+1 su $\mathbb{C}[z]$ è quindi, per il teorema di Ruffini (che vale su qualunque $\mathbb{K}[x]$) è quindi

$$\left(z - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(z - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(z - e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(z - e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)$$

Notiamo che le quattro radici complesse sono a due a due coniugate (prima e quarta, seconda e terza) e che

$$\left(z - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(z - e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) = z^2 + 2\,\mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}})z + \left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = z^2 + \sqrt{2}z + 1$$

Dove $\mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}})$ è la parte reale di $(e^{i\frac{\pi}{4}})$, dato che il coniugato di $\rho e^{i\theta}$ è $\rho e^{-i\theta}$, che $e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ e che

$$a + ib + \overline{a+ib} = a + ib + (a - ib) = 2a$$

□

Trovare per esercizio una fattorizzazione completa di z^4+1 *su* $\mathbb{R}[z]$ *Hints:*

- *Si può ricorrere alla divisione di polinomi (funziona su qualunque* $\mathbb{K}[x]$*), dividendo* z^4+1 *per* $z^2+\sqrt{2}z+1$.
- *Si può procedere come sopra con i fattori lineari* $e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Esercizio 4.8. [BBB56] *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *l'equazione* $4|z|^3 = z^5$

Soluzione. Mettiamo z in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta}$; l'equazione diviene

$$\begin{aligned} 4\left|\rho e^{i\theta}\right|^3 =& (\rho e^{i\theta})^5 \\ 4\rho^3 = 4\rho^3 e^{i0} =& \rho^5 e^{i5\theta} \end{aligned}$$

Da cui, per la definizione di uguaglianza per i complessi in forma esponenziale abbiamo, ricordando che $\rho > 0$ dato che si tratta di un modulo, che:

$$\begin{cases} 4\rho^3 = \rho^5 \text{ con } \rho > 0 \\ 0 = 5\theta + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^5 - 4\rho^3 = \rho^3(\rho^2 - 4) = 0 \text{ con } \rho > 0 \\ \theta = -\frac{2}{5}k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = 0, 2 \\ \theta = -\frac{2}{5}k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dato che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ ho una soluzione, ho infinite soluzioni,

$$\begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ k = -2 & \theta = \frac{4}{5}\pi \\ k = -1 & \theta = \frac{2}{5}\pi \\ k = 0 & \theta = 0 \\ k = 1 & \theta = -\frac{2}{5}\pi \\ k = 2 & \theta = -\frac{4}{5}\pi \\ k = 3 & \theta = -\frac{6}{5}\pi \\ k = 4 & \theta = -\frac{8}{5}\pi \\ k = 5 & \theta = -\frac{10}{5}\pi \\ k = 6 & \theta = -\frac{12}{5}\pi \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Ma queste soluzioni non sono tutte distinte, infatti notiamo che

- per $k = 5$, $\theta = -\frac{10}{5} = 2\pi$ che ci dà gli stessi seno e coseno di $k = 0,\ \theta = 0$, e quindi lo stesso complesso.
- Analogamente, $k = 1$ e $k = 6$ ci danno lo stesso complesso.
- Analogamente, $k = -1,\ \theta = \frac{2}{5}$ ci dà lo stesso complesso di $k = 4,\ \theta = -\frac{8}{5} = \frac{2}{5} - 2\pi$.
- Eccetera...

Se ci limitiamo ai valori di k per cui $-\frac{2}{5}k\pi \in (-2\pi, 0]$, dato che poi i complessi si ripetono abbiamo che i θ delle soluzioni sono

$$\begin{aligned} k &= 0 & \theta &= 0 \\ k &= 1 & \theta &= -\frac{2}{5}\pi \\ k &= 2 & \theta &= -\frac{4}{5}\pi \\ k &= 3 & \theta &= -\frac{6}{5}\pi \\ k &= 4 & \theta &= -\frac{8}{5}\pi \end{aligned}$$

Se preferiamo i nostri angoli in $[0, 2\pi)$, prenderemo altri valori di k, oppure più banalmente, aggiungiamo 2π a questi θ trovando

$$\theta = 0 \quad \theta = \frac{2}{5}\pi \quad \theta = \frac{4}{5}\pi \quad \theta = \frac{6}{5}\pi \quad \theta = \frac{8}{5}\pi$$

Le soluzioni dell'equazione $4\,|z|^3 = z^5$ sono quindi

$$z_0 = 2 \cdot e^{i0} = 2,\ z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{2}{5}\pi},\ z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{4}{5}\pi},\ z_3 = 2 \cdot e^{i\frac{6}{5}\pi},\ z_4 = 2 \cdot e^{i\frac{8}{5}\pi},\ z_5 = 0$$

□

Esempio 4.9. [BBB45] *Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione*

$$z^7 + 2iz^6 + iz^5 + 2z^2 + 4iz + 2i = 0$$

Soluzione. Per il Teorema fondamentale dell'algebra abbiamo 7 soluzioni in $\mathbb{C}$, contate con la loro molteplicità, dato che abbiamo un equazione polinomiale di grado 7. Troviamo le soluzioni. Raccogliamo a fattor comune come segue:

$$\begin{aligned} z^7 + 2iz^6 + iz^5 + 2z^2 + 4iz + 2i &= 0 \\ z^5(z^2 + 2iz + i) + 2(z^2 + 2iz + i) &= 0 \\ (z^5 + 2)(z^2 + 2iz + i) &= 0 \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono date dell'unione delle soluzioni dei due fattori:

$$z^5 + 2 = 0 \text{ e } z^2 + 2iz + i = 0$$

Risolviamo separatamente le due equazioni.

Risolviamo prima l'equazione $z^5 + 2 = 0$ che equivale a calcolare le radici quinte complesse di -2. Innanzitutto scriviamo $-2 = 2 \cdot e^{i\pi}$ e applichiamo la formula delle radici

$$\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \text{ con } k = 0, \cdots, n-1$$

Pertanto visto che $\rho = 2, \theta = \pi$ e $n = 5$ abbiamo che le radici quinte di -2 sono:

$$\sqrt[5]{2} e^{i\frac{\pi+2k\pi}{5}} \text{ con } k = 0, \cdots, 4$$

Da questa formula otteniamo le cinque radici complesse:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{5}} && k = 0 \\
z_1 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\frac{3}{5}\pi} && k = 1 \\
z_2 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\frac{5}{5}\pi} = \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\pi} = -\sqrt[5]{2} && k = 2 \\
z_3 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\frac{7}{5}\pi} && k = 3 \\
z_4 &= \sqrt[5]{2} \cdot e^{i\frac{9}{5}\pi} && k = 4
\end{aligned}$$

L'equazione $z^2 + 2iz + i = 0$ è un'equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$. Adesso risolviamo la seconda equazione che osserviamo trattarsi di un equazione di secondo grado in $\mathbb{C}$. Pertanto usiamo la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado ed otteniamo

$$\begin{aligned}
z_{5,6} &= \frac{-2i + \sqrt{(2i)^2 - 4i}_{\mathbb{C}}}{2} \\
&= \frac{-2i + \sqrt{-4 - 4i}_{\mathbb{C}}}{2} \\
&= \frac{-2i + 2\sqrt{-1 - i}_{\mathbb{C}}}{2} \\
&= -i + \sqrt{-1 - i}_{\mathbb{C}}
\end{aligned}$$

Adesso dobbiamo trovare le radici quadrate di $-1 - i$. Innanzitutto calcoliamone il modulo e l'argomento. Poichè $a = -1$ e $b = -1$ si ha che $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{5}{4}\pi$ e quindi

$$-1 - i = \sqrt{2}\ e^{\frac{5}{4}\pi}$$

Per cui le radici quadrate di $-1 - i$ si calcolano con la formula applicata come segue

$$w_k = \sqrt{\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{2}} \text{ k=0,1}$$

ed otteniamo le sue due radici complesse:

$$w_0 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{8}} \qquad w_1 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{\frac{13\pi}{8}}$$

da cui si ottengono le soluzioni:

$$z_5 = -i + w_0 = -i + \sqrt[4]{2} e^{i\frac{5\pi}{8}} \quad z_6 = -i + w_1 = -i + \sqrt[4]{2} e^{i\frac{13\pi}{8}}$$

Abbiamo così trovato le sette radici complesse cercate

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{5}} \\ z_1 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{3}{5}\pi} \\ z_2 &= -\sqrt[5]{2} \\ z_3 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{7}{5}\pi} \\ z_4 &= \sqrt[5]{2}e^{i\frac{9}{5}\pi} \\ z_5 &= -i + \sqrt[4]{2}e^{i\frac{5}{8}\pi} \\ z_6 &= -i + \sqrt[4]{2}e^{i\frac{13}{8}\pi} \end{aligned}$$

□

Esempio 4.10. [BBB93] *Trovare le soluzioni dell'equazione*

$$z\overline{z}^2 = z^3$$

e disegnarle sul piano di Argand-Gauss.

Soluzione. Abbiamo

$$z(\overline{z}^2 - z^2) = 0 \implies z = 0 \text{ oppure } \overline{z}^2 - z^2 = 0$$

Quindi abbiamo la soluzione banale $z = 0$ ovvero $\rho = 0$.

Adesso possiamo supporre $z \neq 0$ e dividere ambedue i menbri dell'equazione per z, ottenendo $\overline{z}^2 = z^2$.

Mettiamo il complesso in forma esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$, e dato che $z \neq 0$ possiamo supporre $\rho > 0$. L'equazione diviene:

$$\begin{aligned} \overline{z}^2 &= z^2 \\ (\rho e^{-i\theta})^2 &= (\rho e^{i\theta})^2 \\ \rho^2 e^{-2i\theta} &= \rho^2 e^{2i\theta} \end{aligned}$$

Da cui, per la definizione di uguaglianza per i complessi in forma esponenziale

$$\begin{cases} \rho^2 = \rho^2 & \text{vera } \forall\, \rho \in \mathbb{R} \\ -2\theta = 2\theta + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo che

$$\theta = -\frac{k}{2}\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Da cui si deducono gli angoli

$$\theta_0 = 0 \quad \theta_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = -\pi \quad \theta_3 = -\frac{3}{2}\pi$$

o volendo gli angoli in $[0, 2\pi)$ (mantenendo gli stessi seni e coseni)

$$\theta_0 = 0 \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_2 = \pi \quad \theta_3 = \frac{3\pi}{2}$$

Quindi le soluzioni sono

$$z_0 = \rho e^{i0} \quad z_1 = \rho e^{i\frac{\pi}{2}} \quad z_2 = \rho e^{\pi} \quad z_3 = \rho e^{\frac{3\pi}{2}} \quad z_4 = 0 \text{ che avevamo trovato all'inizio}$$

con ρ qualunque, visto che non abbiamo condizioni su ρ.

Nel piano di Argand-Gauss le soluzioni di questa equazione sono quattro semi rette dall'origine con angoli rispettivamente $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3/2\pi$, origine compresa.

[Qui il disegno, a breve]

□

Esempio 4.11. [BBW11] *Determinare le soluzioni complesse dell'equazione* $\frac{z^8+1}{z^4+i} = 0$.

Soluzione. Ricordiamo che $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$, come si può facilmente verificare svolgendo i conti. Ponendo $a = z^4$ e $b = 1$ vediamo che

$$\frac{z^8+1}{z^4+i} = \frac{(z^4+i)(z^4-i)}{z^4+i} = z^4 - i$$

Le radici di $z^8 + 1$ sono otto (le otto radici complesse di -1); per quanto detto prima quattro sono radici di $z^4 + i$ e quattro di $z^4 - i$. Abbiamo

$$\frac{z^8+1}{z^4+i} = 0 \Leftrightarrow z^4 - i = 0$$

Le soluzioni sono quindi le radici quarte complesse di i, che troviamo con la formula

$$\sqrt[4]{i}_{\mathbb{C}} = \sqrt[4]{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{\mathbb{C}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}} \; k = 0, \ldots, 3 = e^{i\frac{\pi}{8}}, e^{i\frac{5}{8}\pi} e^{i\frac{9}{8}\pi} e^{i\frac{13}{8}\pi}$$

□

Esempio 4.12. [BBB51] *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$(\overline{z} - 1)^3 = 2z - 2$$

Soluzione. Sostituiamo $\omega = \overline{z} - 1$ da cui si ricava che

$$\overline{z} = \omega + 1 \Rightarrow z = \overline{\omega} + 1$$

L'equazione diventa quindi

$$\omega^3 = 2(\overline{\omega} + 1) - 2 = 2\overline{\omega}.$$

Adesso scriviamo ω in forma esponenziale $\omega = \rho e^{i\theta}$ ed otteniamo

$$\rho^3 e^{i3\theta} = 2\rho e^{-i\theta}$$

che per il principio di identità dei complessi in forma esponenziale diviene

$$\begin{cases} \rho^3 = 2\rho \\ 3\theta = -\theta + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho(\rho^2 - 2) = 0 \\ 4\theta = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0, \sqrt{2} \\ \theta = \frac{k}{2}\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le soluzioni distinte di questa equazione sono:

$$\begin{aligned} &\omega_0 = \sqrt{2}e^{i0} = \sqrt{2} && \text{da } \rho = \sqrt{2},\ k = 0 \\ &\omega_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}i && \text{da } \rho = \sqrt{2},\ k = 1 \\ &\omega_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{2}} = -\sqrt{2} && \text{da } \rho = \sqrt{2},\ k = 2 \\ &\omega_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\sqrt{2}i && \text{da } \rho = \sqrt{2},\ k = 3 \\ &\omega_4 = 0 && \text{da } \rho = 0 \end{aligned}$$

Ricordandoci che $z = \overline{\omega} + 1$ ricaviamo le soluzioni dell'equazione originaria $(\overline{z} - 1)^3 = 2z - 2$

$$\begin{aligned} z_0 &= \overline{\sqrt{2}} + 1 = 1 + \sqrt{2} \\ z_1 &= \overline{\sqrt{2}i} + 1 = 1 - \sqrt{2}i \\ z_2 &= \overline{-\sqrt{2}} + 1 = 1 - \sqrt{2} \\ z_3 &= \overline{-\sqrt{2}i} + 1 = 1 + \sqrt{2}i \\ z_4 &= \overline{0} + 1 = 1 \end{aligned}$$

□

Esercizio 4.13. [BBB57] *Trovare il numero di soluzioni in* $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ *del sistema*

$$\begin{cases} z^{100} - 1 = 0 \\ \mathrm{Im}(z) > 0 \end{cases}$$

L'equazione ci dice che le soluzioni devono essere le radici di 1*. Ce ne sono due reali, con parte immaginaria nulla,* ± 1*. Le altre corrispondono a* 98 *punti simmetricamente disposti sulla circonferenza unitaria. La disuguaglianza ci dice che le soluzioni devono avere parte immaginaria positiva, ovvero giacere nel primo e terzo quadrante. Per simmetria, a parte le due soluzioni con parte immaginaria nulla (*$z = \pm 1$*), metà delle* 98 *soluzioni non reali rimaste avrà parte immaginaria positiva e metà parte immaginaria negativa. Quindi il sistema ha* 49 *soluzioni.*

Esercizio 4.14. [M106] *Risolvere per* $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} e^z = e \\ |z| < 10 \end{cases}$$

Risolviamo prima l'equazione, usando la forma cartesiana di $z = a + ib$*.*

N.B. Dato che $z \in \mathbb{C}$*, non necessariamente* $z \in \mathbb{R}$ e^z è l'esponenziale di esponente z, non un complesso in forma esponenziale. Quindi $z \in \mathbb{R}$ NON $z \in [0, 2\pi)$

$$e^z = e \Leftrightarrow e^{x+iy} = e \Leftrightarrow e^x e^{iy} = e \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = e \\ y = 0 + 2k\pi \ \textit{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2k\pi \ \textit{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le soluzioni sono quindi gli infiniti complessi $z = 1 + 2k\pi$*, con* $k \in \mathbb{Z}$ *ed in particolare*

$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$k = -2$	$1 - i4\pi$		$\sqrt{1 + 16\pi^2}$
$k = -1$	$1 - i2\pi$		$\sqrt{1 + 4\pi^2}$
$k = 0$	1	*di modulo*	1
$k = 1$	$1 + i2\pi$		$\sqrt{1 + 4\pi^2}$
$k = 2$	$1 + i4\pi$		$\sqrt{1 + 16\pi^2}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

e dato che dobbiamo avere $|z| < 10$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+4\pi^2} &< 1+\sqrt{4\pi^2} = 1+2\pi \simeq 7.28 \textbf{ Soluzione} \\ \sqrt{1+16\pi^2} &> 1+\sqrt{16\pi^2} = 1+4\pi \simeq 1+12.56 = 13.57 > 10 \textbf{ Non soluzione} \end{aligned}$$

e per $k > 2$ *il modulo è maggiore che per* $k = 2$*, e che la situazione per* $k < 0$ *è speculare a quella per* $k > 0$ *Le soluzioni sono solo tre, per* $k = 0, \pm 1$*, rispettivamente* $z = 1, 1 \pm i2\pi$

4.2 Esercizi proposti

Esercizio 4.15. [BBU77] *Disegnare su piano di Argand-Gauss i seguenti complessi*

1. $(2+i)^5$.
2. $\sqrt[4]{\sqrt{2}}_{\mathbb{C}}$ *(le radici quarte complesse di* $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$*).*
3. $z \in \mathbb{C}$ *tali che* $|z| = 2$.
4. $z \in \mathbb{C}$ *tali che* $\arg(z) = 2$.

Esercizio 4.16. [BBY77] *Mettere in forma esponenziale i seguenti complessi*

1. $2 + 5i$.
2. $-1 - 2i$.
3. $\frac{1}{i}$.
4. $\frac{2-i}{1+i}$.

Esercizio 4.17. [BBQ77] *Semplificare le seguenti espressioni complesse*

1. $(3+i)(3-i)\left(\frac{1}{5} + i\frac{1}{10}\right)$.
2. $a^2 - b^2$.
3. $a^2 + b^2$.
4. $a^4 + b^4$.
5. $a^8 + b^8$.

Esercizio 4.18. [BBB77] *Calcolare* $(-1-i)^9$*,* $i^{2135789}$*,* $(1-5i)^5$

Esercizio 4.19. [BBB83] *Calcolare* $\sqrt[4]{1-i}$*,* $\sqrt[17]{-i}$*,* $\sqrt[17]{2-5i}$ *e disegnarli sul piano di Argand-Gauss*

Esercizio 4.20. [BBW83] *Dato* $z = e^{-i\pi/6} + e^{-i\pi/6}$

1. *Esprimere* z *in forma cartesiana, trigonometrica, esponenziale.*
2. *Determinare le radici cubiche di* z.

Esercizio 4.21. [BBP83] *Trovare le radici complesse delle equazioni*

1. $z^2 + z + 1 = 0$.

2. $z^2 - 2z - i = 0$.
3. $(3i - 9)z^2 + (5 - 3i)z + 2i = 0$.
4. $z^2 i - (i + 4)z - 3i + 1 = 0$.

Esercizio 4.22. [BBB62] *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *le seguenti equazioni:*

1. $z^4 - 16 = 0$.
2. $z^4 - 4 = 0$.
3. $z^{12} - 1 = 0$.
4. $\frac{z^{12}-1}{z^4-1} = 0$.

Esercizio 4.23. [BBR83] *Risolvere le seguenti equazioni complesse e disegnare le soluzioni sul piano di Argand-Gauss*

1. $e^z = e^{3z-\overline{z}}$
2. $e^{2z-1} = e^{z-\overline{z}}$
3. $e^{z\overline{z}} = 3$

Esercizio 4.24. [BBL83] *Risolvere le seguenti equazioni complesse e disegnare le soluzioni sul piano di Argand-Gauss*

1. $z^3\overline{z} = i$
2. $z^2\overline{z}^4 = z^6$
3. $z^2\overline{z}^4 = z^4$

Esercizio 4.25. [BBB48] $(\sqrt[7]{1}_{\mathbb{C}}, \cdot)$ *è un gruppo moltiplicativo con la moltiplicazione di* $(\mathbb{C}, \cdot)$*?*

Esercizio 4.26. [BBX48] *Dato* $n > 1$, $(\sqrt[n]{1}_{\mathbb{C}}, \cdot)$ *è un gruppo moltiplicativo con la moltiplicazione di* $(\mathbb{C}, \cdot)$*?*

4.3 Prima prova di autovalutazione

`[Auto1]` [Tempo stimato 2h]

1. Determinare l'inverso di $2+3\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.
2. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ è un campo con le operazioni standard? Se sì dare la formula per l'inverso di $a+b\sqrt{3}$.
3. Sia $\mathbb{Z}_5$ l'insieme dei numeri interi con l'uguaglianza ridefinita: per $x, y \in \mathbb{Z}_5$

   $$x = y \Leftrightarrow \text{ il resto della divisione per 5 di } x \text{ e } y \text{ è uguale}$$

   Quanti elementi distinti esistono in $\mathbb{Z}_5$?
4. (Difficile) L'insieme $\mathbb{Z}_5$ è un gruppo rispetto alla somma? Un anello rispetto alla somma e alla moltiplicazione? Un campo rispetto alla somma e moltiplicazione?
5. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ il sistema di equazioni $\begin{cases} z^3 - 2z^2 + i - 2 = 0 \\ z^4 - 1 = 0 \end{cases}$.
6. Disegnare sul piano di Argand-Gauss le soluzioni dell'equazione $e^{iz} = e^{2\overline{z}}$.
7. Disegnare sul piano di Argand Gauss le soluzioni dell'equazione $z^5 = \overline{z}^5$.
8. Disegnare sul piano di Argand Gauss le soluzioni dell'equazione $e^{z+1} = e^{\overline{z}-1}$.