20.4 Quinta prova di autovalutazione A- esercizi secchi

`[Auto5A]` [Tempo stimato 1:30h] Tutti gli esercizi valgono 3 punti, tranne il primo, che ne vale 6.

1. Dire quali dei seguenti $\mathbb{R}$-sottospazi di $\mathbb{C}^3$ sono isomorfi

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \ \mid \ x+2y+3z=0\} \\ V_2 &= \operatorname{Span}((1,1,0),(0,0,1),(0,0,1+i),(0,0,i)) \\ V_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \ \mid \ \operatorname{Re}(x) = \operatorname{Im}(x) = \operatorname{Im}(y) = 0\} \end{aligned}$$

Soluzione. $V_2 \simeq V_3$ □

2. Determinare una applicazione lineare $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T \circ T \not\equiv 0$ ma $T \circ T \circ T \equiv 0$.

Soluzione. Per esempio quella associata alla matrice $(M_T)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ □

3. Descrivere, se esiste, un morfismo $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker f = \operatorname{Im} f$.

Soluzione. per esempio quello associato alla matrice $(M_T)_{E_4}^{E_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ □

4. Data la base $B = (1,1,2),(0,1,1),(0,2,3)$ ed il morfismo

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (1,1,2) & \mapsto & (0,1,1) \\ & (0,1,1) & \mapsto & (0,2,3) \\ & (0,2,3) & \mapsto & (2,2,4) \end{array}$$

determinare $(M_T)_B^B$

Soluzione. $(M_T)_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ □

5. Per quali $a \in \mathbb{C}$ il morfismo

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (a,1,2) & \mapsto & (0,1,1) \\ & (0,a,-1) & \mapsto & (0,2,3) \\ & (0,2,a) & \mapsto & (2,2,4) \end{array}$$

è ben definito?

Soluzione. Per $a \neq 0, \pm\sqrt{2}i$ □

6. Data $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ base di $\mathbb{R}^3$ calcolare $\dim \ker T$ per

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \underline{v}_1 & \mapsto & (1,1,0,2) \\ & \underline{v}_2 & \mapsto & (3,4,0,7) \\ & \underline{v}_3 & \mapsto & (0,5,0,9) \end{array}$$

Soluzione. $\dim \ker T = 0$ □

7. (3pt) Per quali $a \in \mathbb{R}$ il morfismo

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (1,0,1) & \mapsto & (1,1,1) \\ & (1,1,1) & \mapsto & (1,2,3) \\ & (2,1,2) & \mapsto & (2,a,4) \end{array}$$

è ben definito?

Soluzione. $a = 3$ □

8. Determinare una base di $V = \{\underline{v} \in \mathbb{C}^3 \ \mid\ \underline{v} \perp (2,i,i)\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{C}^3$

Soluzione. Per esempio $B = \left(\frac{i}{2}, -1, 0\right), \left(\frac{i}{2}, 0, -1\right)$ □

9. Dato $V = \operatorname{Span}((1,2,2),(1,1,3))$ determinare una base ortonormale di V

Soluzione. $\frac{1}{3}(1,2,2), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ □

20.5 Quinta prova di autovalutazione B - esercizi lunghi

`[Auto5B]` [Tempo stimato 1h]

Esercizio 20.35. `[XXX00]` *Data la funzione*

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y-2z \\ x-2y+z \\ -2x+y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

1. *Dimostrare che f è lineare e determinare $(M_f)^{E_3}_{E_3}$.*
2. *Dire se f è iniettiva o surgettiva.*
3. *Determinare basi di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$*
4. *Data la base $\mathcal{B} = (0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)$, determinare $(M_f)^{\mathcal{B}}_{E_3}$.*
5. *Stabilire per quali di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\underline{v} = (1, k+1, k^2-2)$ appartiene a $\operatorname{Im} f$.*

Soluzione.

1. Dato che le componenti del vettore immagine $(x+y-2z, x-2y+z, -2x+y+z)$ sono polinomi omogenei di grado 1, f è lineare. Abbiamo

$$f(\underline{e}_1) = (1, 1, -2), \quad f(\underline{e}_2) = (1, -2, 1), \quad f(\underline{e}_3) = (-2, 1, 1),$$

e quindi

$$(M_f)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcoliamo il determinante di $(M_f)_{E_3}^{E_3}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi f non è iniettiva, quindi $\dim \ker f \geq 1$. Per il teorema della dimensione, $\dim \operatorname{Im} f = 3 - \dim \ker f$ e dato che $\dim \ker f \geq 1$ abbiamo $dim \operatorname{Im} f \leq 2$, quindi f non è surgettiva.

3. Per determinare $\ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f((x, y, z)) = \underline{0}\}$ risolviamo il sistema

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$

```
Mat[[1, 1, -2],
    [1, -2, 1],
    [-2, 1, 1]];
L:=RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -2]
     2^a-1*1^a [0, -3, 3]
     3^a+2*1^a [0, 3, -3]

Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, -2]
-------------- [0, -3, 3]
     3^a+1*2^a [0, 0, 0]

Mettiamo la matrice in forma standard

Scala2DiagonaleVerbose(L);
Metto tutti i pivots a 1
-------------- [1, 1, -2]
     2^a*-1/3  [0, 1, -1]
-------------- [0, 0, 0]

Cancello la colonna sopra il 2 pivot
```

```
   1^a*+1*2^a  [1, 0, -1]
-------------- [0, 1, -1]
-------------- [0, 0, 0]
```

Abbiamo quindi le relazioni

$$x = z, \qquad y = z$$

Imponendo queste relazioni sul vettore generico (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ otteniamo un vettore generico delle soluzioni $(\lambda, \lambda, \lambda) = \lambda(1, 1, 1)$. Quindi $(1, 1, 1)$ è una base di $\ker f$.

Sappiamo che $\operatorname{Im} f$ è generato delle colonne di

$$(M_f)_{E_3}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Guardando le colonne della riduzione in forma triangolare superiore di $(M_f)_{E_3}^{E_3}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vediamo che solo le prime due colonne hanno un pivot, e quindi solo le due prime colonne della matrice $(M_f)_{E_3}^{E_3}$ sono linearmente indipendenti. Una base di $\operatorname{Im} f$ è quindi $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$.

4. Abbiamo $\mathcal{B} = (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$

$$\begin{aligned} (M_f)_{E_3}^{\mathcal{B}} &= (M_f)_{E_3}^{E_3} \cdot M_{E_3}^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notiamo che per le proprietà del prodotto di matrici per avere $(M_f)_{E_3}^{\mathcal{B}}$ basta scambiare opportunamente le colonne di $(M_f)_{E_3}^{E_3}$.

5. Dato che una base di $\operatorname{Im} f$ è data da $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$, per trovare i k per cui $\underline{v} = (1, k+1, k^2-2) \in \operatorname{Im} f$ basta trovare i k per cui $\underline{v}$ è linearmente dipendente da $(1, 1, -2), (1, -2, 1)$. Mettiamo questi tre vettori per riga in una matrice, $\underline{v}$ come ultima riga, riduciamo con Gauss e vediamo per quali k l'ultima riga della riduzione è nulla

```
Use R::=Q[k];
M:=Mat([[1,-2,1],
        [1,1,-2],
        [1,k+1,k^2-2]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, -2, 1]
     2^a-1*1^a [0, 3, -3]
```

```
     3^a-1*1^a [0, k + 3, k^2 - 3]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=3
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
--------------   [1, -2, 1]
--------------   [0, 3, -3]
3^a-1/3k - 1*2^a [0, 0, k^2 + k]
```

Perche' la terza riga sia nulla è necessario e sufficente avere $k^2 + k = 0 \Leftrightarrow k \in \{0, -1\}$, quindi $\underline{v} \in \operatorname{Im} f$ se e solo se $k \in \{0, -1\}$.

$\square$

Esercizio 20.36. `[XXX01]` *Dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{K}^2$ linearmente indipendenti, $a \in \mathbb{K}$ ed un endomorfismo T tale che per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2$*

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^2 \\ & \underline{v}_1 - \underline{v}_2 & \mapsto & \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ & a\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 & \mapsto & \underline{v}_2 \end{array}$$

Determinare gli a tali che T sia iniettivo, surgettivo, isomorfismo e trovare $(M_T)^B_B$ per una opportuna base B.

Soluzione. Dato che $T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$, prendiamo come base $B = \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1$. Questi due vettori sono linearmente indipendenti dato che lo sono $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e quindi formano una base di $\mathbb{K}^2$. Vediamo di determinare l'immagine di $\underline{v}_1$. Abbiamo

$$\begin{cases} T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ T(a\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2) = \underline{v}_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} T(\underline{v}_1) - T(\underline{v}_2) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ aT(\underline{v}_1) + 2T(\underline{v}_2) = \underline{v}_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2T(\underline{v}_1) - 2T(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 \\ aT(\underline{v}_1) + 2T(\underline{v}_2) = \underline{v}_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2T(\underline{v}_1) - 2T(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 \\ (a+2)T(\underline{v}_1) = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = (\underline{v}_1 - \underline{v}_2) + \underline{v}_1 \end{cases}$$

Se avessimo $a = -2$, avremmo $\underline{0} = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ e $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi. Quindi possiamo supporre per ipotesi che $\boxed{a \neq -2}$ e

$$T(\underline{v}_1) = \frac{1}{a+2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) + \frac{1}{a+2}\underline{v}_1$$

Date le immagini di $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1$ in base B abbiamo la matrice

$$(M_T)^B_B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}$$

che, dato $a \neq -2$, è non singolare e quindi l'endomorfismo T è invertibile e quindi un isomorfismo e quindi iniettivo e surgettivo. $\square$

Esercizio 20.37. `[ASD02]` *Sia dato un morfismo di $\mathbb{K}$-spazi $T\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ che soddisfa le condizioni*

$$T(3x^2 - 1) = x^2 \qquad T(x+2) = 3$$

1. *Descrivere tutti i morfismi T che soddisfano le condizioni.*
2. *Trovare e descrivere, se possibile dei particolari morfismi T per cui (svolgere separatamente i tre casi):*
   (a) $rk(T) = 4$ *e* $1 \in \mathrm{Im}(T)$.
   (b) $rk(T) = 3$ *e* $x^3 + x^2 + 1 \in \mathrm{Im}(T)$
   (c) $rk(T) = 2$ *e* $x^3 + x^2 + 1 \in \mathrm{Im}(T)$

Soluzione.

1. Descrivere tutti i morfismi T che soddisfano le condizioni.

   È immediato vedere che i tre vettori $3x^2-1, x+2, 1$, tutti di grado diverso, siano linearmente indipendenti e quindi formino una base B di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$, che ha dimensione 3. I morfismi che soddisfano le condizioni sono quindi scrivibili, usando la base B, come

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{K}[x]_{\leq 2} & \to & \mathbb{K}[x]_{\leq 3} \\ & 3x^2-1 & \mapsto & x^2 \\ & x+2 & \mapsto & 3 \\ & 1 & \mapsto & ax^3+bx^2+cx+d \end{array} \qquad \text{con } a,b,c,d \in \mathbb{K}$$

2. Trovare e descrivere, se possibile dei particolari morfismi T per cui (le condizioni sono indipendenti)

   (a) $rk(T) = 4$ e $1 \in \mathrm{Im}(T)$. Non esiste alcun morfismo che soddisfi le condizioni. Per il teorema della dimensione abbiamo

$$\dim \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = rk(T) + \dim\ker T \Leftrightarrow 3 = 4 + \dim\ker T$$

   e la dimensione è sempre positiva o nulla.

   (b) $rk(T) = 3$ e $x^3 + x^2 + 1 \in \mathrm{Im}(T)$. Ragioniamo come sopra. Un esempio di morfismo è

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{K}[x]_{\leq 2} & \to & \mathbb{K}[x]_{\leq 3} \\ & 3x^2-1 & \mapsto & x^2 \\ & x+2 & \mapsto & 3 \\ & 1 & \mapsto & x^3 \end{array}$$

   I vettori $3x^2-1, x+2, 1$ sono una base B di $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$. Dato che

$$x^3 + x^2 + 1 = T(1) + T(3x^2-1) + \frac{1}{3}T(x+2) = T(1 + 3x^2 - 1 + \frac{1}{3}(x+2))$$

   abbiamo che $x^3 + x^2 + 1 \in \mathrm{Im}(T)$.

   (c) $rk(T) = 2$ e $x^3 + x^2 + 1 \in \mathrm{Im}(T)$. Non esiste alcun morfismo che soddisfi le condizioni. Infatti se $x^3 + x^2 + 1 \in \mathrm{Im}(T)$, abbiamo in $\mathrm{Im}\, T$ tre polinomi di grado diverso. Il rango di T è quindi almeno 3, contraddicendo la condizione $rk(T) = 2$.

$\square$