Analisi Numerica, Appello 3
29 Aprile 2011

Esercizio 1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $g(x) = ax + b/x$. Si diano condizioni sufficienti su a, b affinché $g(x)$ abbia almeno un punto fisso $\alpha \in \mathbb{R}$ ed esista un intorno $\mathcal{I} = [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$, $\rho > 0$, per cui la successione definita da $x_{k+1} = g(x_k)$ sia convergente per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$.

Si diano condizioni sufficienti su a, b affinché la convergenza sia localmente monotona e localmente quadratica.

Si descriva un algoritmo numericamente stabile all'indietro per il calcolo di $g(x)$ in aritmetica floating point. Se $\tilde{\alpha}$ è un numero di macchina tale che $\mathrm{fl}(g(\tilde{\alpha})) = \tilde{\alpha}$, dove $\mathrm{fl}(\cdot)$ denota il valore calcolato in aritmetica floating point, si dia una maggiorazione a $|\tilde{\alpha} - \alpha|$ a meno di termini del secondo ordine negli errori, in funzione della precisione di macchina u.

Esercizio 2. Si consideri la matrice reale $A = \begin{bmatrix} I_m & B \\ uv^T & I_n \end{bmatrix}$, dove I_n e I_m sono matrici identiche di dimensioni rispettivamente $n \times n$ e $m \times m$, B è matrice $m \times n$ e $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^m$. Studiare la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati al sistema $Ax = b$. In particolare si determinino e si confrontino i raggi spettrali delle corrispondenti matrici di iterazione e si dica quale dei due metodi è computazionalmente più conveniente.

Nel caso in cui $m = n$, B è la matrice tridiagonale con elelementi diagonali uguali a 2 e elementi sopradiagonali e sottodiagonali uguali a -1, u è il vettore di componenti uguali a 1 e v ha prima e ultima componente nulla, si dimostri che entrambi i metodi forniscono la soluzione esatta in un numero finito di passi e si dica quale dei due metodi è più conveniente in termini di costo computazionale complessivo.

Esercizio 3. Si scriva una function nella sintassi di Octave che preso in input un intero $n > 1$ e un intero $k > 1$, dia in output la traccia della potenza k-esima della matrice $n \times n$ di Hilbert $H = (h_{i,j})$, $h_{i,j} = 1/(i + j - 1)$, $i, j = 1, \ldots, n$.