ORIGINI DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA

PROCEDENDO VERSO LA COSTRUZIONE DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA

LO SPAZIO AFFINE E LO SPAZIO PROIETTIVO

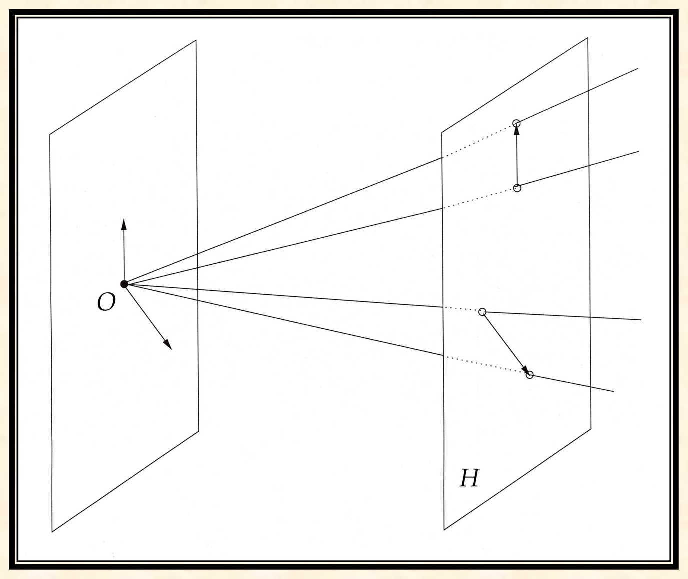
Per continuare ad andare avanti in questo percorso storico, si rende necessario fare un inciso per definire alcuni concetti che cronologicamente furono posteriori.

I geometri del Rinascimento e dei secoli successivi lavoravano nello spazio tridimensionale, però presto si resero conto che avevano bisogno di altri oggetti oltre ai punti, rette, piani ed altre figure: si accorsero che il fenomeno del **parallelismo** poteva esser trattato in maniera unificata con l'incidenza di sottospazi se si considera che sottospazi paralleli non hanno in comune punti bensì **direzioni.** La considerazione delle direzioni, o *classi di parallelismo,* come "punti" da aggiungere allo spazio tridimensionale ha portato con il tempo alla nozione di spazio proiettivo.

I punti di uno *spazio proiettivo P, di dimensione n,* sono le rette per l'origine *O* di uno spazio vettoriale *V* (associato a *P*) di dimensione *n+1*.

Quindi, una *retta proiettiva* rappresenta le direzioni di un piano affine e un *piano proiettivo* rappresenta le direzioni di uno spazio affine di dimensione tre.

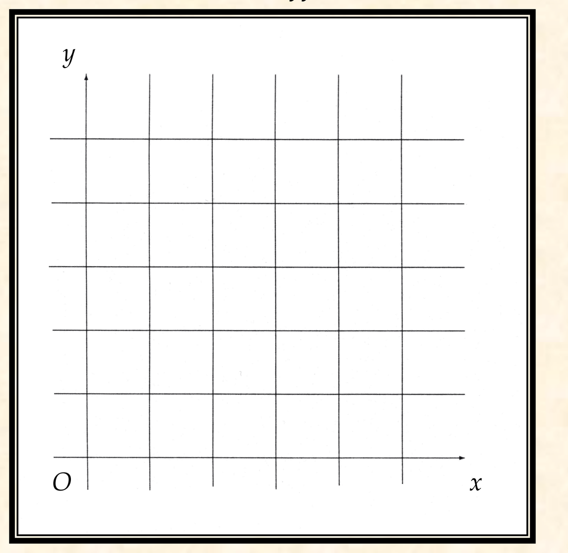
Pertanto, se fissiamo un *iperpiano H di V* (considerato ora come spazio affine) *che non passi per l'origine O, le rette di V che passano per O e non sono parallele ad H corrispondono biunivocamente con i punti di H.*



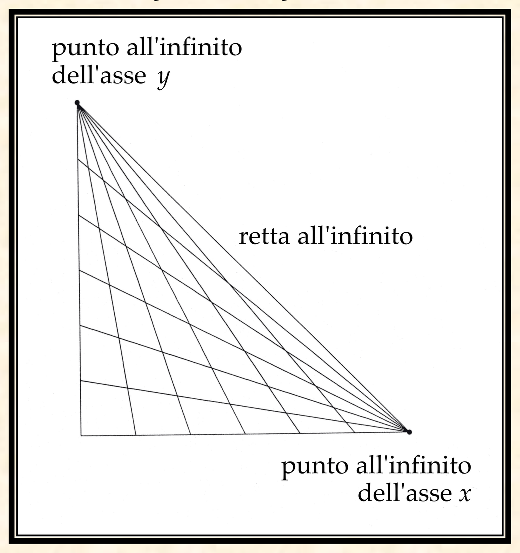
Le restanti rette che passano per *O* sono parallele a *H* e rappresentano le direzioni distinte di parallelismo di *H*. Si chiamano i *punti all'infinito di H* (idea visiva del fatto che due rette parallele hanno in comune la direzione, qualche cosa che non si vede però che dà l'impressione di verificarsi "all'infinito", "ove la nostra vista non arriva").

Possiamo osservare che i punti all'infinito di *H* formano a loro volta uno spazio proiettivo di dimensione *n-1*, secondo la definizione precedente, con il che abbiamo *che P si decompone in una unione disgiunta dello spazio affine H, di dimensione n, e di uno spazio proiettivo P', di dimensione n-1,* che si chiama l'*iperpiano all'infinito*. Per esempio una retta proiettiva è una retta affine più un punto all'infinito, e un piano proiettivo è un piano affine più una retta proiettiva di punti all'infinito.

Piano affine



Completato proiettivo



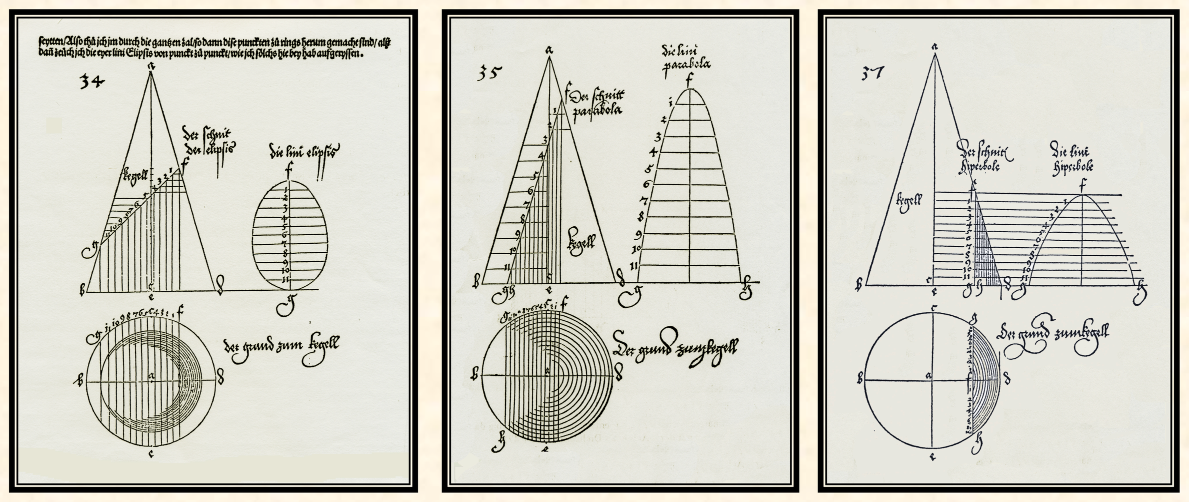
La definizione data di spazio proiettivo si collega direttamente con gli studi di **prospettiva, sezioni e proiezioni** già considerati nei pannelli precedenti: se l'origine delle coordinate *O* è il fuoco da cui partono i raggi o rette vettoriali, allora identifichiamo due *figure prospettive,* cioè che siano proiezione da *O* una dell'altra, giacchè i punti di ciascun raggio sono identificati tra di loro quando si trasporta la situazione alla geometria dello spazio proiettivo.

Si risponde così alle domande di Leon Battista Alberti del 1435, "Che relazione c'è tra due sezioni della stessa figura? E quali sono le proprietà comuni di due sezioni qualunque?". Infatti, in accordo con le spiegazioni precedenti, risulta che:

- Due sezioni della stessa figura sono *proiettivamente uguali.*
- Le proprietà comuni alle due sezioni sono quelle che provengono dalla Geometria Proiettiva, non da quella Affine.

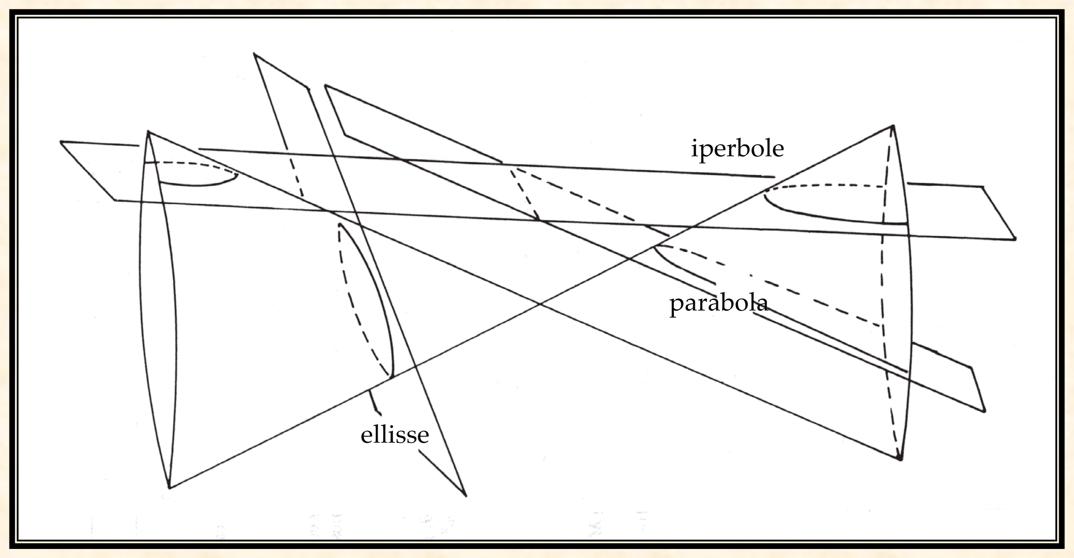
LE SEZIONI CONICHE

Lo studio delle sezioni coniche si iniziò nella Grecia Classica con Menecmo nel IV secolo a.C. e soprattutto con Apollonio alla fine del secolo III a.C.. I lavori di quest'ultimo ripresero interesse nel secolo XVII per risolvere problemi in relazione all'Astronomia e all'Ottica.

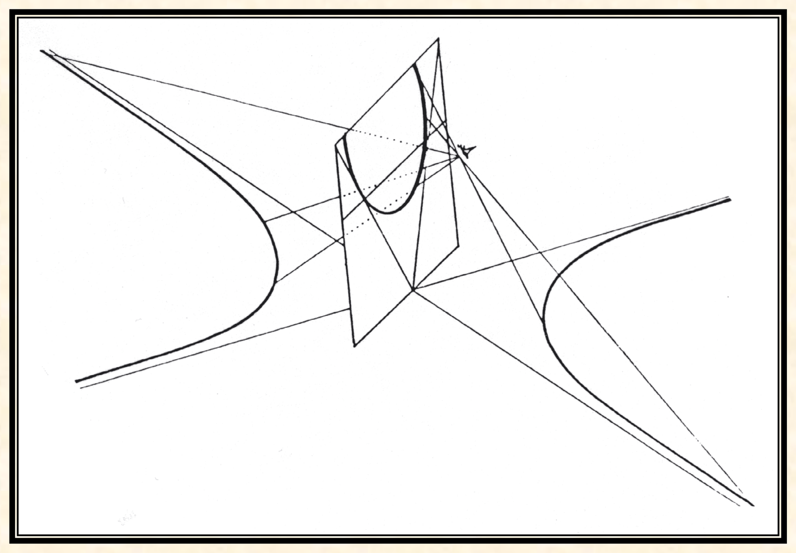


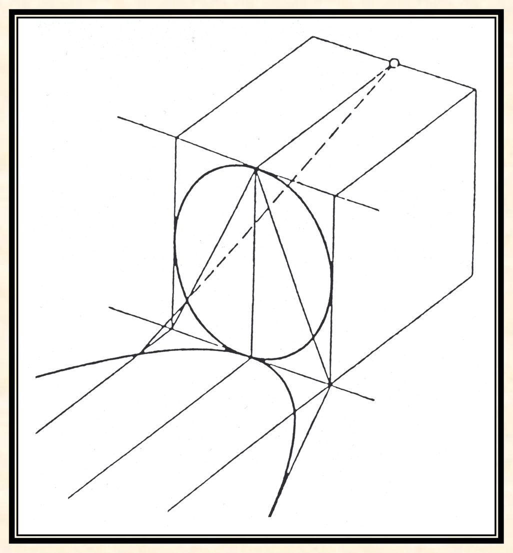
Illustrazioni di A. Dürer
Norinberga, 1525

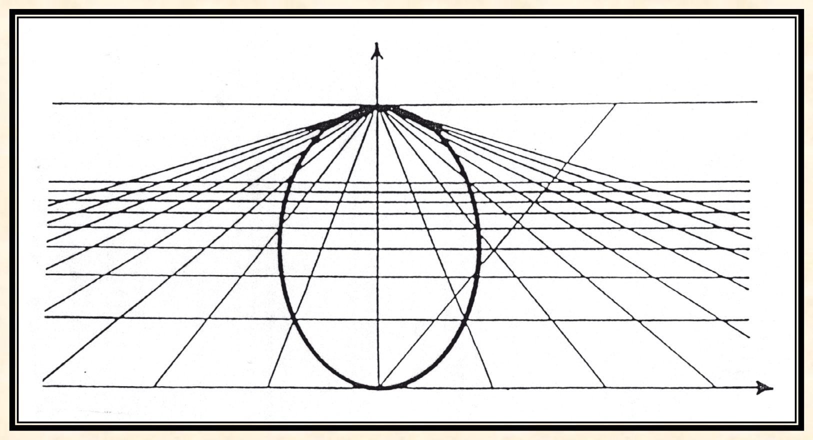
Dato che le *coniche affini* possono costruirsi come sezioni di un cono *tutte sembrano uguali se si guardano dal vertice del cono.*



Tenendo conto dell'idea di spazio proiettivo, in cui tutti i punti di una retta per *O* sono identificati, si deduce che la Geometria Proiettiva fornisce uno strumento per trattare le coniche in maniera unificata: *c'è una sola conica regolare proiettiva.* Quindi, data una conica regolare nel piano proiettivo e scelta una retta come retta all'infinito, distingueremo se la conica affine risultante (togliendo la retta all'infinito) è una *iperbole*, una *parabola*, o una *ellisse* a seconda se la retta all'infinito interseca la conica in *due punti, un punto* o *nessuno.*

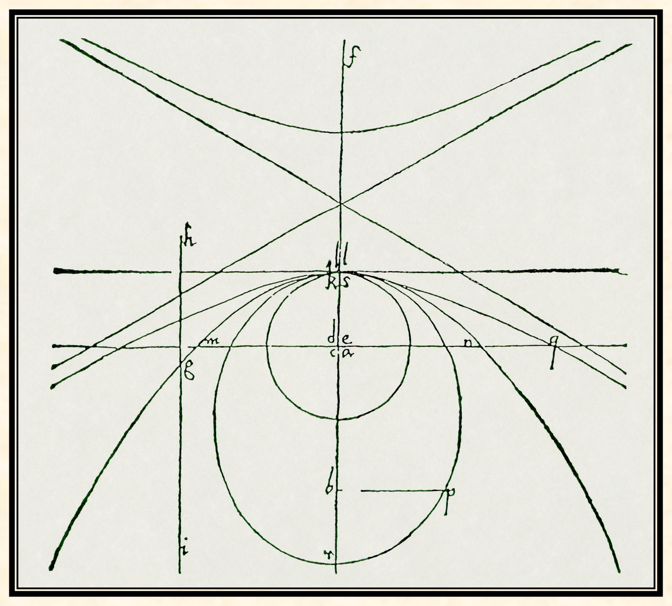






I PUNTI ALL'INFINITO

Nell'ambito dei sui studi di Ottica, Giovanni Keplero (1571–1630) introdusse nel 1604 la nozione di **punto all'infinito** per dotare la parabola di un secondo fuoco. Keplero studia il comportamento di una ellisse sia nel caso in cui i due fuochi si uniscono dando luogo ad una circonferenza, come nel caso in cui un fuoco sta fisso e l'altro si allontana dando origine ad una parabola. Dove sta quindi il secondo fuoco della parabola? Keplero diceva che "in una parabola un fuoco sta dentro e l'altro ad una distanza infinita dal primo". Non capita così nè nell'ellisse nè nell'iperbole, i cui fuochi sono a distanza finita.



Sistema di coniche di Keplero
Ad Vitellionem paralipomena
Francoforte, 1604

Mentre in una ellisse o una iperbole i raggi di luce che escono da un fuoco si riflettono in *raggi che passano per l'altro fuoco,* nella parabola i raggi uscenti dal fuoco si riflettono in *raggi paralleli all'asse,* e pertanto il secondo fuoco della parabola è in entrambe le direzioni lontano dall'occhio (deve stare in entrambe per dare continuità alla trasformazione dell'ellisse e dell'iperbole in una parabola). E questa è proprio l'idea della nozione moderna dei punti all'infinito.

Giovanni Keplero

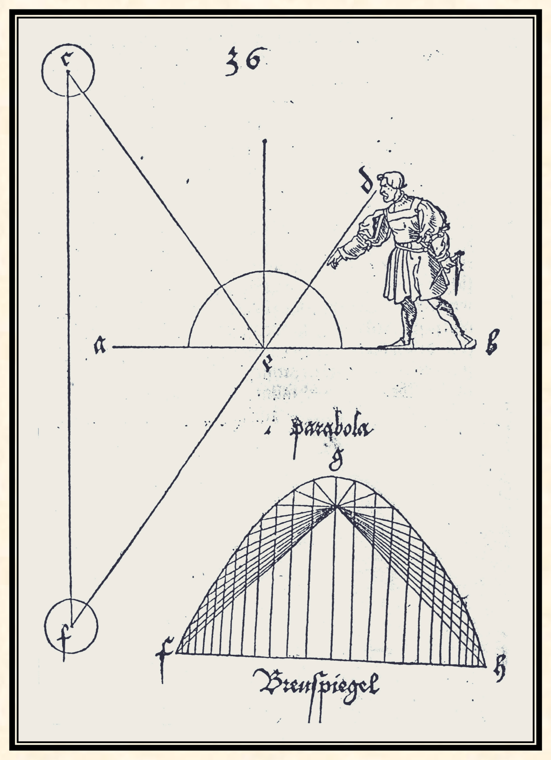


Illustrazione di A. Dürer
Norinberga, 1525

Lo studio di Keplero sui fuochi delle sezioni coniche si inquadra nel problema di dare una teoria unificata per gli studi sulla *riflessione e rifrazione dei raggi luminosi in specchi concavi e convessi di tipo conico.* Euclide aveva già rammentato gli specchi ustori di Archimede, che erano specchi concavi che, concentrando i raggi solari nel fuoco, facevano sì che gli oggetti posti in questo bruciassero.

Keplero è inoltre molto conosciuto per le sue argomentazioni sull'ellitticità delle orbite dei pianeti, dimostrata poi da Newton.

Come aneddoto si può menzionare che l' "otto ruotato" che si usa per rappresentare l'infinito si deve a John Wallis, matematico inglese del secolo XVII.

Nei trattati di Alberti e soprattutto di Desargues, appaiono anche il concetto e la costruzione dei punti all'infinito, con motivazioni di natura pittorica nel caso dell'Alberti e geometrica nel caso di Desargues. Sia Keplero che Desargues considerano i due "estremi di una retta" come incontrantesi all'infinito e così le rette proiettive hanno la stessa forma di una circonferenza.

Proyectos UCM de Innovación Educativa
Facultad de Ciencias Matemáticas, 2002

Edizione italiana a cura di Fabrizio Broglia e Jesús M. Ruiz
Università di Pisa, Dipartimento di Matematica, 2010

María Emilia Alonso • Departamento de Álgebra, UCM
María Cruz del Amo • IES Miguel Servet, Madrid
Raquel Mallavibarrena • Departamento de Álgebra, UCM
Isabel Pinto • IES La Fuensanta, Córdoba
Jesús M. Ruiz • Departamento de Geometría y Topología, UCM