

Analisi Complessa A

Fabrizio Broglia

Periodo: II semestre

Il corso tratta delle proprietà delle funzioni analitiche di più variabili e delle funzioni olomorfe su aperti di \mathbb{C}^n .

Prerequisiti sono la teoria delle funzioni olomorfe di 1 variabile e le nozioni di topologia relative al gruppo fondamentale e ai rivestimenti. Benché questi argomenti siano stati svolti nel corso di Geometria 2, data la loro importanza in questo ambito, saranno richiamati ed ampliati.

Lo studio delle funzioni analitiche presenta un aspetto locale e uno globale. L'aspetto locale conduce praticamente allo studio dell'anello $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ delle serie convergenti in n variabili e una delle prime cose sarà evidenziare le somiglianze e le differenze di questo anello con l'anello $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ dei polinomi. In particolare per descriverne alcune proprietà di natura algebrica si proverà un teorema di divisione (*Teorema di divisione di Weierstrass*) che implica la noetherianità, cioè il fatto che ogni ideale è finitamente generato.

Tra le proprietà di tipo algebrico che si evidenzieranno, analoghe a quelle dell'anello dei polinomi, una importante è il teorema degli zeri di Hilbert (*Nullstellensatz*) e le sue conseguenze.

Un interesse riveste anche la descrizione dei luoghi di zero di questa classe di funzioni: si vedrà che tali insiemi possono essere descritti come rivestimenti di aperti di spazi numerici al di fuori di opportuni sottoinsiemi (rivestimenti ramificati).

Partendo da tale descrizione locale, si arriva alla definizione di una struttura, quella di *spazio analitico*, struttura con molte analogie con strutture che si ritrovano in altri campi come ad esempio la geometria algebrica e che permette lo studio delle funzioni olomorfe su una classe più vasta di spazi, cioè su spazi non solo localmente omeomorfi a aperti di spazi numerici (varietà) ma ammettenti anche opportune singolarità.

Per questa parte si introdurranno alcuni strumenti di teoria dei fasci e coomologici.

Nella numerosa letteratura esistente, si seguirà prevalentemente il testo di Gunning e Rossi: *Analytic functions of several complex variables*.