20.4 Quinta prova di autovalutazione A- esercizi secchi

`[Auto5A]` [Tempo stimato 1:30h] Tutti gli esercizi valgono 3 punti, tranne il primo, che ne vale 6.

1. Dire quali dei seguenti $\mathbb{R}$-sottospazi di $\mathbb{C}^3$ sono isomorfi

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \ \mid \ x+2y+3z=0\} \\ V_2 &= \operatorname{Span}((1,1,0),(0,0,1),(0,0,1+i),(0,0,i)) \\ V_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \ \mid \ \operatorname{Re}(x)=\operatorname{Im}(x)=\operatorname{Im}(y)=0\} \end{aligned}$$

2. Determinare una applicazione lineare $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $T \circ T \not\equiv 0$ ma $T \circ T \circ T \equiv 0$.

3. Descrivere, se esiste, un morfismo $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\ker f = \operatorname{Im} f$.

4. Data la base $B = (1,1,2),(0,1,1),(0,2,3)$ ed il morfismo

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (1,1,2) & \mapsto & (0,1,1) \\ & (0,1,1) & \mapsto & (0,2,3) \\ & (0,2,3) & \mapsto & (2,2,4) \end{array}$$

determinare $(M_T)_B^B$

5. Per quali $a \in \mathbb{C}$ il morfismo

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (a,1,2) & \mapsto & (0,1,1) \\ & (0,a,-1) & \mapsto & (0,2,3) \\ & (0,2,a) & \mapsto & (2,2,4) \end{array}$$

è ben definito?

6. Data $B = \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ base di $\mathbb{R}^3$ calcolare $\dim \ker T$ per

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & \underline{v}_1 & \mapsto (1,1,0,2) & \\ & \underline{v}_2 & \mapsto (3,4,0,7) & \\ & \underline{v}_3 & \mapsto (0,5,0,9) & \end{array}$$

7. (3pt) Per quali $a \in \mathbb{R}$ il morfismo

$$\begin{array}{cccc} T\colon & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ & (1,0,1) & \mapsto & (1,1,1) \\ & (1,1,1) & \mapsto & (1,2,3) \\ & (2,1,2) & \mapsto & (2,a,4) \end{array}$$

è ben definito?

8. Determinare una base di $V = \{\underline{v} \in \mathbb{C}^3 \ \mid \ \underline{v} \perp (2,i,i)\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{C}^3$

9. Dato $V = \operatorname{Span}((1,2,2),(1,1,3))$ determinare una base ortonormale di V

20.5 Quinta prova di autovalutazione B - esercizi lunghi

`[Auto5B]` [Tempo stimato 1h]

Esercizio 20.35. `[XXX00]` *Data la funzione*

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y-2z \\ x-2y+z \\ -2x+y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

1. *Dimostrare che f è lineare e determinare $(M_f)_{E_3}^{E_3}$.*
2. *Dire se f è iniettiva o surgettiva.*
3. *Determinare basi di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$*
4. *Data la base $\mathcal{B} = (0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)$, determinare $(M_f)_{E_3}^{\mathcal{B}}$.*
5. *Stabilire per quali di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\underline{v} = (1, k+1, k^2-2)$ appartiene a $\operatorname{Im} f$.*

Esercizio 20.36. `[XXX01]` *Dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{K}^2$ linearmente indipendenti, $a \in \mathbb{K}$ ed un endomorfismo T tale che per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2$*

$$T\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^2 \\ \underline{v}_1 - \underline{v}_2 & \mapsto & \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \\ a\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2 & \mapsto & \underline{v}_2 \end{array}$$

Determinare gli a tali che T sia iniettivo, surgettivo, isomorfismo e trovare $(M_T)_B^B$ per una opportuna base B.

Esercizio 20.37. `[ASD02]` *Sia dato un morfismo di $\mathbb{K}$-spazi $T\colon \mathbb{K}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ che soddisfa le condizioni*

$$T(3x^2-1) = x^2 \qquad T(x+2) = 3$$

1. *Descrivere tutti i morfismi T che soddisfano le condizioni.*
2. *Trovare e descrivere, se possibile dei particolari morfismi T per cui (svolgere separatamente i tre casi):*
   (a) $rk(T) = 4$ *e* $1 \in \operatorname{Im}(T)$.
   (b) $rk(T) = 3$ *e* $x^3 + x^2 + 1 \in \operatorname{Im}(T)$
   (c) $rk(T) = 2$ *e* $x^3 + x^2 + 1 \in \operatorname{Im}(T)$