24.4 Sesta prova di autovalutazione A- esercizi secchi

`[Auto6A]` [Tempo stimato 1h] Tutti gli esercizi valgono 3 punti, tranne il primo, che ne vale 6.

1. Dato l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato alla matrice
$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 7 & 3 \\ 11 & 1 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
determinare il coefficente di testa del polinomio $p_T(\lambda) - \lambda^4$.
2. Scrivere il polinomio caratteristico della matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
3. Scrivere il polinomio minimo della matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
4. Dire se la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ soddisfa la condizione $A^{16} = 0$
5. Dare la forma di Jordan di $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
6. Dare una matrice diagonale simile a $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$
7. Determinare il numero di radici reali del polinomio $f(x) = x^4 - x^3 - 1$
8. Determinare il numero di radici reali in $(0, 2)$ del polinomio $f(x) = x^4 - x^3 - 1$
9. Il polinomio $f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$ è squarefree?

24.5 Sesta prova di autovalutazione B compito

`[Auto6B]` [Tempo stimato 3h15m]

PRIMA PARTE
Punteggio: risposta corretta = 2 pt

SCRIVERE I RISULTATI DELLA PRIMA PARTE SU QUESTO FOGLIO

Nome e cognome IN STAMPATELLO LEGGIBILE

Cognome: **Nome:**

1. Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ l'equazione $\overline{z^3}z^5 = -1$

2. Al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & a & 1 & b & a^2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}$

3. Dare una descrizione cartesiana dello spazio vettoriale $V = \mathrm{Span}((1,1,1,1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$

4. Determinare una base dell'intersezione dei sottospazi di $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$

$$V_1 = \mathrm{Span}(x+1, x+3, x^3 - 7x + 31) \qquad V_2 = \mathrm{Span}(x^2+2, x^2+4, x^3 - 17x^2 + 13)$$

5. Dato l'endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $A = (M_T)_{E_2}^{E_2}$ tale che $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_2 = 0$, dire se T è diagonalizzabile e perché (non più di due righe di motivazione, nessun calcolo).

Alcune regole pratiche sullo scritto

- Chi non vuole consegnare deve comunque lasciarmi il testo con nome e cognome.
- Dopo l'inizio dello sxcritto, non sarà possibile andare in bagno per due ore. Dopo, solo consegnandomi il cellulare. Andateci immediatamente prima che si inizi. Ovvero, ADESSO.
- È possibile consultare qualunque materiale scritto o stampato, tranne raccolte di esercizi svolti.
- Sono ammesse calcolatrici semplici. NON sono amessi in aula cellulari/tablet/laptop e simili.
- Se avete bisogno di un foglio, e potete, alzatevi e prendetelo. Altrimenti, ve lo porterò io.
- Non comunicate tra voi (ovviamente!)
- Fatemi pure domande sul testo. A qualcuna potrò rispondere, dipende.
- Le risposte alla prima parte vanno scritte SU QUESTO FOGLIO. Quelle della seconda parte, sui protocolli.
- Scrivete nome e cognome su ogni foglio che consegnate. A parte che sul testo, possibilmente in alto a destra.
- NON CONSEGNATE LA BRUTTA. Consegnate solo quello che volete venga valutato. Non piegate il foglio.
- Motivate tutti gli svolgimenti degli esercizi della seconda parte. Esercizi non motivati subiranno forti penalizzazioni.
- Potete scrivere a penna, matita, penna d'oca o quant'altro, basta che si capisca quello che scrivete.

SECONDA PARTE
I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni e scritti su fogli vostri.

Esercizio 24.52. [ZZZ01] *[8pt] Al variare di $a, b \in \mathbb{C}$ discutere le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} 2x + y + az = a \\ 3x + y + (a^2+1)z = 3 \\ 2x + y + bz = a^2 + 1 \end{cases}$$

Esercizio 24.53. [ZZZ02] *[8pt] Data $a \in \mathbb{R}$ e una funzione $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che*

$$T((2,3)) = (1,3) \quad T((1,a+1)) = (0,1) \quad T((3,5-a)) = (2,a+5)$$

1. *Determinare gli a per cui T può essere un morfismo.*

   Per queste a, supponendo T morfismo,

2. *Scegliere una base B di $\mathbb{R}^2$ e determinare $(M_T)_B^B$.*
3. *Determinare $T((1,1))$, se T è un isomorfismo e se esiste a tale che $T((1,1))^{-1} = (0,1)$*

Esercizio 24.54. [ZZZ03] *[8pt] Data la base B di $\mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ ed un endomorfismo $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che*

$$(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & 0 & a \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

discutere la diagonalizzabilità di T al variare di a.