

## Interpolazione polinomiale a tratti

È noto che data una funzione  $f(x)$  di cui sono noti i valori in  $n + 1$  nodi distinti  $x_i, i = 0, \dots, n$ , esiste ed è unico il polinomio di interpolazione  $p_n(x)$  di grado al più  $n$  tale che  $p_n(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n$ . In generale, non è detto che aumentando  $n$  l'approssimazione di  $f(x)$  mediante  $p_n(x)$  migliori. Infatti, indicato con  $\mathcal{N}_n$  l'insieme dei nodi dell'interpolazione per il grado  $n$ , anche supponendo che i nodi vengano infittiti in modo abbastanza uniforme, cioè che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max |x_{i+1} - x_i| = 0,$$

è possibile dimostrare (teorema di Faber) che per ogni prefissata successione di insiemi  $\mathcal{N}_n$ , esiste una funzione  $f(x)$  continua in  $[a, b]$  tale che  $p_n(x)$  non converge ad  $f(x)$ .

Nella pratica quindi non è ragionevole approssimare  $f(x)$  con polinomi di interpolazione quando  $n$  è elevato. Polinomi di grado più basso si potrebbero ottenere con le tecniche di approssimazione, ma in tal caso nei nodi i valori del polinomio approssimante non sarebbero uguali a quelli della funzione. Se invece l'uguaglianza dei valori nei nodi è fondamentale, come ad esempio nella grafica, bisogna ricorrere a funzioni che coincidono a tratti con polinomi di grado basso.

Supponendo che i nodi siano ordinati in  $[a, b]$ , cioè

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

si definisce *polinomiale a tratti* su  $[a, b]$  una funzione  $t(x)$  che sull' $i$ -esimo sottointervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  coincide con un polinomio  $t_i(x)$  di grado prefissato  $k$ . La  $t(x)$  viene rappresentata per mezzo di una matrice  $A$  di ordine  $n$  la cui  $i$ -esima riga

$$[a_{i,k}, \quad a_{i,k-1}, \quad \dots \quad a_{i,0}]$$

contiene i coefficienti di  $t_i(x)$  con la variabile traslata rispetto al punto  $x_i$ , cioè

$$t_i(y) = a_{i,k}y^k + a_{i,k-1}y^{k-1} + \dots + a_{i,0}, \quad \text{dove } y = x - x_i.$$

Vediamo alcune funzioni polinomiali a tratti usate nella pratica. Per semplicità si denota  $f_i = f(x_i)$ ,  $f'_i = f'(x_i)$  e  $h_i = x_{i+1} - x_i$ .

## 1. Polinomiale lineare a tratti

La  $t(x)$  coincide con la  $f(x)$  sui nodi  $x_i$ , cioè  $t(x) = t_i(x)$  per  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , dove

$$t_i(x) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} y + f_i, \quad y = x - x_i.$$

Per la sua semplicità questa polinomiale è usata spesso nella pratica, ma non sempre fornisce una buona rappresentazione grafica della funzione, perché non vi è alcuna condizione sulle derivate dei singoli polinomi, per cui nei nodi  $x_i$  il raccordo fra due diversi polinomi lineari può presentare un punto angoloso.

Se  $f \in C^2[a, b]$ , posto

$$M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \quad \text{e} \quad H = \max_{i=0, \dots, n-1} h_i,$$

dal resto dell'interpolazione lineare in  $[x_i, x_{i+1}]$  si ha

$$|f(x) - t(x)| \leq \frac{1}{8} M_2 (x_{i+1} - x_i)^2 \leq \frac{1}{8} M_2 H^2,$$

da cui segue la convergenza della  $t(x)$  alla  $f(x)$  per  $H \rightarrow 0$ . Dalla formula di Taylor si ha poi

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f(x) + (x_{i+1} - x)f'(x) + \frac{1}{2} (x_{i+1} - x)^2 f''(\xi_i), \\ f_i &= f(x) + (x_i - x)f'(x) + \frac{1}{2} (x_i - x)^2 f''(\eta_i), \end{aligned}$$

da cui sottraendo risulta

$$f'(x) - t'_i(x) = f'(x) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} = \frac{1}{2h_i} \left[ (x_i - x)^2 f''(\eta_i) - (x_{i+1} - x)^2 f''(\xi_i) \right],$$

e poiché per  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  è

$$(x_{i+1} - x)^2 + (x_i - x)^2 \leq (x_{i+1} - x_i)^2 = h_i^2, \quad (1)$$

si ha

$$|f'(x) - t'_i(x)| \leq \frac{1}{2} M_2 h_i \leq \frac{1}{2} M_2 H,$$

da cui segue la convergenza per  $H \rightarrow 0$  delle singole  $t'_i(x)$ , e quindi della  $t'(x)$  su ciascun intervallo, alla funzione continua  $f'(x)$ .

## 2. Polinomiale cubica a tratti di Hermite

La  $t(x)$  coincide con la  $f(x)$  sui nodi  $x_i$ , è derivabile e  $t'(x)$  coincide con la  $f'(x)$  sui nodi  $x_i$ . Quindi  $t(x) = t_i(x)$  per  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , dove

$$\begin{aligned} t_i(x) &= \left[ 2(f_i - f_{i+1}) + h_i(f'_i + f'_{i+1}) \right] \frac{y^3}{h_i^3} - \left[ 3(f_i - f_{i+1}) + h_i(2f'_i + f'_{i+1}) \right] \frac{y^2}{h_i^2} \\ &\quad + f'_i y + f_i, \quad y = x - x_i. \end{aligned}$$

Questa polinomiale fornisce una migliore rappresentazione grafica rispetto a quella lineare, perché non dà luogo a punti angolosi nei nodi. Però, anche se nei punti di raccordo i polinomi hanno la stessa pendenza, non è detto che abbiano la stessa concavità, per cui nei nodi si può presentare un andamento distorto.

Se  $f \in C^4[a, b]$ , posto

$$M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| \quad \text{e} \quad H = \max_{i=0, \dots, n-1} h_i,$$

dal resto del polinomio osculatore di Hermite in  $[x_i, x_{i+1}]$  si ha

$$|f(x) - t(x)| \leq \frac{1}{4!} M_4 (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2,$$

e poiché

$$\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2 = \frac{1}{16} (x_{i+1} - x_i)^4,$$

risulta su  $[a, b]$  che

$$|f(x) - t(x)| \leq \frac{1}{384} M_4 H^4,$$

da cui segue la convergenza della  $t(x)$  alla  $f(x)$  per  $H \rightarrow 0$ .

Le polinomiali di Hermite non sono utilizzabili nel caso, frequente nella pratica, in cui i valori  $f'_i$  non sono noti. Per ovviare a questa difficoltà, si possono costruire polinomiali a tratti interpolando la  $f(x)$  su più di due punti consecutivi. Molto usate per la loro rapidità di calcolo sono le spline di Akima, formate da cubiche che interpolano su cinque nodi e sono derivabili con continuità. Non è richiesta la conoscenza delle  $f'(x_i)$  che vengono approssimate con delle medie pesate di rapporti incrementali. Queste spline, molto efficaci dal punto di vista grafico, danno un'approssimazione locale, quindi sono adatte ad applicazioni interattive, in cui si deve valutare l'effetto visivo prodotto dallo spostamento di singoli punti.

### 3. Spline cubica

Fra le funzioni polinomiali a tratti quelle più usate nella pratica, anche perché consentono di ottenere ottimi risultati dal punto di vista grafico, sono le spline cubiche ottenute senza utilizzare i valori  $f'(x_i)$  e imponendo invece condizioni di continuità delle derivate prima e seconda.

Una funzione reale  $s(x) \in C^2[a, b]$  viene chiamata *spline cubica* della  $f(x)$  se  $s(x)$  coincide con un polinomio  $s_i(x)$  di grado al più 3 in ciascun intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  e  $s(x_i) = f_i$ , per  $i = 0, \dots, n$ .

Imponendo queste condizioni si ottengono  $4n - 2$  relazioni

- a)  $s_i(x_i) = f_i, \quad s_i(x_{i+1}) = f_{i+1}, \quad \text{per } i = 0, \dots, n - 1,$
- b)  $s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i), \quad \text{per } i = 1, \dots, n - 1,$
- c)  $s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i), \quad \text{per } i = 1, \dots, n - 1.$

Poiché i coefficienti dei polinomi  $s_i(x)$  sono  $4n$ , occorre imporre due condizioni aggiuntive al bordo, che vengono scelte caso per caso. Le due più usate sono:

d')  $s_0''(x_0) = s_{n-1}''(x_n) = 0$  (*spline naturale*), che impone alla spline un andamento lineare vicino agli estremi,

oppure, se sono noti i valori di  $f'(a)$  e  $f'(b)$

d'')  $s_0'(x_0) = f'(a)$ ,  $s_{n-1}'(x_n) = f'(b)$  (*spline completa*), che impone alla spline la tangenza alla  $f(x)$  negli estremi. Se i valori  $f'(a)$  e  $f'(b)$  non fossero disponibili, si potrebbero sostituire con delle approssimazioni. Ad esempio,  $f'(a)$  potrebbe essere approssimato con la derivata in  $a$  del polinomio che interpola la  $f(x)$  su  $a$  e sui tre nodi successivi.

Sulla derivata seconda si potrebbero imporre anche altre condizioni, per esempio  $s_0''(x_0) = \sigma_0$  e  $s_{n-1}''(x_n) = \sigma_n$ , dove  $\sigma_0$  e  $\sigma_n$  sono valori assegnati, oppure  $s_0''(x_0) = s_0''(x_1)$  e  $s_{n-1}''(x_{n-1}) = s_{n-1}''(x_n)$ , assumendo che la derivata seconda sia costante vicino agli estremi dell'intervallo  $[a, b]$ . Nel caso di una funzione  $f(x)$  periodica di periodo  $b - a$ , si potrebbe anche definire una *spline periodica* tale che  $s_0'(x_0) = s_{n-1}'(x_n)$  e  $s_0''(x_0) = s_{n-1}''(x_n)$ .

### 3.1 Calcolo dei coefficienti

Per determinare i coefficienti dei polinomi  $s_i(x)$  si potrebbero sfruttare direttamente le condizioni a) - c) e le condizioni aggiuntive scelte, risolvendo un sistema lineare di  $4n$  equazioni in  $4n$  incognite. È possibile però semplificare il problema riducendo il numero delle equazioni necessarie. Si considerano come incognite le quantità, dette *momenti*,

$$\mu_i = s_i''(x_i), \quad \text{per } i = 0, \dots, n-1, \quad \text{e} \quad \mu_n = s_{n-1}''(x_n).$$

Poiché  $s_i(x)$  per  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  è un polinomio di grado al più 3,  $s_i''(x)$  è il polinomio di grado al più 1

$$s_i''(x) = \mu_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} - \mu_i \frac{x - x_{i+1}}{h_i}. \quad (2)$$

Integrando due volte si ottiene

$$s_i'(x) = \mu_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} - \mu_i \frac{(x - x_{i+1})^2}{2h_i} + \alpha_i, \quad (3)$$

$$s_i(x) = \mu_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} - \mu_i \frac{(x - x_{i+1})^3}{6h_i} + \alpha_i(x - x_i) + \beta_i. \quad (4)$$

Le costanti  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  vengono determinate imponendo le condizioni a)

$$\begin{cases} \mu_i \frac{h_i^2}{6} + \beta_i = f_i \\ \mu_{i+1} \frac{h_i^2}{6} + \alpha_i h_i + \beta_i = f_{i+1}, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \beta_i = f_i - \mu_i \frac{h_i^2}{6} \\ \alpha_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (\mu_{i+1} - \mu_i). \end{cases} \quad (5)$$

Restano quindi da calcolare i  $\mu_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Dalle (3), imponendo le condizioni b) e sostituendo  $\alpha_{i-1}$  e  $\alpha_i$ , si ottengono le  $n - 1$  relazioni

$$h_{i-1} \mu_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) \mu_i + h_i \mu_{i+1} = 6 f_{i-1,i,i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (6)$$

dove

$$f_{i-1,i,i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}.$$

Altre due relazioni si ottengono tramite le condizioni aggiuntive. Per la spline naturale, dalle d') si ha

$$\mu_0 = 0 \quad \text{e} \quad \mu_n = 0. \quad (7)$$

Per la spline completa, dalle d'') si ha:

$$\begin{aligned} s'_0(x_0) &= -\mu_0 \frac{h_0}{3} - \mu_1 \frac{h_0}{6} + \frac{f_1 - f_0}{h_0} = f'_0, \\ s'_{n-1}(x_n) &= \mu_{n-1} \frac{h_{n-1}}{6} + \mu_n \frac{h_{n-1}}{3} + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} = f'_n, \end{aligned}$$

dove  $f'_0 = f'(a)$  e  $f'_n = f'(b)$  sono assegnati. Si ottiene

$$h_0(2\mu_0 + \mu_1) = 6 f_{0,0,1} \quad \text{e} \quad h_{n-1}(\mu_{n-1} + 2\mu_n) = 6 f_{n-1,n,n}, \quad (8)$$

dove

$$f_{0,0,1} = \frac{f_1 - f_0}{h_0} - f'_0 \quad \text{e} \quad f_{n-1,n,n} = f'_n - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}}.$$

In ogni caso i  $\mu_i$  sono soluzione di un sistema lineare, ottenuto associando alle (6) le (7) o le (8), a seconda che debbano essere verificate le condizioni d') o d'').

Nel primo caso, tenendo conto che  $\mu_0 = \mu_n = 0$ , il sistema che si ottiene è

$$\mathcal{M} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{n-2} \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f_{0,1,2} \\ f_{1,2,3} \\ \vdots \\ f_{n-3,n-2,n-1} \\ f_{n-2,n-1,n} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

dove

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

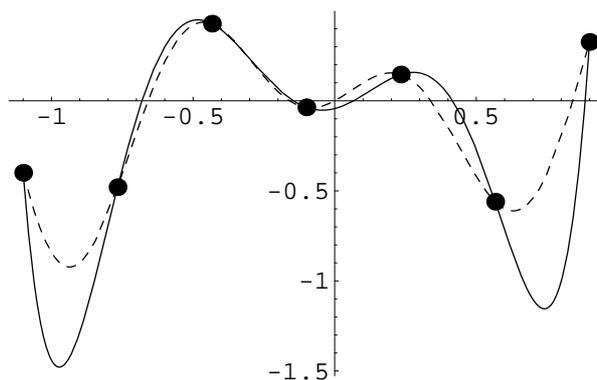


$$\mathbf{f} = [-0.3995, -0.4794, 0.4283, -0.03632, 0.1459, -0.5601, 0.3269]^T$$

Il polinomio di interpolazione di grado 6 è

$$p(x) = 15.7 x^6 + 9.052 x^5 - 18.55 x^4 - 6.716 x^3 + 4.184 x^2 + 0.3977 x - 0.04318$$

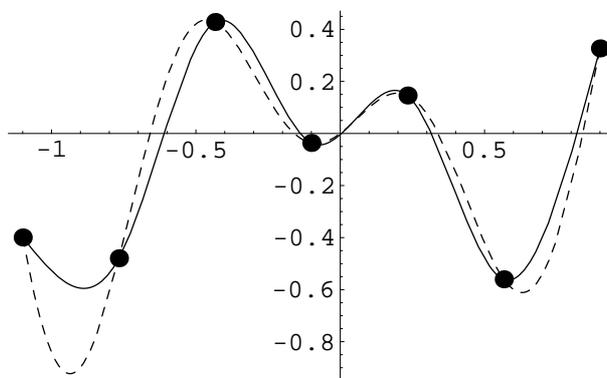
La figura mostra il grafico di  $f(x)$  (con linea tratteggiata), i punti dell'interpolazione e il grafico di  $p(x)$  (con linea continua).



Costruiamo ora le due spline. La spline naturale risulta

$$s(x) = \begin{cases} 10.32(x - x_0)^3 - 1.386(x - x_0) - 0.3995, \\ -14.61(x - x_1)^3 - 10.32(x - x_2)^3 + 5.493(x - x_1) - 0.8616, \\ 11.07(x - x_2)^3 + 14.61(x - x_3)^3 - 4.248(x - x_2) + 0.9695, \\ -12.22(x - x_3)^3 - 11.07(x - x_4)^3 + 3.134(x - x_3) - 0.4464, \\ 13.81(x - x_4)^3 + 12.22(x - x_5)^3 - 5.01(x - x_4) + 0.5983, \\ -13.81(x - x_6)^3 + 4.195(x - x_5) - 1.072, \end{cases}$$

e il suo grafico, sovrapposto a quello della  $f(x)$ , è riportato nella figura.



La spline completa, costruita tenendo conto che  $f'(x_0) = -6.076$  e  $f'(x_n) = 5.632$  risulta

$$s(x) = \begin{cases} 3.778(x-x_0)^3 - 24.38(x-x_1)^3 + 2.049(x-x_0) - 1.302, \\ -12.82(x-x_1)^3 - 3.778(x-x_2)^3 + 4.568(x-x_1) - 0.6193, \\ 10.46(x-x_2)^3 + 12.82(x-x_3)^3 - 3.981(x-x_2) + 0.9033, \\ -11.55(x-x_3)^3 - 10.46(x-x_4)^3 + 2.993(x-x_3) - 0.4238, \\ 11.77(x-x_4)^3 + 11.55(x-x_5)^3 - 4.71(x-x_4) + 0.5738, \\ 7.484(x-x_5)^3 - 11.77(x-x_6)^3 + 3.137(x-x_5) - 0.9961, \end{cases}$$

e il suo grafico, sovrapposto a quello della  $f(x)$ , è riportato nella figura. Non stupisce che l'approssimazione fornita dalla spline completa appaia migliore vicino agli estremi.

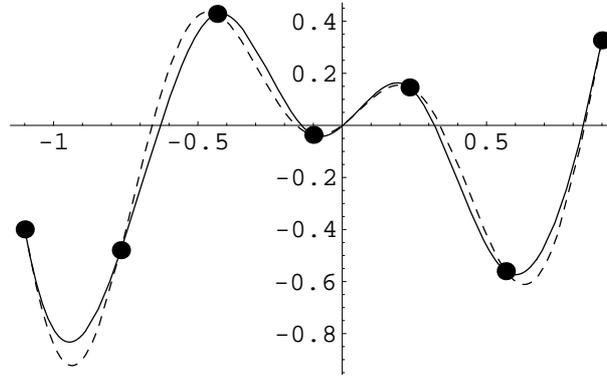


Figure 1: Spline completa.

### 3.2 Costo computazionale

Il costo computazionale viene determinato a meno di termini costanti rispetto ad  $n$ . Indicando con A le operazioni additive e con M le operazioni moltiplicative, per la costruzione dei coefficienti e dei termini noti del sistema lineare (9) sono richieste  $4nA$  e  $3nM$ . Per la risoluzione del sistema tridiagonale sono richieste  $3nA$  e  $5nM$ . Per il calcolo degli  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  sono richieste  $3nA$  e  $3nM$ . Quindi in totale la costruzione della spline richiede  $10nA$  e  $11nM$ . Una lieve riduzione si ha nel caso dei nodi equidistanti.

Per calcolare il valore della spline in un punto  $x$  è necessario prima individuare l'indice  $i$  tale che  $x \in (x_i, x_{i+1})$ . Per ottenere  $i$  si può usare l'algoritmo banale (cioè confrontare  $x$  successivamente con  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ ) e questo richiede  $n-1$  confronti. Se però  $n$  è potenza di 2, si può usare l'algoritmo di bisezione (cioè confrontare  $x$  con  $x_{n/2}$ , se  $x$  è minore di  $x_{n/2}$  si confronta  $x$  con  $x_{n/4}$ , se  $x$  è maggiore di  $x_{n/2}$  si confronta  $x$  con  $x_{3n/4}$ , e così via). Questo procedimento richiede  $\log_2 n$  confronti. Una volta trovato  $i$ , per calcolare  $s(x)$  sono richieste  $5A$  e  $9M$ .

### 3.3 Condizionamento

Studiamo ora il condizionamento del calcolo di  $s(x)$  per un  $x$  diverso dai nodi. Consideriamo il caso della spline naturale e supponiamo per semplicità che i nodi siano equidistanti e non affetti da errore. Scriviamo il sistema (13) nella forma

$$\mathcal{M} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{b}, \quad (14)$$

dove  $\boldsymbol{\mu}$  è il vettore dei  $\mu_i$  e  $\mathbf{b}$  è il vettore di componenti  $b_i = 6(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})/h^2$ . Supponendo di perturbare i dati del problema da  $f_i$  a  $\tilde{f}_i = f_i + \delta_i$ , con  $|\delta_i| \leq \delta$ , la corrispondente variazione  $\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}$  del termine noto del sistema (14) risulta maggiorata in norma infinito da

$$\|\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\| = \frac{6}{h^2} \max_{i=1, n-1} |\delta_{i+1} - 2\delta_i + \delta_{i-1}| \leq \frac{24\delta}{h^2}.$$

Quindi

$$\frac{\|\tilde{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}\|}{\|\boldsymbol{\mu}\|} \leq K(\mathcal{M}) \frac{\|\tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|},$$

dove  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$  è la soluzione del sistema il cui termine noto è  $\tilde{\mathbf{b}}$  e  $K(\mathcal{M})$  è il numero di condizionamento di  $\mathcal{M}$  in norma infinito. La matrice  $\mathcal{M}$  è ben condizionata perché  $K(\mathcal{M}) \leq 6$  per ogni  $n$ . Quindi il problema del calcolo dei  $\mu_i$  è ben condizionato. Lo stesso si può dire per la (5) del calcolo dei coefficienti  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  e per la (4) del calcolo di  $s_i(x)$  per  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ .

### 3.4 Proprietà di minima curvatura

Le spline cubiche sono molto usate nella grafica perché fra le funzioni con derivata seconda continua che interpolano la funzione  $f(x)$  nei nodi  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , sono quelle che hanno minima curvatura, cioè che oscillano meno, come risulta dal seguente teorema.

**Teorema 1** *Fra tutte le funzioni  $g \in C^2[a, b]$ , tali che  $g(x_i) = f_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , la spline cubica naturale  $s(x)$  è quella che minimizza l'integrale*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx. \quad (15)$$

**Dim.** Si ha

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b [g''(x) - s''(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [g''(x)]^2 dx - 2 \int_a^b [g''(x) - s''(x)] s''(x) dx - \int_a^b [s''(x)]^2 dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Per ogni sottointervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  si ha, integrando due volte per parti,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} [g''(x) - s''(x)] s''(x) dx = \left[ [g'(x) - s'(x)] s''(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \left[ [g(x) - s(x)] s^{(3)}(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g(x) - s(x)] s^{(4)}(x) dx.$$

Poiché la  $s(x)$  sull'intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$  coincide con un polinomio di grado al più 3, è  $s^{(4)}(x) = 0$ . Inoltre  $s(x_i) = g(x_i)$ ,  $s(x_{i+1}) = g(x_{i+1})$ , per cui

$$\begin{aligned} \int_a^b [g''(x) - s''(x)] s''(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g''(x) - s''(x)] s''(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ [g'(x) - s'(x)] s''(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} = \left[ [g'(x) - s'(x)] s''(x) \right]_a^b \end{aligned}$$

e tale espressione è nulla in quanto  $s''(a) = s''(b) = 0$ . Dalla (16) segue che

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [g''(x)]^2 dx$$

per ogni funzione  $g(x)$  a derivata seconda continua tale che  $g(x_i) = f_i$ .  $\square$

Un teorema analogo al teorema 1 vale per la spline completa (anche la dimostrazione è analoga).

**Teorema 2** *Fra tutte le funzioni  $g \in C^2[a, b]$ , tali che  $g(x_i) = f_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , e  $g'(a) = f'(a)$  e  $g'(b) = f'(b)$ , la spline cubica completa  $s(x)$  è quella che minimizza l'integrale*

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx.$$

La  $g''(x)$  è legata alla curvatura della  $g(x)$  nel punto  $x$ , definita come il reciproco del raggio del cerchio osculatore in  $x$ , e data dall'espressione

$$c(x) = |g''(x)| (1 + [g'(x)]^2)^{-3/2}.$$

L'integrale (15) può allora essere assunto come una misura della *curvatura globale* della  $g(x)$  se  $|g'(x)|$  è piccolo rispetto ad 1. Dal teorema 1 risulta quindi che la spline cubica naturale è quella che minimizza la curvatura globale. Segue anche che se  $f \in C^2[a, b]$ , allora

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx.$$

Si costruisce ad esempio la spline cubica completa che approssima  $f(x) = \cos(\pi x)$  nei nodi  $x_i = i, i = 0, \dots, n$ . È  $h_i = x_{i+1} - x_i = 1, f(x_i) = (-1)^i, f'(x_0) = f'(x_n) = 0$ . Quindi i momenti risolvono il sistema

$$\begin{cases} 2\mu_0 + \mu_1 = -12 \\ \mu_{i-1} + 4\mu_i + \mu_{i+1} = (-1)^{i+1} 24, & i = 1, \dots, n-1, \\ \mu_{n-1} + 2\mu_n = (-1)^{n+1} 12 \end{cases}$$

Questo sistema ha la soluzione  $\mu_i = (-1)^{i+1} 12$ , da cui si ricava che  $\alpha_i = (-1)^{i+1} 6$  e  $\beta_i = (-1)^i 3$ . Quindi

$$s_i(x) = (-1)^i \left[ 2(x - x_i)^3 + 2(x - x_{i+1})^3 - 6(x - x_i) + 3 \right],$$

e

$$\begin{aligned} \int_a^b [s''(x)]^2 dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [s_i''(x)]^2 dx = n \int_{x_0}^{x_1} [s_0''(x)]^2 dx \\ &= 12^2 n \int_0^1 (x + (x-1))^2 dx = 12^2 n \frac{1}{3} = 48n, \end{aligned}$$

mentre

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx = \pi^4 \int_0^n \cos^2(\pi x) dx = \pi^4 \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi} \right]_0^n = \pi^4 \frac{n}{2} \sim 48.7n.$$

Se i nodi vengono infittiti aggiungendo altri nodi alla precedente suddivisione dell'intervallo, la successione degli integrali  $\int_a^b [s''(x)]^2 dx$  risulta non decrescente, limitata superiormente da  $\int_a^b [f''(x)]^2 dx$ .

### 3.5 Proprietà di convergenza

Il primo teorema studia la convergenza dei momenti della  $s(x)$  ai valori della derivata seconda della  $f(x)$  nei nodi, il secondo la convergenza della  $s(x)$  e delle sue derivate fino al terzo ordine alla  $f(x)$  e alle sue derivate per  $x \in [a, b]$ . Per semplicità si considera dapprima il caso dei nodi equidistanti.

**Teorema 3** *Sia  $f \in C^4[a, b]$ . Posto  $M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$ , per i momenti della spline cubica  $s(x)$  completa vale la relazione*

$$\max_{i=0, \dots, n} |\mu_i - f''(x_i)| \leq \frac{3}{4} M_4 h^2. \quad (17)$$

**Dim.** Dalla formula di Taylor si ha

$$\begin{aligned} f_{i+1} - f_i &= h f'_i + \frac{h^2}{2} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi_{i,1}), \\ f_{i-1} - f_i &= -h f'_i + \frac{h^2}{2} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi_{i,2}), \end{aligned}$$

con  $\xi_{i,1}, \xi_{i,2} \in (a, b)$ , e quindi

$$f_{i-1, i, i+1} = h f''(x_i) + \frac{h^3}{4!} \left( f^{(4)}(\xi_{i,1}) + f^{(4)}(\xi_{i,2}) \right). \quad (18)$$

Usando ancora la formula di Taylor

$$\begin{aligned} f''(x_{i+1}) &= f''(x_i) + h f'''(x_i) + \frac{h^2}{2} f^{(4)}(\xi_{i,3}), \\ f''(x_{i-1}) &= f''(x_i) - h f'''(x_i) + \frac{h^2}{2} f^{(4)}(\xi_{i,4}), \end{aligned} \quad (19)$$

con  $\xi_{i,3}, \xi_{i,4} \in (a, b)$ . Si definiscono ora le differenze  $d_i = \mu_i - f''(x_i)$ , per  $i = 0, \dots, n$ , e

$$g_0 = 2d_0 + d_1, \quad g_n = d_{n-1} + 2d_n, \quad g_i = d_{i-1} + 4d_i + d_{i+1} \text{ per } i = 1, \dots, n-1.$$

Per  $i = 1, \dots, n-1$  da (11), (18) e (19) si ha

$$g_i = \frac{h^2}{4} \left[ f^{(4)}(\xi_{i,1}) + f^{(4)}(\xi_{i,2}) - 2f^{(4)}(\xi_{i,3}) - 2f^{(4)}(\xi_{i,4}) \right].$$

In modo analogo dalle (12) si ottiene

$$g_0 = \frac{h^2}{4} \left[ f^{(4)}(\xi_{0,1}) - 2f^{(4)}(\xi_{0,3}) \right] \quad \text{e} \quad g_n = \frac{h^2}{4} \left[ f^{(4)}(\xi_{n,2}) - 2f^{(4)}(\xi_{n,4}) \right].$$

Passando ai moduli si ha

$$\begin{aligned} |g_i| &\leq \frac{3}{2} M_4 h^2, \text{ per } i = 1, \dots, n-1, \\ |g_0| &\leq \frac{3}{4} M_4 h^2 \quad \text{e} \quad |g_n| \leq \frac{3}{4} M_4 h^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Sia ora  $k$  l'indice per cui

$$|d_k| = \max_{i=0, \dots, n} |d_i|. \quad (21)$$

Se  $1 \leq k \leq n-1$ , si ha

$$g_k = d_{k-1} + 4d_k + d_{k+1} = 2d_k + (d_{k-1} + d_k) + (d_k + d_{k+1}).$$

Per la (21) le due quantità  $d_{k-1} + d_k$  e  $d_k + d_{k+1}$  hanno lo stesso segno di  $d_k$ , per cui

$$|g_k| \geq 2|d_k|.$$

Per la (20) è allora

$$|\mu_k - f''(x_k)| = |d_k| \leq \frac{3}{4} M_4 h^2.$$

Se invece  $k = 0$  oppure  $k = n$ , si ottiene

$$|\mu_0 - f''(x_0)| \leq |g_0| \quad \text{e} \quad |\mu_n - f''(x_n)| \leq |g_n|,$$

e in entrambi i casi segue la tesi.  $\square$

**Teorema 4** *Nell'ipotesi del teorema 3, per la spline completa valgono le limitazioni*

$$\begin{aligned} |f'''(x) - s_i'''(x)| &\leq 2M_4 h, \quad \text{per } x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1, \\ |f''(x) - s''(x)| &\leq \frac{7}{4} M_4 h^2, \\ |f'(x) - s'(x)| &\leq \frac{7}{4} M_4 h^3, \\ |f(x) - s(x)| &\leq \frac{7}{8} M_4 h^4, \quad \text{per } x \in [a, b]. \end{aligned}$$

**Dim.** Dalla (2) si ha che per  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  è  $s_i'''(x) = \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{h}$ , da cui

$$\begin{aligned} f'''(x) - s_i'''(x) &= f'''(x) - \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{h} = f'''(x) - \frac{[\mu_{i+1} - f''(x_{i+1})] - [\mu_i - f''(x_i)]}{h} \\ &\quad - \frac{[f''(x_{i+1}) - f''(x)] - [f''(x_i) - f''(x)]}{h}. \end{aligned}$$

Per la formula di Taylor e per la (17) è

$$|f'''(x) - s_i'''(x)| \leq \frac{3}{2} M_4 h + \frac{1}{2h} \left| (x_{i+1} - x)^2 f^{(4)}(\xi_1) - (x_i - x)^2 f^{(4)}(\xi_2) \right|,$$

con  $\xi_1, \xi_2 \in (x_i, x_{i+1})$ , e per la (1) è

$$|f'''(x) - s_i'''(x)| \leq \frac{3}{2} M_4 h + \frac{1}{2} h M_4 \leq 2M_4 h. \quad (22)$$

Per la seconda disuguaglianza, se  $x$  coincide con uno dei nodi, la maggiorazione discende subito dalla (17); se  $x$  non coincide con uno dei nodi, sia  $x_i$  il nodo più vicino a  $x$  e  $j = i - 1$  oppure  $j = i$  a seconda che  $x < x_i$  oppure  $x > x_i$ . Allora

$$\int_{x_i}^x [f'''(t) - s_j'''(t)] dt = [f''(x) - s''(x)] - [f''(x_i) - s''(x_i)],$$

da cui

$$f''(x) - s''(x) = f''(x_i) - s''(x_i) + \int_{x_i}^x [f'''(t) - s_j'''(t)] dt.$$

Poiché  $|x - x_i| \leq h/2$ , per le (17) e (22) risulta

$$|f''(x) - s''(x)| \leq \frac{3}{4} M_4 h^2 + 2M_4 h \frac{h}{2} \leq \frac{7}{4} M_4 h^2.$$

Per ricavare la terza disuguaglianza, poiché per  $i = 0, \dots, n$ , è  $s(x_i) = f_i$ , per il teorema di Rolle in ogni intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , esiste un punto  $\xi_i$ , tale che

$$f'(\xi_i) = s'(\xi_i). \quad (23)$$

Quindi per ogni  $x \in [a, b]$ , esiste uno  $\xi_i$ , con  $|\xi_i - x| \leq h$ , per cui vale la (23), e quindi

$$\int_{\xi_i}^x [f''(t) - s''(t)] dt = f'(x) - s'(x).$$

Passando ai moduli si ha

$$|f'(x) - s'(x)| \leq \frac{7}{4} M_4 h^3.$$

In modo analogo si ricava la quarta disuguaglianza, tenendo conto che per ogni  $x \in [a, b]$  esiste un indice  $i$  per cui  $|x - x_i| \leq h/2$ .  $\square$

I teoremi 3 e 4 vengono facilmente generalizzati al caso di nodi non equidistanti.

**Teorema 5** Sia  $f \in C^4[a, b]$ . Posto

$$M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|, \quad H = \max_{i=0, \dots, n-1} h_i, \quad h_{\min} = \min_{i=0, \dots, n} h_i,$$

per la spline completa valgono le limitazioni

$$\begin{aligned} |\mu_i - f''(x_i)| &\leq \frac{3}{4} M_4 H^2, \quad \text{per } i = 0, \dots, n-1, \\ |f'''(x) - s'''(x)| &\leq 2M_4 \frac{H^2}{h_{\min}}, \quad \text{per } x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \dots, n-1, \\ |f''(x) - s''(x)| &\leq \frac{7}{4} M_4 \frac{H^3}{h_{\min}}, \\ |f'(x) - s'(x)| &\leq \frac{7}{4} M_4 \frac{H^4}{h_{\min}}, \\ |f(x) - s(x)| &\leq \frac{7}{8} M_4 \frac{H^5}{h_{\min}}, \quad \text{per } x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Dal teorema 5 segue che per una funzione  $f(x)$  derivabile con continuità fino al quarto ordine, se si infittiscono i nodi in modo regolare, cioè in modo che il rapporto  $H/h_{\min}$  sia sempre limitato, allora si ha convergenza per  $H \rightarrow 0$  della spline e delle sue derivate fino al terzo ordine rispettivamente alla  $f(x)$  e alle sue derivate.

### 3.6 Quadratura con le spline

Dalla spline cubica completa  $s(x)$  si ottiene un'interessante formula di quadratura per l'approssimazione di

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Integrando la (4) si ha

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \int_a^b s(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s_i(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \mu_{i+1} \frac{(x-x_i)^4}{24h_i} - \mu_i \frac{(x-x_{i+1})^4}{24h_i} + \alpha_i \frac{(x-x_i)^2}{2} + \beta_i(x-x_i) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ (\mu_i + \mu_{i+1}) \frac{h_i^3}{24} + \alpha_i \frac{h_i^2}{2} + \beta_i h_i \right], \end{aligned}$$

da cui, sostituendo le (5), si ricava

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i}{2} (f_i + f_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h_i^3}{24} (\mu_i + \mu_{i+1}). \quad (24)$$

La prima sommatoria fornisce lo stesso valore della formula dei trapezi. Se  $f \in C^4[a, b]$ , per il teorema 4 l'errore che si commette utilizzando  $S_{n+1}$  come approssimazione di  $S$  è

$$|S - S_{n+1}| \leq \int_a^b |f(x) - s(x)| dx \leq \frac{7}{8} M_4 \frac{H^5}{h_{\min}} (b-a) \leq \frac{7n}{8} M_4 \frac{H^6}{h_{\min}}.$$

Se i punti  $x_i$  sono equidistanti con  $h_i = h$  per  $i = 0, \dots, n-1$ , risulta

$$|S - S_{n+1}| \leq \frac{7n}{8} M_4 h^5 = \frac{7}{8} M_4 \frac{(b-a)^5}{n^4},$$

dello stesso ordine della formula di Cavalieri-Simpson. Inoltre dal sistema (10) si ha

$$\begin{bmatrix} 2\mu_0 + \mu_1 \\ \mu_0 + 4\mu_1 + \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{n-2} + 4\mu_{n-1} + \mu_n \\ \mu_{n-1} + 2\mu_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} -hf'_0 + f_1 - f_0 \\ f_0 - 2f_1 + f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \\ f_{n-1} - f_n + hf'_n \end{bmatrix}.$$

Quindi le somme delle loro componenti risultano

$$3h \sum_{i=0}^{n-1} (\mu_i + \mu_{i+1}) = 6(f'_n - f'_0) = 6(f'(b) - f'(a)),$$

per cui sostituendo nella (24) si ha

$$S_{n+1} = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f_i + f_{i+1}) - \frac{h^2}{12} (f'(b) - f'(a)).$$

Questa non è altro che la formula di Eulero-Maclaurin al primo ordine.

### 3.7 Rappresentazione mediante B-spline

Per definire e costruire una spline si può procedere anche in modo diverso, esprimendola come combinazione lineare di opportune spline elementari linearmente indipendenti.

Per  $n \geq 4$ , si considerano i punti ausiliari

$$x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < a \quad \text{e} \quad b < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+3}.$$

Si definiscono *B-spline* (o *spline fondamentali*) *cubiche normalizzate* le funzioni  $S_i(x)$ ,  $i = -1, \dots, n+1$ , tali che

- (1)  $S_i \in C^2[x_{-3}, x_{n+3}]$ ,
- (2) in ogni intervallo  $S_i(x)$  coincide con un polinomio di terzo grado,
- (3)  $S_i(x) \equiv 0$  per  $x \leq x_{i-2}$  e  $x \geq x_{i+2}$ ,
- (4)  $S_i(x_i) = 1$ .

La condizione (4) può essere sostituita da una qualunque altra condizione che faccia sì che le B-spline non siano identicamente nulle, ad esempio

$$\int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} S_i(x) dx = 1.$$

I coefficienti della  $S_i(x)$  sono soluzione di un sistema lineare. Per verificare la non singolarità della matrice del sistema, basta dimostrare che se una funzione  $t_i(x)$  soddisfa le (1), (2), (3) ed inoltre è tale che  $t_i(x_i) = 0$ , allora  $t_i(x) \equiv 0$ . Infatti  $t_i(x)$  si annulla in almeno 3 punti nell'intervallo  $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ , quindi  $t_i'(x)$  si annulla in almeno due punti interni a tale intervallo, e poiché  $t_i'(x_{i-2}) = t_i'(x_{i+2}) = 0$ ,  $t_i'$  si annulla in almeno 4 punti di  $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ . In modo analogo si vede che  $t_i''(x)$  si annulla in almeno 5 punti di  $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ , di cui 3 interni, e questo è possibile solo se  $t_i \equiv 0$ , perché  $t_i(x)$  coincide con 4 polinomi di terzo grado sui 4 intervalli  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = i-2, \dots, i+1$ . Ne segue che la  $S_i(x)$  esiste ed è unica.

Per verificare che le B-spline sono linearmente indipendenti, se ne considera una combinazione nulla

$$\phi(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} \alpha_i S_i(x) = 0.$$

Poiché  $S_i(x_{-2}) = 0$  per  $i \geq 0$ , risulta  $\phi(x_{-2}) = \alpha_{-1} S_{-1}(x_{-2})$ , e dovendo essere  $\phi(x_{-2}) = 0$ , ne segue che  $\alpha_{-1} = 0$ . Si procede considerando i valori  $\phi(x_k)$ ,  $k = -1, \dots, n$ . Risulta così che i coefficienti della combinazione sono tutti nulli.

Per ogni intervallo  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , esistono quattro B-spline linearmente indipendenti e non nulle con cui è possibile esprimere qualunque polinomio di terzo grado. Ne segue che ogni spline cubica  $s(x)$  può essere scritta come

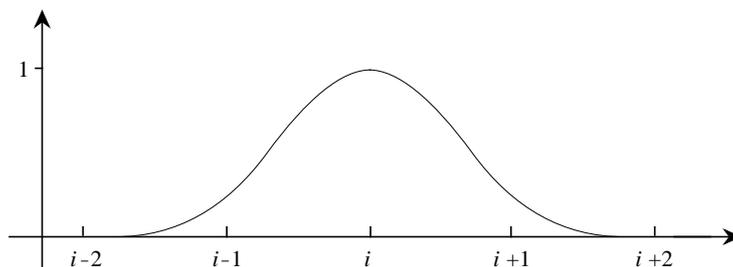
$$s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} \alpha_i S_i(x),$$

dove gli  $\alpha_i$  sono degli opportuni coefficienti. Se uno degli  $\alpha_i$  viene modificato, la spline  $s(x)$  risulta modificata solo nell'intervallo  $(x_{i-2}, x_{i+2})$ , e quindi non è necessario ricalcolarla tutta. Questo è particolarmente vantaggioso nelle applicazioni grafiche.

Nel caso particolare dei nodi equidistanti, indicato con  $h$  il passo costante e posto  $z = (x - x_i)/h$ , risulta

$$S_i(x) = \begin{cases} (z^3 + 6z^2 + 12z + 8)/4 & \text{per } -2 \leq z \leq -1, \\ (-3z^3 - 6z^2 + 4)/4 & \text{per } -1 \leq z \leq 0, \\ (3z^3 - 6z^2 + 4)/4 & \text{per } 0 \leq z \leq 1, \\ (-z^3 + 6z^2 - 12z + 8)/4 & \text{per } 1 \leq z \leq 2, \\ 0 & \text{per } z \leq -2 \text{ e } z \geq 2. \end{cases}$$

In figura è riportato il grafico della  $S_i(x)$  nel caso  $x_i = i$ .



Le B-spline vengono calcolate in modo stabile usando l'algoritmo ricorsivo di de Boor.

### 3.8 Spline di ordine superiore

Le spline cubiche sono le più usate, perché sono quelle di grado minimo che permettono di raccordare le derivate seconde nei nodi. Naturalmente spline di grado più alto permetterebbero di raccordare derivate di ordine più elevato, ma il maggior costo non sarebbe ricompensato da un miglioramento grafico apprezzabile, in quanto l'occhio umano non arriva a discernere differenze così microscopiche. Non esistono comunque difficoltà a una generalizzazione a spline di ordine dispari maggiore di 3.

Fissato un intero  $m$  tale che  $2 \leq m \leq n+1$ , la spline di ordine  $2m-1$  per l'approssimazione della  $f(x)$  può essere definita in uno dei modi seguenti.

(a) *Definizione descrittiva:* si definisce *spline di ordine*  $2m - 1$  una funzione  $s(x)$  tale che

- (1)  $s(x_i) = f_i$ , per  $i = 0, \dots, n$ ,
- (2)  $s$  è un polinomio di grado al più  $2m - 1$  in  $[x_i, x_{i+1}]$ , per  $i = 0, \dots, n - 1$ ,
- (3)  $s \in C^{2m-2}[a, b]$ ,
- (4) sia

$$\begin{aligned} s^{(m)}(a) &= s^{(m+1)}(a) = \dots = s^{(2m-2)}(a) = 0, \\ s^{(m)}(b) &= s^{(m+1)}(b) = \dots = s^{(2m-2)}(b) = 0, \end{aligned}$$

La definizione a), b), c), d') di spline naturale corrisponde alla definizione descrittiva con  $m = 2$ .

La definizione descrittiva individua univocamente la spline. Infatti, supponiamo per assurdo che esistano due spline  $\sigma_1(x)$  e  $\sigma_2(x)$  che soddisfano la definizione descrittiva. Allora la funzione  $s(x) = \sigma_1(x) - \sigma_2(x)$  verifica le (1) - (4) della definizione descrittiva relativamente alla  $f(x)$  identicamente nulla. Poiché in ogni intervallo  $s(x)$  coincide con un polinomio di grado al più  $2m - 1$ , essa è individuata da  $2mn$  coefficienti. Le (1), (3) e (4) forniscono esattamente  $2mn$  condizioni lineari sui coefficienti. Quindi i coefficienti della  $s(x)$  soddisfano il sistema lineare  $Ax = \mathbf{0}$  di ordine  $2mn$ . Per verificare che tale sistema ha un'unica soluzione, si applica ripetutamente la formula di integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int_a^b [s^{(m)}(x)]^2 dx &= \left[ s^{(m-1)}(x) s^{(m)}(x) \right]_a^b - \int_a^b s^{(m-1)}(x) s^{(m+1)}(x) dx = \dots \\ &= (-1)^m \int_a^b s''(x) s^{(2m-2)}(x) dx = (-1)^m \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s''(x) s^{(2m-2)}(x) dx \\ &= (-1)^m \sum_{i=0}^{n-1} \left[ s'(x) s^{(2m-2)}(x) - s(x) s^{(2m-1)}(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}}, \end{aligned}$$

in quanto  $s^{(2m)}(x) \equiv 0$  su ogni intervallo, e poiché  $s(x_i) = 0$  per  $i = 0, \dots, n$  e  $s^{(2m-2)}(a) = s^{(2m-2)}(b) = 0$ , ne segue che

$$\int_a^b [s^{(m)}(x)]^2 dx = 0.$$

Quindi la  $s(x)$ , per le condizioni di continuità, deve essere un polinomio di grado  $m - 1$ , e poiché si annulla in  $n + 1$  punti, con  $n + 1 > m - 1$ , ne segue che è identicamente nulla la spline che approssima la funzione identicamente nulla.

(b) *Definizione variazionale:* si definisce *spline di ordine*  $2m - 1$  una funzione  $s(x)$  tale che

- (1)  $s(x_i) = f_i$ , per  $i = 0, \dots, n$ ,
- (2)  $s \in C^{m-1}[a, b]$ ,

(3) l'integrale

$$\int_a^b [s^{(m)}(x)]^2 dx$$

esiste ed è quello minimo fra gli integrali di tutte le funzioni che soddisfano le condizioni (1) e (2).

Le due definizioni variazionale e descrittiva sono equivalenti. Sia infatti  $s(x)$  la spline che soddisfa le (1) – (4) della definizione descrittiva per l'approssimazione della  $f(x)$  e  $t(x)$  una funzione che soddisfa le (1) e (2) della definizione variazionale, allora

$$\begin{aligned} \int_a^b [t^{(m)}(x)]^2 dx - \int_a^b [s^{(m)}(x)]^2 dx &= \int_a^b [t^{(m)}(x) - s^{(m)}(x)]^2 dx \\ + 2 \int_a^b [t^{(m)}(x) - s^{(m)}(x)]s^{(m)}(x) dx &\geq 2 \int_a^b [t^{(m)}(x) - s^{(m)}(x)]s^{(m)}(x) dx, \end{aligned}$$

in cui il segno di uguaglianza vale solo se  $s(x)$  e  $t(x)$  coincidono identicamente. Procedendo come per la dimostrazione del teorema 1, si dimostra che l'ultimo integrale è nullo. Ne segue che

$$\int_a^b [t^{(m)}(x)]^2 dx \geq \int_a^b [s^{(m)}(x)]^2 dx$$

e che il minimo viene assunto solo dalla  $s(x)$ .

### 3.9 Perché non si usano le spline di ordine pari?

La richiesta della continuità delle derivate nei nodi fa sì che la spline fornisca un'approssimazione globale, nel senso che una variazione di un singolo valore  $f_j$  nel  $j$ -esimo nodo si ripercuote su tutte le  $s_i(x)$ . Però nel caso delle spline di ordine dispari, l'intensità di questa dipendenza decresce con la distanza di  $i$  da  $j$ . Questo invece non accade con le spline di ordine pari. Esaminiamo, ad esempio, il caso della *spline quadratica*, definita come la funzione reale  $s \in C^1[a, b]$  che in ogni intervallo coincide con un polinomio  $s_i(x)$  di grado al più 2 ed è tale che  $s(x_i) = f(x_i)$ , per  $i = 0, \dots, n$ .

Procedendo come per le spline cubiche, si pone  $\nu_i = s'_i(x_i)$ , per  $i = 0, \dots, n-1$  e  $\nu_n = s'_{n-1}(x_n)$ ; risulta quindi

$$s'_i(x) = \nu_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} - \nu_i \frac{x - x_{i+1}}{h_i}.$$

Integrando si ha

$$s_i(x) = \nu_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} - \nu_i \frac{(x - x_{i+1})^2}{2h_i} + \alpha_i,$$

e imponendo le condizioni  $s_i(x_i) = f_i$  e  $s_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$  si ottiene

$$-\nu_i \frac{h_i}{2} + \alpha_i = f_i \quad \text{e} \quad \nu_{i+1} \frac{h_i}{2} + \alpha_i = f_{i+1},$$

da cui

$$\nu_i + \nu_{i+1} = 2 \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}, \quad \text{per } i = 0, \dots, n-1.$$

Questa equazione alle differenze del primo ordine consente di calcolare i  $\nu_i$ , purché sia assegnato un valore iniziale  $\nu_0 = s'_0(x_0)$  oppure  $\nu_n = s'_{n-1}(x_n)$ . Ad esempio con la condizione  $\nu_0 = 0$  si ottiene

$$\nu_i = 2 \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j-1} \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j}.$$

Gli  $\alpha_i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  vengono poi calcolati per sostituzione.

Oltre ad essere meno efficace della spline cubica dal punto di vista grafico, la spline quadratica non viene usata perché per certe scelte dell'unica condizione ausiliaria, è instabile. L'instabilità è causata dal fatto che si risolve un'equazione alle differenze la cui equazione omogenea associata ha la soluzione  $\nu_i = (-1)^i \nu_0$ , mentre la soluzione dell'equazione completa potrebbe essere decrescente. Inoltre, se viene modificato un valore della funzione  $f(x_k)$ , la soluzione varia solo nelle componenti  $\nu_i$ , con  $i \geq k$ .