Compito di Analisi Numerica, a.a. 2005-2006
sesto appello, 20 Settembre 2006

Esercizio 1. Sia $g(x) = a \log x$ con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Determinare al variare di a il numero di punti fissi di $g(x)$ e discutere la convergenza della successione definita da $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, al variare di $x_0 \in \mathbb{R}^+$. In particolare, individuare i casi di convergenza monotona, determinare l'ordine di convergenza e l'insieme dei valori di x_0 per cui la successione non è definita.

Esercizio 2. Sia $n > 2$ un intero e siano $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.
a) si determinino un vettore $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ e una costante β tali che la matrice di Householder $P = I - \beta \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ trasformi il vettore $b\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ in $\alpha \boldsymbol{e}_1$, dove $b, \alpha \in \mathbb{R}$.
b) Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice $n \times n$ tale che $a_{i,i} = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i+1,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,j} = 0$ altrove, dove $b_i \in \mathbb{R}$. Si dimostri che dopo un passo del metodo di Householder per la fattorizzazione QR di $A_1 = A$ la matrice $A_2 = P_1 A_1$ differisce da A solo nella sottomatrice principale di testa 2×2 che vale $\begin{bmatrix} \hat{b}_1 & c_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix}$ e si determinino le espressioni di $\hat{b}_1$, c_1 e d_1.
c) Si dimostri che la matrice R della fattorizzazione $A = QR$ è bidiagonale superiore e si descriva un algoritmo per il calcolo dei suoi elementi diagonali e sopra-diagonali di costo computazionale $O(n)$.

Esercizio 3. Si descriva un algoritmo per calcolare l'espressione

$$f(a, b, c) = \frac{ac + bc}{a - b}$$

che sia stabile all'indietro e si diano maggiorazioni ai valori assoluti delle perturbazioni $\delta_a, \delta_b, \delta_c$ per cui $\phi(a, b, c) = f(a(1 + \delta_a), b(1 + \delta_b), c(1 + \delta_c))$, dove $\phi(a, b, c)$ è il valore calcolato eseguendo l'algoritmo in aritmetica *floating point* con numeri di macchina a, b, c, $a \neq b$.

Esercizio 4. Si scriva una subroutine in Fortran 90 che, presi in input un intero n e una matrice $n \times n$ reale $A = (a_{i,j})$, dia in output la norma di Frobenius $||A||_F = (\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2)^{1/2}$ di $||A||$.