16.1 Quarta prova di autovalutazione A- esercizi secchi

`[Auto4A]` [Tempo stimato 45m] Tutti gli esercizi valgono 1 punto per la risposta esatta, secca, senza giustificazioni, 0 altrimenti, tranne l'ultimo esercizio, che vale 3 punti.

1. Dare una descrizione cartesiana dello spazio vettoriale $V = \text{Span}((1,1,1,1)) \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{K}^4$

   Soluzione. $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \ \mid \ x = y, x = z, x = t\}$ □

2. Dare una base dell' $\mathbb{R}$-spazio vettoriale $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

   Soluzione. $B = (1,0),(i,0),(0,1)$ □

3. Determinare una base dell'$\mathbb{R}$-spazio

   $$V = \text{Span}(x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6, 3x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6, x^5 + x^6, 5x^5 + 2x^6, x^5 - x^6)$$

   Soluzione. I primi quattro polinomi, oppure x^3, x^4, x^5, x^6 o altre. □

4. Determinare la dimensione del $\mathbb{C}$-spazio

   $$V = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1-i & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\right) \underset{SSP}{\subseteq} \text{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

   Soluzione. 3 □

5. Dati i sottospazi di $\mathbb{Q}^4$

   $$V = \text{Span}((1,2,1,0),(3,2,1,0)), \quad W = \text{Span}((1,1,1,0),(1,1,2,0))$$

   La loro somma è diretta?

   Soluzione. No. □

6. Con la notazione $\underline{v} \perp \underline{u} \Leftrightarrow \underline{v} \cdot \underline{u} = \underline{0}$, determinare la dimensione di

   $$V = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ \underline{v} \perp (1,2,1),\ \underline{v} \perp (5,2,3),\ \underline{v} \perp (3,2,2)\} \underset{SSP}{\subseteq} \mathbb{R}^3$$

   Soluzione. $\dim V = 2$. □

7. Determinare una base del sottospazio vettoriale $V = \left\{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 \ \middle| \ \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}\right\}$

   Soluzione. $B = \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{e}_5$. □

8. Determinare la dimensione come $\mathbb{R}-$ spazio di

   $$V = Span((i,1),(i+3,3),(i,3)) \subset \mathbb{C}^2$$

Soluzione. 3 □

9. Determinare la dimensione del sottospazio vettoriale $W = \{(a+b, 2a+b-2c, a+b, a+2b+2c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

   Soluzione. 2 □

10. Determinare due sottospazi V_1, V_2 di $\mathbb{C}^2$ tali che $A = \{\underline{v} \in \mathbb{C}^2 \mid \underline{v} \cdot \underline{v}\} = V_1 \cup V_2$

    Soluzione. $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x+iy = 0\}$, $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x-iy = 0\}$ oppure $V_1 = \mathrm{Span}(i, 1)$, $V_2 = \mathrm{Span}($ □

16.2 Quarta prova di autovalutazione B - esercizi lunghi

[Auto4B]

[Tempo stimato 2h30m]

Esercizio 16.42 (6pt). [KKL13] *Dati i vettori in* $\mathbb{R}^4$

$$(1, 1, 4, 7, 0),\ (1, 1, 4, 7, 8),\ (1, 1, 3, 5, 3),\ (1, 1, 2, 3, 4)$$

determinare una base di $\mathbb{C}^4$ *che ne contenga il massimo numero possibile.*

Soluzione. Usiamo il teorema del completamento. Mettiamo i vettori come righe di una matrice, e riduciamola cona Gauss. I pivot della matrice ci forniranno tutte le informazioni necessarie.

```
M:=Mat([[1, 1, 4, 7, 0],
        [1, 1, 4, 7, 8],
        [1, 1, 3, 5, 3],
        [1, 1, 2, 3, 4]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 4, 7, 0]
   2^a-(1)*1^a [0, 0, 0, 0, 8]
   3^a-(1)*1^a [0, 0, -1, -2, 3]
   4^a-(1)*1^a [0, 0, -2, -4, 4]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 4, 7, 0],
     [0, 0, -1, -2, 3],
     [0, 0, 0, 0, 8],
     [0, 0, -2, -4, 4]])
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 3]=-1
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 4, 7, 0]
-------------- [0, 0, -1, -2, 3]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 8]
   4^a-(2)*2^a [0, 0, 0, 0, -2]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 5]=8
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 4, 7, 0]
-------------- [0, 0, -1, -2, 3]
-------------- [0, 0, 0, 0, 8]
4^a-(-1/4)*3^a [0, 0, 0, 0, 0]
```

Quindi, la quarta riga è combinazione lineare delle prime tre, e non può fare parte di una base che le contenga. Vediamo una base che contenga i primi tre vettori. I pivot sono in posizione $1, 3, 5$, e quindi la base che contiene i primi tre vettori è $B = (1, 1, 4, 7, 0),\ (1, 1, 4, 7, 8),\ (1, 1, 3, 5, 3), \underline{e}_2, \underline{e}_4$. □

Esercizio 16.43 (6pt). [KL13a] *Dati i due sottospazi di* $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$M = Span(x^3 - 1, 2x^2 + x, x^2 + x + 1)$$

$$N = Span(2x^3 - 6x^2 - 3x - 2, 3x^3 - 4x^2 - 2x - 3, x^3 + 3x^2 + 2x)$$

Determinare

- *dim*(M), *dim*(N).
- *dim*$(M \cap N)$.
- *Una base di* $M \cap N$.

Soluzione: scriviamo i polinomi mediante le loro coordinate rispetto alla base $1, x, x^2, x^3$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
Con un piccolo abuso di notazione, denotiamo M e N come

$$M = \mathrm{Span}(\underline{u}_1 = (1, 0, 0, -1), \underline{u}_1 = (0, 2, 1, 0), \underline{u}_1 = (0, 1, 1, 1))$$
$$N = \mathrm{Span}(\underline{v}_1 = (2, -6, -3, -2), \underline{v}_2 = (3, -4, -2, -3), \underline{v}_3 = (1, 3, 2, 0))$$

- Calcoliamo $\dim(N)$, poi dedurremo $\dim(M)$ facendo i conti per il calcolo di una base di $M \cap N$. Costruiamo una matrice le cui colonne sono i generatori di N riduciamola e vediamo il rango (ricordiamo che il numero di righe e di colonne linearmente indipendenti è uguale, e quindi la dimensione di N si può calcolare indifferentemente dal rango della matrice che ha per righe o per colonne i generatori di N).

```
N:=Mat[[ 2, 3, 1],
       [-6,-4, 3],
       [-3,-2, 2],
       [-2,-3, 0]];
L:=RiduciScalaVerbose(N);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=2
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 3, 1]
     2^a+3*1^a [0, 5, 6]
   3^a+3/2*1^a [0, 5/2, 7/2]
     4^a+1*1^a [0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=5
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 3, 1]
-------------- [0, 5, 6]
   3^a-1/2*2^a [0, 0, 1/2]
  0 sotto pivot[0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1/2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [2, 3,   1]
-------------- [0, 5,   6]
-------------- [0, 0, 1/2]
     4^a-2*3^a [0, 0,   0]
```

dato che ci sono tre pivot, i tre generatori iniziali di N (e anche quelli dati dalle colonne della matrice finale) sono linearmente indipendenti e $\dim(N) = 3$.

- Per calcolare $\dim(M)$ e $\dim(N + M)$, da cui calcolaremo $\dim(M \cap N)$, costruiamo la matrice le cui colonne sono i generatori di M e quelli di N e riduciamola con Gauss

```
MN:=Mat[[ 1, 0, 0,  2,  3, 1],
        [ 0, 2, 1, -6, -4, 3],
        [ 0, 1, 1, -3, -2, 2],
        [-1, 0, 1, -2, -3, 0]];
```

```
L:=RiduciScalaVerbose(MN);L;
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0, 0, 2, 3, 1]
  0 sotto pivot[0, 2, 1, -6, -4, 3]
  0 sotto pivot[0, 1, 1, -3, -2, 2]
     4^a+1*1^a [0, 0, 1, 0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=2
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0, 0, 2, 3, 1]
-------------- [0, 2, 1, -6, -4, 3]
   3^a-1/2*2^a [0, 0, 1/2, 0, 0, 1/2]
  0 sotto pivot[0, 0, 1, 0, 0, 1]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 3]=1/2
Cancello la 3^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 0,   0,  2,  3,   1]
-------------- [0, 2,   1, -6, -4,   3]
-------------- [0, 0, 1/2,  0,  0, 1/2]
     4^a-2*3^a [0, 0,   0,  0,  0,   0]
```

Dato che ci sono tre pivot, $\dim(M + N) = 3$. Dato che nelle prime tre colonne, quelle relative a M, ci sono tre pivot, le tre colonne sono linearmente indipendenti e quindi $\dim(M) = 3$. quindi, per la formula di Grassman

$$\dim(M \cap N) = \dim(M) + \dim(N) - \dim(M + N) = 3 + 3 - 3 = 3$$

quindi $\dim(M \cap N) = 3$.

- Dato che $M \supseteq M \cap N$ e $\dim(M) = \dim(M \cap N) = 3$, abbiamo che $M = M \cap N$, e quindi ogni base di M, per esempio

$$(x^3 - 1, 2x^2 + x, x^2 + x + 1)$$

che è base perché genera M ed ha tanti elementi quanto la dimensione di M è uguale alla dimensione di $M \cap N$.

□

Esercizio 16.44 (9pt)**.** `[KKI88]` *Dati i sottospazi di* $\mathbb{R}^4$

$$V = \text{Span}((1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 2, 1, 3), (4, 8, 4, 6))$$

e

$$W = \text{Span}((1, 1, 2, a), (1, a, 1, a))$$

determinare basi di V, W, $V + W$, $V \cap W$ *al variare di* $a \in \mathbb{R}$. *Dire se* $\underline{v} = (3, 6, 5, 2) \in V + W$.

Soluzione. Procediamo col metodo standard. Troviamo una base di W

Verifichiamo, al variare di a, l'indipendenza lineare dei generatori di W. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix}$$

ha rango due, visto che la sottomatrice $A_{(1,2);(1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è non singolare. I due generatori di W sono quindi indipendenti e formano una sua base, e la sua dimensione due, per ogni a.

Riduciamo con Gauss la matrice le cui colonne sono i generatori di V, W.

```
Use R::=Q[a];
M:=Mat([[1, 1, 1, 4, 1, 1],
        [2, 2, 2, 8, 1, a],
        [1, 1, 1, 4, 2, 1],
        [1, 2, 3, 6, a, a]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 4, 1, 1]
   2^a-(2)*1^a [0, 0, 0, 0, -1, a - 2]
   3^a-(1)*1^a [0, 0, 0, 0, 1, 0]
   4^a-(1)*1^a [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1]
Scambio la 2^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 1, 1, 4, 1, 1],
     [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1],
     [0, 0, 0, 0, 1, 0],
     [0, 0, 0, 0, -1, a - 2]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 4, 1, 1]
-------------- [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, 1, 0]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 0, -1, a - 2]
Ho trovato il pivot in posizione A[3, 5]=1
Cancello la 5^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 1, 1, 4, 1, 1]
-------------- [0, 1, 2, 2, a - 1, a - 1]
-------------- [0, 0, 0, 0, 1, 0]
  4^a-(-1)*3^a [0, 0, 0, 0, 0, a - 2]
```

Per ogni a ci sono solo 2 pivot nelle prime quattro colonne, quelle associate a V, e quindi $\dim V = 2$. Una base di V si ha dai vettori associati alle colonne che contengono i pivot, quindi una base di V è $(1,2,1,1),(1,2,1,2)$. Esaminiamo i casi $a \neq 2,\ a = 2$

- $a \neq 2$. Ci sono 4 pivot, $\dim V + W = 4$ e una base di $V + W = \mathbb{R}^4$ è per esempio E_4.

  Dalla formula di Grassmann, abbiamo $\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 2 + 2 - 4 = 0$.

  Quindi $\dim V \cap W = 0$ e non ho base dell'intersezione. Il vettore $\underline{v}$, come ogni altro vettore di $\mathbb{R}^4$ appartiene a $V + W = \mathbb{R}^4$.

- $a = 2$. Ci sono 3 pivot, quindi $\dim V + W = 3$ e una base di $V + W$ è

  $$(1,2,1,1),(1,2,1,2),(1,1,2,a) \xrightarrow{a=2} (1,2,1,1),(1,2,1,2),(1,1,2,2)$$

  Dalla formula di Grassmann, abbiamo

  $$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \dim V + W = 2 + 2 - 3 = 1$$

  La relazione tra i coefficenti del vettore generico di W

  $$\alpha(1,1,2,a) + \beta(1,a,1,a) \xrightarrow{a=2} \alpha(1,1,2,2) + \beta(1,2,1,2)$$

è data dalle ultime due entrate dell'ultima riga non nulla della matrice (la terza) $(1,0)$ moltiplicate per (α,β) ed uguagliate a zero

$$(1,0)\cdot(\alpha,\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$$

Quindi un vettore generico dell'intersezione è $\beta(1,2,1,2)$ ed una base per esempio $(1,2,1,2)$.

Per vedere se

$$(3,6,5,2)=\underline{v}\in V+W=\mathrm{Span}((1,2,1,1),(1,2,1,2),(1,1,2,2))$$

vediamo se in una riduzione di Gauss si annulla la quarta riga della matrice

```
M:=Mat([[1,2,1,1],
        [1,2,1,2],
        [1,1,2,2],
        [3,6,5,2]]);
RiduciScalaVerbose(M);
Ho trovato il pivot in posizione A[1, 1]=1
Cancello la 1^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1, 1]
   2^a-(1)*1^a [0, 0, 0, 1]
   3^a-(1)*1^a [0, -1, 1, 1]
   4^a-(3)*1^a [0, 0, 2, -1]
Scambio la 2^a e la 3^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 2, 1, 1],
     [0, -1, 1, 1],
     [0, 0, 0, 1],
     [0, 0, 2, -1]]);
Ho trovato il pivot in posizione A[2, 2]=-1
Cancello la 2^a colonna, sotto il pivot
-------------- [1, 2, 1, 1]
-------------- [0, -1, 1, 1]
  0 sotto pivot[0, 0, 0, 1]
  0 sotto pivot[0, 0, 2, -1]
Scambio la 3^a e la 4^a riga
Adesso la matrice e'
Mat([[1, 2, 1, 1],
     [0, -1, 1, 1],
     [0, 0, 2, -1],
     [0, 0, 0, 1]])
```

La quarta riga non si riduce a zero e quindi $\underline{v}\notin V+W$.

Riassumendo, abbiamo che per ogni a si ha che $(1,2,1,1),(1,2,1,2)$ è base di V e $(1,1,2,a),(1,a,1,a)$ è base di W.

- se $a\neq 2$ abbiamo che E_4 è base di $V+W=\mathbb{R}^4$, $V\cap V=\{\underline{0}\}$ e quindi non ha base ed il vettore $((3,6,5,2)\in V+W$.
- Se $a=2$ abbiamo che $(1,2,1,1),(1,2,1,2),(1,1,2,2)$ è base di $V+W$, $(1,2,1,2)$ è base di $V\cap W$ ed il vettore $((3,6,5,2)\notin V+W$.

$\square$