**Compito di Analisi Numerica, a.a. 2009-2010, secondo appello**
**11 Febbraio 2010**

**Eercizio 1.** Sia $n \geq 2$ un intero e $\boldsymbol{a} = (a_i) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Si definisca $T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (t_{i,j})$ la matrice $n \times n$ tale che $t_{i,i} = a_i$, $i = 1, \ldots, n$, $t_{i+1,i} = b_i$, $i = 1, \ldots n-1$, $t_{i,j} = 0$ altrove.
**a)** Dati $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n-1}$, si verifichi che la matrice $V = (v_{i,j}) = T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^T T(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ è tridiagonale e si descriva un algoritmo per il calcolo dei $3n-2$ elementi $v_{i,j}$, per $|i-j| \leq 1$, che impieghi al più $5n$ operazioni aritmetiche.
**b)** Si scriva una function in Octave o una subroutine in Fortran 90 che dato $n$ e i vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ calcoli e dia in output i vettori $\boldsymbol{u} = (v_{i,i})$, $\boldsymbol{w} = (v_{i+1,i})$, $\boldsymbol{z} = (v_{i,i+1})$.
**c)** Si svolga una analisi in avanti dell'errore dell'algoritmo individuato nel caso in cui i vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ abbiano componenti positive. In particolare, denotando con $\widetilde{V} = (\widetilde{v}_{i,j})$ la matrice effettivamente calcolata dall'algoritmo in aritmetica *floating point* di precisione $u$, si determini una costante $\gamma$ tale che $|v_{i,j} - \widetilde{v}_{i,j}| \leq \gamma u |v_{i,j}|$.

**Esercizio 2.** Sia $\phi(x) \in C^2([a,b])$ e $\alpha \in [a,b]$ tale che $\phi(\alpha) = 0$, dove $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e $\phi'(x) \neq 0$ in $[a,b]$.
**a)** Si dimostri che per ogni $x \in [a,b]$ esiste $\xi \in (a,b)$ tale che $\phi(x)/\phi'(x) = x - \alpha - (x-\alpha)^2 \phi''(\xi)/(2\phi'(x))$.
**b)** Si studi la convergenza locale del metodo di Newton applicato alla funzione $f(x) = \phi(x) \log |\phi(x)|$ per $x \neq \alpha$, $f(\alpha) = 0$, e applicato alla funzione $f(x) = \phi(x)(\log(1 + \phi(x)))$.
**c)** (Facoltativo) Se $m(x)$ è una funzione continua per cui esiste $\gamma > 0$ tale che $|m(x) - m(y)| \leq \gamma |x - y|$, per $x, y \in [a,b]$ e inoltre $m(\alpha) = 1$, si dimostri la convergenza almeno quadratica dell'iterazione $x_{k+1} = g(x_k)$ definita da $g(x) = x - m(x)\phi(x)/\phi'(x)$.

**Esercizio 3.** Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $n > 2$ un intero. Si definisca la matrice $A_n = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $a_{1,1} = a$, $a_{i,i} = c$, $a_{i-1,i} = 1$, per $i = 2, \ldots, n$, $a_{2,1} = b+1$, $a_{i,1} = b$, $a_{i,i-1} = 1$ per $i = 3, \ldots, n$, e $a_{i,j} = 0$ altrove. In particolare è

$$A_5 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+b & c & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & c & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 & c & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

**a)** Supponendo $a \neq 0$ si scriva la matrice ottenuta dopo un passo del processo di fattorizzazione LU applicato ad $A_n$.
**b)** Nell'ipotesi esista la fattorizzazione LU di $A_n$, si scrivano le matrici $L_n$, $U_n$ tali che $A_n = L_n U_n$ e si descriva un algoritmo per il loro calcolo che impieghi un numero di operazioni aritmetiche non superiore a $5n$.

**c)** Posto $c = a$, $b = 2$, dire per quali valori di $|a| \leq 3$ esiste ed è unica la fattorizzazione LU.