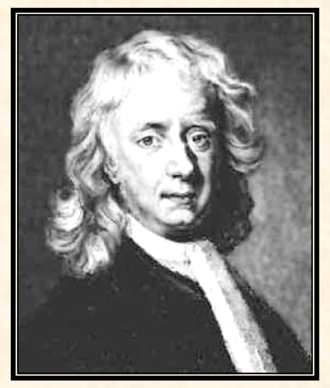
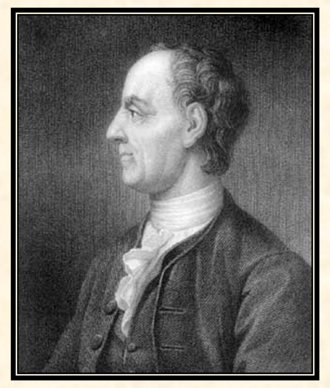
ORIGINI DELLA GEOMETRIA PROIETTIVA

LA RISCOPERTA DELLA GEOMETRIA PURA

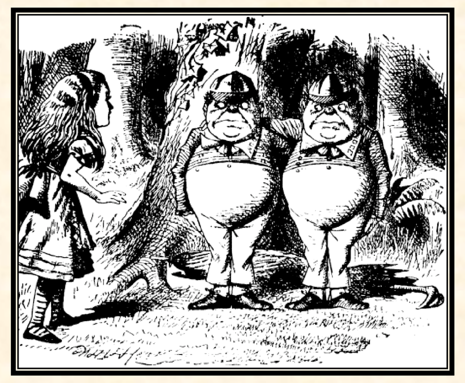
Nel secolo XVIII vengono abbandonati i **metodi sintetici** negli studi geometrici a favore dei **metodi analitici,** che usavano le geometria delle coordinate. La *geometria pura diventa,* semplicemente, *una interpretazione dell'algebra* o una guida per le procedure algebriche. Cosi ad esempio si deduce dai commenti di LEONHARD EULER (1707–1783) nelle sue opere. Conviene ricordare, tuttavia, matematici inglesi come COLIN MACLAURIN (1698–1746), che rimasero fedeli alla tradizione geometrica di Sir ISAAC NEWTON (1642–1721). Fu nel secolo XIX che si produsse la rinascita della geometria, a partire dallo sviluppo della **dualità** e delle **coordinate omogenee,** che rappresentarono un importante passo avanti nel consolidamento di quello che sarà la Geometria Proiettiva propriamente detta. Il catalizzatore finale fu la forte polemica **geometria sintetica contro geometria analitica.**



Sir I. Newton



L. Euler



DUALITÀ

Quanti piani sono contenuti in un punto? Tanti quanti punti passano per un piano. E... contrariwise. (*Tweedledee* in *Alice nel paese delle meraviglie,* di LEWIS CARROLL.)

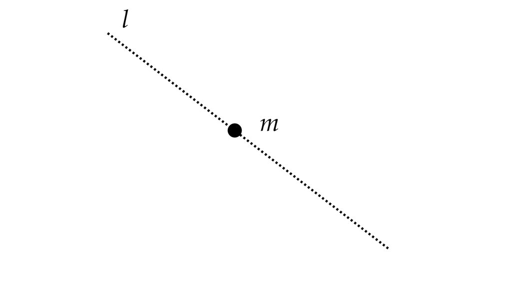
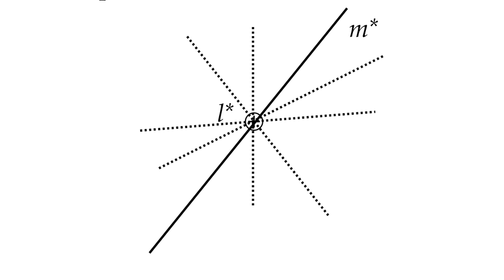
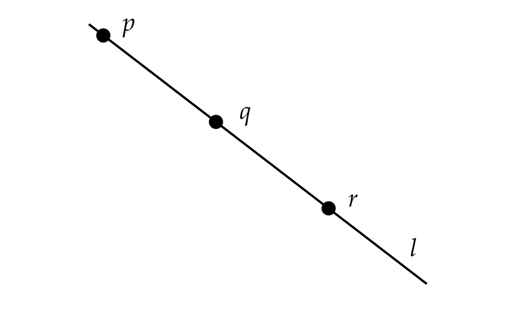
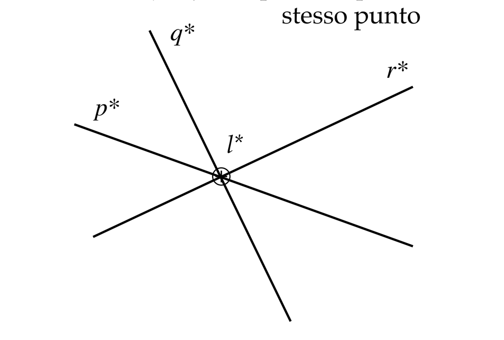
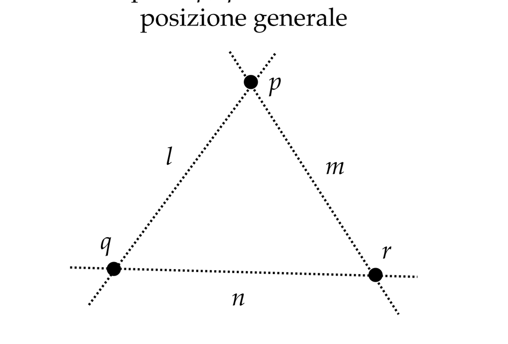
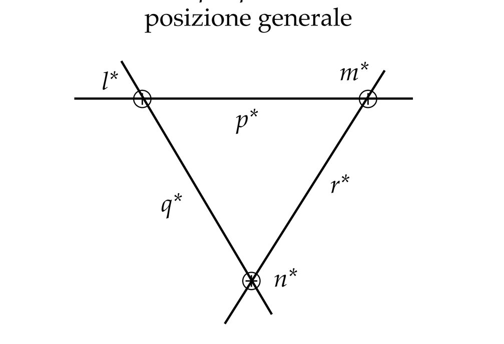
La **dualità** è un concetto onnipresente in tutta la matematica, ma forse è nella Geometria Proiettiva che si può illustrare meglio il suo interesse. Si tratta di un dizionario che permette di tradurre da un contesto ad un altro nozioni e risultati. Possiamo formularla tecnicamente così.

V = spazio vettoriale di dimensione $n+1$	V^* = spazio vettoriale duale, composto dalle applicazioni lineari $h: V \to K$ a valori nel corpo base K
P = spazio proiettivo di dimensione n formato dalle rette di V	P^* = spazio proiettivo duale, composto dagli iperpiani H di P, che si rappresentano tramite una equazione $h=0$ determinata a meno di un fattore di proporzionalita
L = sottospazio proiettivo di P	L^* = sottospazio proiettivo duale, formato da tutti gli iperpiani H di P che contengono L.

Le due proprietá fondamentali di questa dualità sono

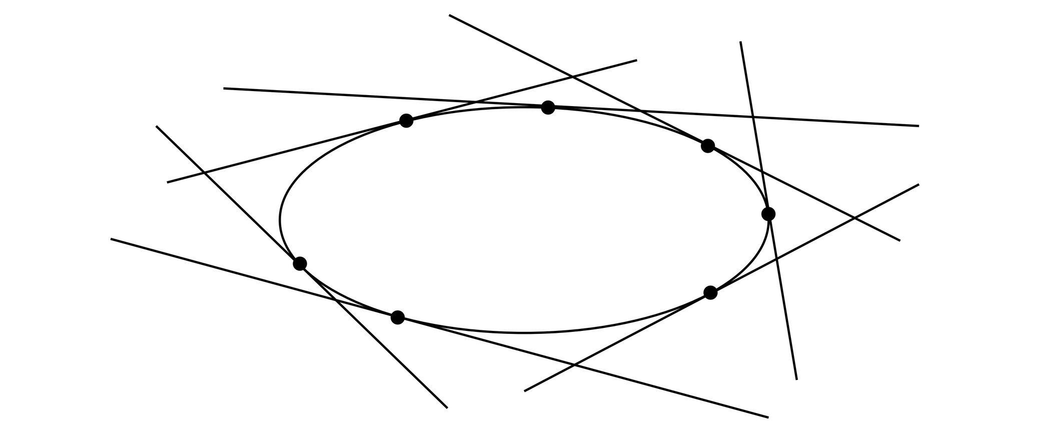
- $\dim(L) + \dim(L^*) = n-1$.
- Se L contiene M, allora L^* è contenuta in M^*.

Nel piano proiettivo, una retta ha come duale un fascio di rette, che si identifica con il suo punto base e si ottengono le cose seguenti.

Nel piano proiettivo P il punto m sta sulla retta l 	Nel piano proiettivo duale P^* la retta m^* duale del punto m passa per il punto l^* duale della retta l 
I punti p, q e r sono allineati 	Le rette p^*, q^* e r^* passano per lo stesso punto 
I punti p, q ed r sono in posizione generale 	Le rette p^*, q^* e r^* sono in posizione generale 

Una volta che si conosce il dizionario tra sottospazi e sottospazi duali si realizza il cosiddetto *Principio di dualità,* secondo cui una proposizione relativa a sottospazi proiettivi è vera se e solo se è vera la sua duale. Questo principio fu stabilito inizialmente da JEAN-VICTOR PONCELET (1788–1867), però legato alla nozione di polarità rispetto a una conica data, che abbiamo già descritto prima.

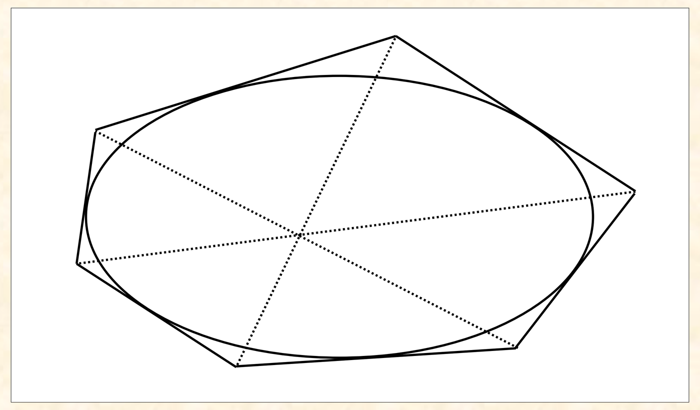
Le rette tangenti ad una conica formano la conica duale



Forse uno degli esempi più belli di dualità è il cosiddetto *Teorema di Brianchon,* che è l'enunciato duale del teorema di Pascal. In effetti utilizzando la dualità associata ad una conica, JULIEN BRIANCHON (1785–1864) dimostrò il seguente teorema

Teorema di Brianchon

Se si circoscrive un esagono ad una conica, le diagonali che uniscono vertici opposti si incontrano tutte in un sol punto.



Il *principio di dualità generale,* formulato come sopra, ma indipendentemente dalla polarità rispetto ad una conica, lo si deve a JOSEPH-DIEZ GERGONNE (1771–1859).

COORDINATE OMOGENEE

La costruzione dello spazio proiettivo come l'insieme delle rette di uno spazio vettoriale rese necessaria la considerazione di nuovi sistemi di coordinate che permettessero una certa agilità ed efficacia nei calcoli. Uno dei primi ad utilizzare coordinate di altro tipo fu AUGUSTUS FERDINAND MÖBIUS (1790–1868) nel suo lavoro del 1827 sul **calcolo baricentrico.** Si costruiscono le coordinate di un punto nel piano in relazione ai vertici di un triangolo o di un tetraedro, se siamo nello spazio. Il punto di coordinate (1,1,1) è il baricentro di un triangolo ed il punto (1,1,1,1) è il baricentro di un tetraedro. Queste idee gli permisero di chiarire gli studi sul birapporto e sulle collineazioni. Le coordinate di MÖBIUS di un punto non sono uniche, però *è unico il rapporto tra di esse,* così che esse hanno già un carattere proiettivo. KARL WILHELM FEUERBACH (1800–1834) e ÉTIENNE BOBILLIER (1798–1840) pubblicarono nello stesso tempo risultati simili a quelli di MÖBIUS.

Il passo decisivo lo fece JULIUS PLÜCKER (1801–1868), che fu colui che in maniera più efficace applicò questi metodi alla Geometria Proiettiva. A lui dobbiamo le **coordinate omogenee,** che definì in due modi. Prima considerò un triangolo fisso e prese come coordinate di un punto P le distanze dai tre lati di questo triangolo. Più tardi introdusse il caso speciale in cui uno dei lati del triangolo fosse *nella retta all'infinito:* in questo modo nacquero le coordinate omogenee così come le si conoscono oggi: le *coordinate omogenee di un punto P* del piano sono (x,y,z) ove

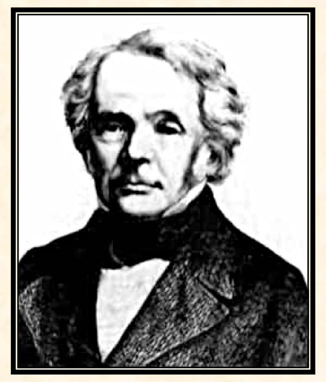
$$x = Xz$$
$$y = Yz$$

e (X,Y) sono le *coordinate cartesiane del punto P* quando gli assi coordinati sono i due lati del triangolo che non sono sulla retta all'infinito. Con ciò le coordinate di *P non sono uniche,* in quanto (kx,ky,kz) corrispondono allo stesso punto, purchè k non sia nullo. Cioè tutti i punti di una retta dello spazio vettoriale diventano lo stesso punto nel piano proiettivo associato a questo spazio vettoriale.

Applicando questa relazione tra le coordinate cartesiane e quelle omogenee alla equazione di una curva nel piano affine, otteniamo una *equazione omogenea:* questa non è altro che la omogeneizzazione della prima. Questa equazione omogenea è quella di una curva nel piano proiettivo, ottenuta aggiungendo alla curva affine i punti che risultano ponendo $z=0$ nell'equazione omogenea, cioè i punti che la curva ha all'infinito.

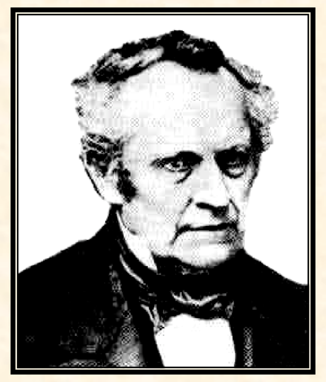
La definizione delle coordinate omogenee permise a PLÜCKER di formalizzare molte idee geometriche che ponevano le basi della nascente Geometria Proiettiva. Di fatto definì anche le coordinate di retta nel piano, che gli permisero di considerare con precisione la dualità punto–retta del piano proiettivo e di affossare la polemica tra PONCELET e GERGONNE sulla differenza tra polarità associata ad una conica e dualità generale.

Nel 1831, PLÜCKER estese i suoi studi allo spazio proiettivo e dette coordinate alle rette dello spazio, apportando in tal modo idee essenziali per lo studio di quelle che dopo saranno le **grassmanniane.**

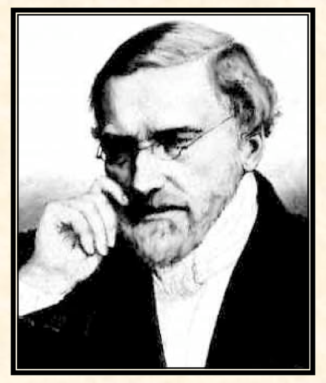


A. F. Möbius

K. W. Feuerbach



J. Plücker



J.-V. Poncelet

GEOMETRIA SINTETICA CONTRO GEOMETRIA ANALITICA

Alla fine del secolo XVIII si cominciano a sentire voci a favore di un ritorno alla **geometria sintetica,** sono quelle di GASPARD MONGE (1746–1810) e di LAZARD CARNOT (1753–1823) all' Ècole Polytechnique. MONGE ha importanza per i suoi propri contributi ed in modo speciale perché preparò il terreno per il secolo XIX, trasmettendo queste idee con entusiasmo ai suoi allievi tanto importanti come i sopracitati CARNOT, CHARLES DUPIN (1784–1783), BRIANCHON, JEAN-BAPTISTE BIOT (1744–1862) e PONCELET.

Si cominciò a lavorare in Geometria Euclidea ed anche in quella Proiettiva partendo da zero, dato che non si conoscevano i lavori di DESARGUES. CARNOT iniziò "liberando la geometria dai geroglifici dell'analisi" e per questo ricorse a metodi puramente geometrici nelle sue dimostrazioni.

PONCELET fu quello che diede l'impulso definitivo alla rinascita della geometria pura. Fu il primo a considerare la Geometria Proiettiva come *una nuova branca della Matematica* con obiettivi e metodi propri. Distinse tra le proprietà che sono proiettive e quello che non lo sono. E in quanto ai metodi recuperò quelli di DESARGUES e PASCAL ed utilizzò anche le cosiddette *trasformazioni proiettive.*

Nella prima metà del secolo XIX si affermò una grande polemica tra geometri sintetici e geometri analitici. Le obiezioni che si ponevano alla **geometria analitica** erano del tipo seguente:

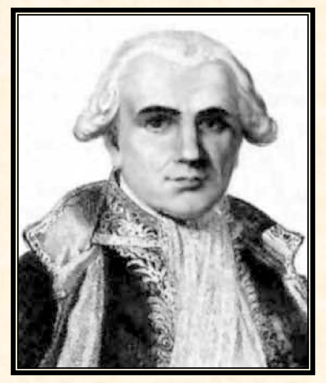
- *È realmente geometria?* I metodi sono puramente algebrici e i risultati anche, con il che si dimentica il significato geometrico.
- Si perde la connessione tra il punto di partenza e quello di arrivo nel processo dei piccoli passi algebrici il cui significato geometrico non è chiaro.
- Il metodo geometrico puro è più semplice e intuitivo nelle dimostrazioni.
- La geometria è la verità sul mondo reale, invece l'analisi e l'algebra non sono verità per se stesse.

La geometria analitica ha, d'altra parte, il vantaggio della potenza per la generalità del suo metodo, dato che tutti i problemi si risolvono con procedimenti uniformi, mentre nella geometria sintetica ogni problema dipende dalla figura particolare considerata.

Rappresentanti dei sintetici furono PONCELET, JACOB STEINER (1796–1863) e CHASLES. Rappresentanti degli analitici sarebbero MÖBIUS, PLÜCKER e GERGONNE.

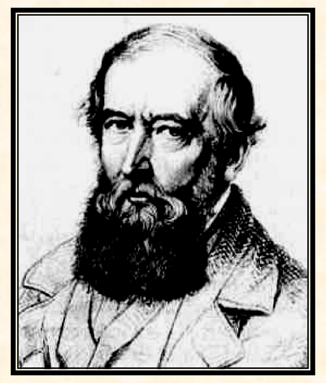
La rivalità ebbe momenti di grande tensione, come per esempio quando STEINER minacciò gli editori della prestigiosa rivista *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle) di non pubblicarvici più se avesse continuato a pubblicare i lavori di PLÜCKER.

Dopo questa fase, in cui si hanno anche altre figure degne di nota, come i geometri analitici inglesi ARTHUR CAYLEY (1821–1895), GEORGE SALMON (1819–1904) e JAMES JOSEPH SYLVESTER (1814–1897), la Geometria Proiettiva entrò in una fase di maturità il cui nome chiave fu VON STAUDT, che mostrò come la Geometria Proiettiva inglobasse la Geometria Euclidea. Più tardi, però ancora nel secolo XIX, FÉLIX KLEIN (1849–1925) completò l'opera di STAUDT mediante la **teoria dei gruppi di trasformazioni** nel suo famoso *Programa di Erlangen.*

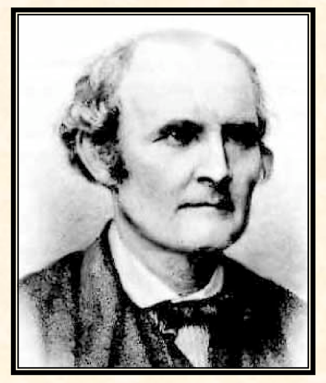


G. Monge

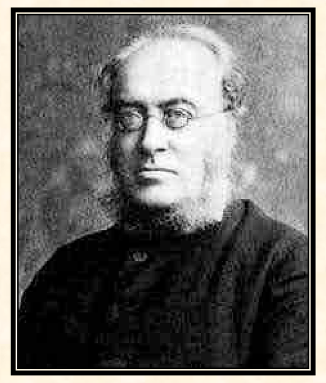
L. Carnot



J. Steiner



A. Cayley



G. Salmon

F. Klein

Proyectos UCM de Innovación Educativa
Facultad de Ciencias Matemáticas, 2002

Edizione italiana a cura di Fabrizio Broglia e Jesús M. Ruiz
Università di Pisa, Dipartimento di Matematica, 2010

María Emilia Alonso • Departamento de Álgebra, UCM
María Cruz del Amo • IES Miguel Servet, Madrid
Raquel Mallavibarrena • Departamento de Álgebra, UCM
Isabel Pinto • IES La Fuensanta, Córdoba
Jesús M. Ruiz • Departamento de Geometría y Topología, UCM