Istituzioni di Analisi Numerica, Appello 1, 6/6/2014, ore 9:00, aula E

Esercizio 1. Si consideri il problema agli autovalori $-u''(x) = \lambda u(x)$ dove $u(x) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ è sufficientemente regolare e tale che $u'(0) = u'(1) = 0$.

a) Si dia un'espressione esplicita degli autovalori λ e delle autofunzioni $u(x)$.

b) Si descrivano le matrici che discretizzano il problema agli autovalori ottenute approssimando la derivata seconda con una formula dei 3 punti e le derivate prime delle condizioni al contorno rispettivamente con la differenza centrata per $u'(0)$ e $u'(1)$, e con le differenze in avanti per $u'(0)$ e all'indietro per $u'(1)$.

c) Utilizzando il teorema di Bauer-Fike si studi la convergenza degli autovalori del problema discreto agli autovalori del problema continuo nelle due discretizzazioni esaminate.

d) (Facoltativo). Si dimostri che se $(B + F)u = \lambda u$ e $Bv = \mu v$, dove B è reale simmetrica e $v^T u \neq 0$ allora $\lambda - \mu = v^T F u / v^T u$. Si usi questo fatto per migliorare le stime di convergenza date al punto c).

Esercizio 2. Si supponga che esista un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $\mathcal{P}$ tale che

$$\langle x^2 f(x), g(x) \rangle = \langle f(x), x^2 g(x) \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{P} \tag{1}$$

e non necessariamente sia $\langle x f(x), g(x) \rangle = \langle f(x), x g(x) \rangle$.

a) Si dimostri che i polinomi ortogonali $p_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots$, tali che $\deg(p_i(x)) = i$, ottenuti con questo prodotto scalare verificano una relazione di ricorrenza del tipo $p_{i+1}(x) = (a_i x^2 + b_i) p_{i-1}(x) + c_i p_i(x) + d_i p_{i-2}(x) + e_i p_{i-3}(x)$, per opportune costanti a_i, b_i, c_i, d_i.

b) Si dica se la matrice dei momenti, intesa come $H_n = (h_{i,j})$, $h_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, mantiene ancora la struttura di Hankel. Si verifichi che permutando righe e colonne di H_n con la permutazione $(1, 3, 5, 7, \ldots, 2, 4, 6, 8, \ldots)$ si ottiene una matrice 2×2 a blocchi formata da 4 blocchi di Hankel e che ogni matrice di questo tipo, definita positiva, determina un prodotto scalare su $\mathcal{P}_n$ che gode della proprietà (1). Si dia un esempio di prodotto scalare su $\mathcal{P}_n$, definito tramite la matrice H_n, con la proprietà (1).

c) Sia $H_n(x)$ la matrice ottenuta sostituendo l'ultima riga di H_n con $[1, x, x^2, \ldots, x^n]$. Dire, motivando adeguatamente la risposta, se $p_n(x) = \det H_n(x)$.

d) Si decomponga $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$ come $p(x) = p_+(x^2) + x p_-(x^2)$ dove $p_+(x^2) = (p(x) + p(-x))/2$ e $p_-(x^2) = (p(x) - p(-x))/(2x)$ sono la parte pari e la parte dispari di $p(x)$. Si consideri il prodotto scalare su $[a, b]$ dato da $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_a^b w(x) p(x) q(x) dx$, associato al peso $w(x)$ e si definisca

$$\langle p(x), q(x) \rangle' := \langle p_+(x), q_+(x) \rangle + \langle p_-(x), q_-(x) \rangle$$

Si verifichi che $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ è un prodotto scalare tale che $\langle x^2 f(x), g(x) \rangle = \langle f(x), x^2 g(x) \rangle$ ed esistono polinomi $p(x), q(x)$ tali che $\langle x p(x), q(x) \rangle \neq \langle p(x), x q(x) \rangle$.

e) (Facoltativo) Si possono esprimere i polinomi ortogonali di cui al punto a) come determinanti di opportune matrici a banda? Come è fatta la matrice dei momenti del prodotto scalare del punto c)? Si analizzino le proprietà dei polinomi $p_n(x)$ ottenuti col prodotto scalare dato nel punto c).