

4.3 Prima prova di autovalutazione

[Auto1] [Tempo stimato 2h]

1. Determinare l'inverso di $2 + 3\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Soluzione. $-\frac{2-\sqrt{3}}{23}$

□

2. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ è un campo con le operazioni standard? Se sì dare la formula per l'inverso di $a + b\sqrt{3}$.

Soluzione. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ è un campo, e $(a + \sqrt{3}b)^{-1} = \frac{2-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}$

□

3. Sia $\mathbb{Z}_5$ l'insieme dei numeri interi con l'uguaglianza ridefinita: per $x, y \in \mathbb{Z}_5$

$$x = y \Leftrightarrow \text{il resto della divisione per 5 di } x \text{ e } y \text{ è uguale}$$

Quanti elementi distinti esistono in $\mathbb{Z}_5$?

Soluzione. 5

□

4. (Difficile) L'insieme $\mathbb{Z}_5$ è un gruppo rispetto alla somma? Un anello rispetto alla somma e alla moltiplicazione? Un campo rispetto alla somma e moltiplicazione?

Soluzione. Sì. Sì. Sì.

□

5. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ il sistema di equazioni $\begin{cases} z^3 - 2z^2 + i - 2 = 0 \\ z^4 - 1 = 0 \end{cases}$

Soluzione. $z = i$

□

6. Disegnare sul piano di Argand-Gauss le soluzioni dell'equazione $e^{iz} = e^{2\bar{z}}$.

Soluzione. $z = \frac{2}{3}k\pi(1 - 2i)$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

□

7. Disegnare sul piano di Argand Gauss le soluzioni dell'equazione $z^5 = \bar{z}^5$.

Soluzione. Le semirette $\theta = \frac{k}{5}\pi$, con $k = 0, \dots, 9$.

□

8. Disegnare sul piano di Argand Gauss le soluzioni dell'equazione $e^{z+1} = e^{\bar{z}-1}$.

Soluzione. Non esistono soluzioni.

□