Appello 4 di Analisi Numerica, a.a. 2010-2011
16/6/2011

Esercizio 1. Dati tre vettori $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, con $n \geq 4$, si consideri la matrice $A = (a_{i,j})$ di dimensione n con elementi $a_{i,i} = u_i$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,i+1} = v_i$, $a_{i+1,i} = w_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{1,n} = w_n$, $a_{n,1} = v_n$, $a_{i,j} = 0$ altrove. Ad esempio, per $n = 4$ vale

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & w_4 \\ w_1 & u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & w_2 & u_3 & v_3 \\ v_4 & 0 & w_3 & u_4 \end{bmatrix}$$

Si descriva un algoritmo per il calcolo della somma degli elementi diagonali di A^2 che impieghi non più di $\gamma_1 n + \gamma_2$ operazioni aritmetiche, con γ_1, γ_2 costanti. Si scriva una *function* nella sintassi di Octave che implementi tale algoritmo. (Facoltativo) Dare un algoritmo in cui $\gamma_1 = 4$ e dimostrarne la stabilità all'indietro.

Esercizio 2. Siano $A = (a_{i,j})$ e $M = (m_{i,j})$ matrici $n \times n$ tali che $m_{i,i} = a_{i,i}$ per $i = 1, \ldots, n$, $m_{i+1,i} = a_{i+1,i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $m_{i,j} = 0$ altrove. Si consideri il metodo iterativo per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ definito dal partizionamento $A = M - N$.
a) Si dimostri che se A oppure A^T è fortemente dominante diagonale o irriducibilmente dominante diagonale, allora il metodo è convergente.
b) (Facoltativo) Nel caso in cui $a_{i,j} = 1$ per $i \neq j$ e $a_{i,i} = n$ si dimostri che il metodo iterativo converge più velocemente del metodo di Jacobi.

Esercizio 3. Si supponga di avere a disposizione un metodo per il calcolo del valore di e^x dato x. Per poter approssimare il logaritmo naturale $\alpha = \log(a)$ di un numero a tale che $1 < a < e$, si considerino le iterazioni del tipo $x_{k+1} = g(x_k)$, $x_0 \in [0, 1]$, dove $g(x)$ è una delle seguenti funzioni

$$g_1(x) = x + 1 - \frac{1}{a}e^x, \qquad g_2(x) = x + \frac{3}{2} - \frac{2}{a}e^x + \frac{1}{2a^2}e^{2x}$$

a) Si studi la convergenza locale delle due successioni generate in questo modo con attenzione all'ordine e alla monotonia, e si determini quale delle due è più efficiente dal punto di vista computazionale supponendo che il calcolo dell'esponenziale costi l'equivalente di 20 operazioni aritmetiche.

b) Si supponga che il valore effettivamente calcolato di e^x sia affetto da un errore minore o uguale a δ mentre le altre operazioni aritmetiche sono svolte in modo esatto. Si determini una limitazione al primo ordine in δ degli errori di approssimazione forniti dai due metodi.

c) (Facoltativo) Fra tutti i metodi definiti da $g(x) = x + p(e^x)$, dove $p(t)$ è un polinomio di grado al più m, determinare quello che garantisce il massimo ordine di convergenza e quello che dà la massima efficienza.