I numeri transfiniti

Alessandro Berarducci

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Largo Bruno Pontecorvo 5, 56127 Pisa, Italy

berardu@dm.unipi.it

Versione rivista, 6 Feb. 2010

1 Introduzione

In queste brevi note voglio presentare, in uno stile informale, gli aspetti fondamentali della teoria dei numeri cardinali e dei numeri ordinali. Esse corrispondono ad un ciclo di quattro lezioni rivolte ad un pubblico di studenti delle scuole superiori tenute nell'ambito dei "Seminari sulla Matematica" organizzati dal Professor Antonio Marino presso il Dipartimento di Matematica dell'università di Pisa (a.a. 1999/2000). Successivamente le ho utilizzate in varie occasioni per i laboratori della "Settimana Matematica" nell'ambito del progetto Lauree Scientifiche. Ringrazio Paola Formenti per aver riletto il testo ed avermi aiutato ad illustrare questa edizione.

1.1 Contare l'infinito

I numeri cardinali servono a contare quanti elementi ci sono in un insieme. Nel caso in cui l'insieme sia finito otteniamo i soliti numeri interi non negativi $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, ma oltre a questi ci sono altri numeri cardinali, detti numeri cardinali transfiniti, che servono a contare quanti elementi ci sono in un insieme infinito. Per quanto ciò possa apparire paradossale, vedremo che per mezzo di questi nuovi numeri è possibile distinguere in modo sensato vari livelli di infinità.

I numeri ordinali indicano invece la posizione di un elemento in una successione "bene ordinata". Nel caso la successione sia finita otteniamo i soliti numeri ordinali finiti "primo, secondo, terzo, ...", mentre nel caso la successione sia infinita si ottengono i numeri ordinali transfiniti.

Fino a che ci limitiamo al finito non c'è molta differenza tra numeri ordinali e cardinali, tanto è vero che usiamo ad esempio il numero 9 sia come numero cardinale, quando contiamo il numero dei pianeti del sistema solare, sia come numero ordinale, quando ritiriamo il numero 9 al banco del supermercato che indica la nostra posizione nella fila. Quando però consideriamo insiemi infiniti c'è una differenza sostanziale tra questi due usi del numero, e non è più consentito usare gli stessi numeri per entrambi gli scopi.

1.2 Chi l'ha inventato?

La teoria degli insiemi è nata con le ricerche di Georg Ferdinand Ludwig Cantor tra il 1870 e la fine del 1800, ed è quindi una parte della matematica relativamente recente rispetto ad esempio alla geometria, che risale addirittura agli antichi greci. Ciò testimonia se non altro il fatto che la matematica è una disciplina in continua evoluzione ed espansione, lungi dall'essere un corpo immutabile e chiuso di conoscenze.

2 I numeri cardinali

2.1 Che vuol dire avere lo stesso numero di elementi?

Chiediamoci come si fa a sapere se due insiemi hanno lo stesso numero di elementi, cominciando con un caso facile, cioè con gli insiemi finiti, e poi cerchiamo di capire se la stessa cosa si può fare con quelli infiniti. La prima risposta che viene in mente è: "si contano!" Ma questa risposta non vale, perché con gli insiemi infiniti non sapremmo cosa fare, visto che ancora non abbiamo la più pallida idea di come si possano contare. Pensiamoci bene: siete proprio sicuri che non c'è un altro modo? Io ad esempio sono sicuro, anche se non le ho contate, che Georg Cantor aveva lo stesso numero di scarpe destre e di scarpe sinistre. Come ho fatto? Semplice: c'è una corrispondenza biunivoca tra le scarpe destre e quelle sinistre, cioè è possibile associare ad ogni scarpa destra esattamente una scarpa sinistra, e viceversa, senza che nessuna rimanga fuori. Quando c'è una corrispondenza biunivoca i due insiemi sono ugualmente numerosi. Tutto qui. Prendiamo questa come definizione di cosa vuol dire essere ugualmente numerosi. **Due insiemi sono ugual-**

mente numerosi se esiste una corrispondenza biunivoca tra di essi. Scriveremo per brevità $A \sim B$ per indicare il fatto che c'è una corrispondenza biunivoca tra A e B.

Cosa impedisce di applicare questa idea anche agli insiemi infiniti? Proprio nulla. È proprio quello che ha fatto Cantor in un lavoro pubblicato nel 1878.

2.2 La cardinalità di un insieme

Possiamo ora dare una prima risposta alla domanda di cosa sia il numero di elementi di un insieme A, che viene anche detto numero cardinale o **cardinalità di** A. Esso non è altro che "**ciò che hanno in comune tutti gli insiemi ugualmente numerosi ad** A". Vediamo quindi che prima bisogna definire cosa significhi essere ugualmente numerosi ad A (l'essere in corrispondenza biunivoca con A), e solo successivamente si può definire cosa sia il numero di elementi di A.

La cardinalità di A si indica con $|A|$, e in base alle nostre definizioni abbiamo $|A| = |B|$ se e solo se $A \sim B$, cioè la cardinalità di A è uguale a quella di B se e solo se c'è una corrispondenza biunivoca tra A e B.

In base alle definizioni date non esiste un numero cardinale che non sia il numero cardinale di qualche insieme. Alla domanda di quali numeri cardinali esistano si può rispondere solo sapendo quali insiemi esistano.

2.3 I concetti astratti sono classi?

I più pignoli potrebbero domandarsi "ma cosa è che hanno in comune tutti gli insiemi ugualmente numerosi ad A?" Frege rispondeva più o meno così: "il fatto di appartenere alla classe degli insiemi ugualmente numerosi ad A!" Più precisamente, secondo Frege, la cardinalità di un insieme è la classe di tutti gli insiemi in corrispondenza biunivoca con lui. Usiamo qui "classe" come sinonimo di insieme, anche se in seguito è stata operata una distinzione che per ora non approfondiamo.

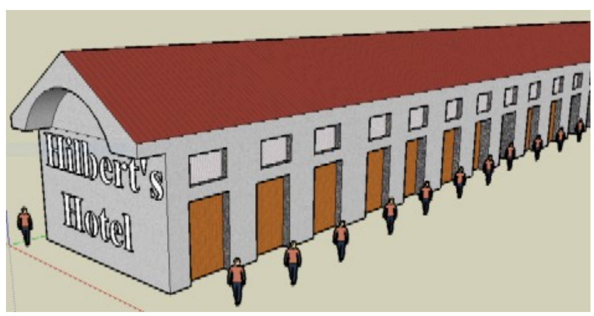
Questo modo di definire i concetti astratti come classi di oggetti che consideriamo equivalenti sotto certi aspetti risale proprio a Frege, ed oggi è pratica comune tra i matematici.

3 La parte non sempre è minore del tutto

Una apparente difficoltà nello sviluppare una teoria coerente del contare l'infinito, sta nel fatto che per gli insiemi infiniti non vale il principio Euclideo "La parte è minore del tutto". Questa stranezza era già nota a Duns Scoto (XIV sec.) e a Galileo Galilei, i quali ne avevano concluso che non avesse senso confrontare gli infiniti in base alla loro grandezza. Illustriamo nel seguito questi fatti con degli esempi.

3.1 L'albergo di Hilbert

L'albergo di Hilbert ha infinite camere numerate con i numeri naturali: camera 0, camera 1, camera 2, eccetera. Arriva un nuovo cliente ma l'albergo è già pieno, come si fa? Semplice, si chiede ad ogni cliente, gentilmente, se si sposta nella camera successiva (quello della 0 nella 1, quello della 1 nella 2, quello della 2 nella 3, etc.) e si mette il nuovo cliente nella camera 0 che in questo modo è rimasta libera.



Il numero dei clienti non è cambiato aggiungendone uno, in quanto è sempre uguale al numero delle camere. Più in generale si può dimostrare che la cardinalità di un insieme infinito non cambia con l'aggiunta di un elemento.

3.2 Insiemi numerabili

Chiediamoci se siano di più i numeri pari $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$ oppure tutti gli interi non negativi $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. Tra parentesi, oggi i matematici chiamano gli interi non negativi **numeri naturali**, e la totalità di tutti i numeri naturali è indicata con $\mathbb{N}$. Lo zero è stato incluso in questo club all'ultimo momento, al tempo di Cantor ad esempio non c'era, ma oramai è lì e indubbiamente lo merita. Questa volta gli insiemi da confrontare sono infiniti quindi stiamo bene attenti. In un quiz a risposta multipla ci sarebbero tre risposte: 1) sono di meno i pari; 2) sono ugualmente numerosi; 3) non ha senso. La risposta giusta è la 2) in quanto possiamo associare ad ogni numero pari la sua metà $0 \mapsto 0, 2 \mapsto 1, 4 \mapsto 2, 6 \mapsto 3, 8 \mapsto 4, \dots$ e in questo modo nessuno rimane fuori.

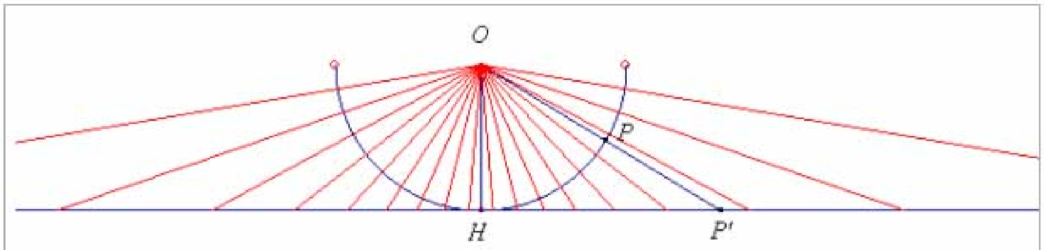
In modo del tutto analogo si dimostra che l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi sia positivi che negativi è ugualmente numeroso dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, cioè $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$. Basta associate agli interi negativi i numeri naturali dispari e agli interi non negativi i numeri naturali pari. L'esempio di Galileo era con i quadrati perfetti: $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$. Anche loro sono ugualmente numerosi a tutti i numeri naturali, basta associarli alle loro radici quadrate.

Chiamo $\aleph_0$ (si legge aleph-zero) la cardinalità dell'insieme dei numeri naturali. Quindi $\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\text{quadrati perfetti}| = |\text{numeri pari}| = |\text{numeri dispari}|$. Un insieme di cardinalità $\aleph_0$ si dice **numerabile**. Per far vedere che un insieme è numerabile basta mostrare che i suoi elementi si possono disporre in fila come i numeri naturali, in modo che si possa dire chi è il primo elemento, il secondo elemento, il terzo elemento, eccetera (il primo sarà quello che associamo a 0, il secondo a 1, il terzo a 2, eccetera).

Se definiamo la **somma delle cardinalità** di due insiemi senza elementi in comune come la cardinalità della loro unione, l'esempio dei pari e dei dispari ci fa vedere che $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, mentre l'esempio del nuovo cliente che arriva nell'albergo di Russell mostra che $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$.

3.3 Insiemi della cardinalità del continuo

Galileo Galilei nelle "Due nuove scienze" aveva osservato che i punti di due segmenti di retta di lunghezza diversa possono essere messi in corrispondenza biunivoca. Avete presente un proiettore per diapositive? Se sulla diapositiva c'è il disegno di un segmento, allora la figura proiettata non sarà altro che un segmento più lungo. Un punto dell'uno corrisponde a un punto dell'altro tramite la proiezione, e in questo modo abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra i due, ammesso che si tratti di un proiettore idealizzato che emani fasci di rette matematiche invece che fasci di luce.



Corrispondenza biunivoca tra semicirconferenza e retta

Il ragionamento si applica sia ai segmenti chiusi $[A, B]$, che includono i due punti estremi A e B, sia a quelli aperti (A, B), che invece consistono di tutti i punti tra due punti estremi A e B, senza però gli estremi stessi. Ne possiamo concludere che due segmenti chiusi qualunque hanno lo stesso numero di punti, e due segmenti aperti qualunque hanno lo stesso numero di punti.

Sempre con il metodo delle proiezioni si può dimostrare che un segmento aperto ha tanti punti quanti tutta la retta. Basta curvare il segmento a forma di semicerchio prima di proiettarlo (con la lampadina del proiettore al centro del cerchio).

Vedremo poi con un ragionamento un pochino più complicato che i segmenti aperti hanno lo stesso numero di punti di quelli chiusi.

Chiamo **c** la cardinalità dell'insieme dei punti della retta. La lettera **c** sta per "continuo", in quanto la retta è continua. In base a quanto detto $\mathbf{c} = |\text{punti della retta}| = |\text{punti di un segmento}|$. In seguito affronteremo la questione se **c** sia uguale ad $\aleph_0$ oppure no.

3.4 Ma allora che vuol dire minore?

Se la parte non sempre è minore del tutto, quando è che si può dire che un insieme X ha meno elementi di un altro insieme Y? L'idea è che devono essere verificate simultaneamente due condizioni: innanzitutto X deve essere ugualmente numeroso ad una parte di Y, e in secondo luogo X non deve essere ugualmente numeroso di tutto Y. Se succede questo scriviamo $|X| < |Y|$, cioè la cardinalità di X è minore di quella di Y.

Se sappiamo solamente che X è numeroso quanto una parte di Y, ma non sappiamo altro, possiamo tuttavia affermare che la cardinalità di X è minore o uguale a quella di Y, che scriviamo $|X| \leq |Y|$. Questo significa semplicemente che o è minore oppure è uguale, ma ci asteniamo dal pronunciarci su quale delle due possibilità si verifica, anche se certamente se ne verifica una delle due escludendo l'altra.

Facciamo alcuni esempi. Ancora non abbiamo affrontato la questione se $\mathbf{c}$ sia uguale ad $\aleph_0$, ma è chiaro che in ogni caso vale la disuguaglianza $\aleph_0 \leq \mathbf{c}$ in quanto i numeri naturali si possono associare biunivocamente ad una parte dei punti della retta, quelli la cui distanza da una origine fissata è uguale ad un multiplo dell'unità di misura. Un altro fatto ovvio è che tutti i cardinali finiti $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ sono strettamente minori di $\aleph_0$, in quanto un insieme finito può essere messo in corrispondenza con una parte di $\mathbb{N}$ ma non con tutto $\mathbb{N}$. Quindi per ora sappiamo che $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < \aleph_0 \leq \mathbf{c}$. Una naturale domanda è se ci sia un numero cardinale infinito più piccolo di $\aleph_0$. È facile però mostrare che ciò non è possibile. A tal fine basta osservare che una parte X di $\mathbb{N}$, se è infinita, è ugualmente numerosa a tutto $\mathbb{N}$, e quindi non può avere cardinalità minore. Se ad esempio prendessimo come X l'insieme dei numeri primi, potremmo enumerare X in ordine di grandezza $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$, stabilendo in tal modo la corrispondenza biunivoca $0 \mapsto 2, 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 7, 4 \mapsto 11, 5 \mapsto 13, 6 \mapsto 17, 7 \mapsto 23, \ldots$, con i numeri naturali. Lo stesso ragionamento si applica a tutte le parti infinite di $\mathbb{N}$.

3.5 Il teorema di Schröder - Bernstein

Avevamo lasciato in sospeso la dimostrazione che un segmento aperto ha lo stesso numero di punti di un segmento chiuso. Chiamiamo per il momento x il numero dei punti di un segmento aperto (non importa quale in quanto sappiamo che hanno tutti lo stesso numero di punti), e y il numero dei punti di un segmento chiuso (non importa quale per lo stesso motivo). Vogliamo mostrare che $x = y$, ovvero un segmento aperto ha tanti punti quanti uno chiuso. Potremmo essere tentati di ragionare nel modo seguente: visto che ogni segmento aperto è contenuto in uno chiuso un po' più grande, $x \leq y$. D'altra parte, poiché ogni segmento chiuso è contenuto in uno aperto un po' più grande, abbiamo anche $y \leq x$. "Quindi" $x = y$. Ma siamo proprio sicuri che quest'ultimo passaggio sia giustificato? Per concludere che $x = y$ dobbiamo dimostrare che c'è una corrispondenza biunivoca, e il nostro ragionamento non ci ha fornito alcuna corrispondenza. State tranquilli, il ragionamento è in effetti corretto, ma richiede una giustificazione precisa che è stata fornita per la prima volta da Ernst Schröder nel 1896 e Felix Bernstein nel 1898. Essi hanno fatto vedere che **se due insiemi infiniti sono ognuno in corrispondenza biunivoca con una parte dell'altro**, come nel caso di un segmento chiuso e uno aperto, **allora si può trovare una corrispondenza biunivoca tra i due**. In altre parole anche per cardinali infiniti vale la regola che se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$. Facciamo vedere come funziona nel caso dei segmenti.

3.6 Segmenti aperti e chiusi

Per trovare esplicitamente una corrispondenza biunivoca tra un segmento chiuso ed uno aperto cominciamo con il fissare una successione numerabile di punti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nel segmento chiuso partendo da uno dei due estremi a_1. Ad esempio se il segmento chiuso è quello di lunghezza unitaria, prendiamo come a_n il punto a distanza $1/n$ dall'altro estremo. Facciamo scorrere ogni punto a_i nel successivo a_{i+1} (come i clienti dell'albergo di Bertrand Russell), lasciando fermi tutti gli altri punti del segmento. Otteniamo in questo modo una corrispondenza biunivoca tra il segmento chiuso e lo stesso segmento privato però del primo estremo, che mediante lo scorrimento è andato a finire all'interno. Questo è un altro esempio del fatto che l'aggiunta di un punto ad un insieme infinito non altera la sua cardinalità. Ripetendo il procedimento a partire dall'altro estremo si ottiene una corrispondenza tra un segmento chiuso ed uno aperto.

Con ragionamenti simili si dimostra il teorema di Schröder - Bernstein nel caso generale: per trovare la corrispondenza biunivoca cercata si fanno scorrere certi elementi lungo certe successioni.

3.7 La confrontabilità dei cardinali

È possibile che due insiemi X ed Y siano così diversi che le loro cardinalità non si possano confrontare? Ciò significa che non esiste nè una corrispondenza biunivoca da X ad una parte di Y nè una corrispondenza biunivoca da Y ad una parte di X. Cantor deduceva che ciò non fosse possibile dal principio che ogni insieme si può "bene ordinare", dove bene ordinare un insieme significa (parlando a livello intuitivo) stabilire un ordine di priorità tra i suoi elementi di modo tale che presa comunque una parte di essi ce ne sia uno di priorità più alta di tutti gli altri.

Solo nel 1904, e poi di nuovo nel 1908, Ernst Zermelo ha dato una dimostrazione rigorosa del fatto che ogni insieme si può bene ordinare. La dimostrazione del principio del buon ordinamento dipende dalla accettazione di un certo numero di assiomi, formulati da Zermelo, in cui si precisa, in un senso restrittivo, la nozione stessa di insieme, dando le condizioni che garantiscono la loro esistenza. Gli assiomi di Zermelo escludono ad esempio certi insiemi troppo grandi, come "l'insieme di tutte le cose", che avevano portato a dei paradossi, ma garantiscono invece l'esistenza di tutti gli insiemi che i matematici considerano interessanti (insiemi di numeri, insiemi di punti, insiemi di funzioni, eccetera).

Il fatto che per dimostrare la confrontabilità dei numeri cardinali occorra precisare in modo restrittivo il concetto di insieme non è sorprendente: pensate all'assurdità della pretesa che si possa confrontare il numero delle cose pensabili da me con il numero delle cose pensabili da voi.

4 Il metodo a zig-zag di Cantor

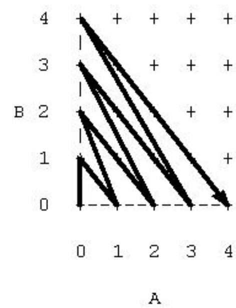
4.1 L'albergo di Cantor

L'albergo di Cantor oltre ad avere infinite camere come quello di Russell, ha anche infiniti piani, per cui ci sarà ad esempio la camera 3 del piano 5, che per brevità chiameremo camera $(3, 5)$. In generale la camera (x, y) sarà la camera x del piano y, dove x ed y sono numeri naturali qualunque, zero incluso. Supponiamo ora che un certo giorno per un grave disguido dell'agenzia di viaggio ci si trovi costretti a trasferire tutti i clienti dell'albergo di Cantor, che supporremo pieno, nell'albergo di Russell che supporremo vuoto. Immediatamente si leva una protesta generale: "non è possibile, l'albergo di Russell è molto più piccolo! Non ci si entra tutti!" Ma l'albergatore, che era anche un ottimo matematico, trova subito la soluzione che acquieta gli animi. Ci riuscireste anche voi? Chiaramente se tutto il piano 0 dell'albergo di Cantor andasse ad occupare una dopo l'altra tutte le camere dell'albergo di Russell, quelli del piano 1 non saprebbero più dove andare, per cui bisogna fare in altro modo. Si potrebbe fare così: quelli del piano 0 invece di andare a precipitarsi nella prima camera che trovano, si trasferiscono con disciplina nell'albergo di Russell avendo cura di andare ad occupare una camera sì e una no, in modo da occupare solo le pari, e lasciando quindi le dispari a disposizione dei clienti dei piani superiori. Poi tocca a quelli del piano 1 che fanno la stessa cosa, cioè occupano solo una camera sì e una no delle camere rimaste libere. I clienti del piano 2 fanno a loro volta la stessa cosa, e così via. In questo modo ognuno trova prima o poi la sua camera corrispondente e nessuno rimane fuori.

Da questa storia segue che l'albergo di Cantor ha lo stesso numero di camere di quello di Russell. Si usa definire il **prodotto di due numeri cardinali** in modo tale che un albergo con α piani e β camere per piano abbia $\alpha \cdot \beta$ camere. Il nostro ragionamento mostra allora che $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Con ragionamenti simili si può dimostrare che $\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, basta considerare un albergo a 2 piani con $\aleph_0$ stanze per piano. Similmente $\aleph_0 \cdot 3 = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, e così via.

Indovinello: dove va a finire il cliente della terza camera del secondo piano? Con un po' di pazienza ognuno potrebbe farsi il conto e capire quale camera gli spetterà, e potrebbe quindi andare subito a trasferirsi nell'altro albergo senza mettersi in fila aspettando che si siano sistemati prima tutti quelli dei piani inferiori. Avete risolto l'indovinello? Vi dò io la risposta: il cliente della camera (x, y) dell'albergo di Cantor va nella camera $2^y(2x+1)-1$ dell'albergo di Russell (il "meno uno" alla fine serve perchè abbiamo iniziato da zero). Ad esempio il cliente della camera $(3, 2)$ dell'albergo di Cantor va a finire nella camera $2^2(2 \cdot 3 + 1) - 1 = 27$ dell'albergo di Russell. Questa è una corrispondenza biunivoca tra le camere dei due alberghi.

Un modo completamente diverso di assegnare le camere è quello di seguire il **metodo a zig zag di Cantor** che consiste nel dare la precedenza ai signori la cui somma "numero di camera + numero piano" è più bassa (a parità di somma privilegiando il numero di camera), per poi passare a quelli con somme sempre più alte.



Visto che con una data somma ce ne sono solo un numero finito, non c'è il rischio di esaurire l'albergo di Russell prima di passare alla somma successiva. Facendo i conti si vede che in questo modo il cliente della camera (x, y) va a finire nella camera $(x + y)(x + y + 1)/2 + x$, quindi ad esempio $(0,0) \mapsto 0, (0,1) \mapsto 1, (1,0) \mapsto 2, (0,2) \mapsto 3, (1,1) \mapsto 4, (2,0) \mapsto 5$ e dopo si passa alle quattro camere con somma 3, poi alle cinque camere con somma quattro, e così via. Per capire perché la formula funziona vi potrebbe essere utile ricordarvi la formuletta per sommare i primi n interi positivi $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$ che si dice che Carl Friedrich Gauss (1777-1855) abbia scoperto da bambino quando il maestro gli ha assegnato per punizione il compito di sommare i primi cento numeri.

4.2 Quanti sono i numeri razionali?

4.2.1 Dividere le torte

Non vi ricordate cosa sono i numeri razionali? Ma sono quelli che servono ad esempio a dividere le torte: un terzo a me, due settimi a te perché ne vuoi un po' di meno, e otto ventunesimi al cane, che ne vorrebbe di più ma non ne avanza altra perché $1/3 + 2/7 + 8/21 = 1$. Spero che vi ricordiate come si fanno questi conti, l'importante è rendersi conto che $1/3 = 7/21$ e $2/7 = 6/21$ (prendere due settimi di una torta è come prenderne sei ventunesimi).

4.2.2 Densità dei razionali sulla retta

Come sa chiunque abbia preso in mano un nastro misuratore, oltre che per dividere le torte i numeri razionali possono servire per misurare le lunghezze dei segmenti di retta nel modo seguente: si sceglie un origine ed una unità di misura. Per trovare un segmento di lunghezza $2/7$ si divide l'unità di misura in sette parti uguali disegnando delle tacche equidistanziate, e in corrispondenza della seconda tacca a destra dell'origine si scrive $2/7$. Per distanze maggiori di uno si fa la stessa cosa, ad esempio $16/7 = 7/7 + 7/7 + 2/7$, quindi si deve scegliere la seconda tacca dei settimi dopo aver riportato due lunghezze unitarie. In effetti nei nastri che si trovano in commercio non ci sono mai i settimi, ma solo i decimi, o al massimo i centesimi, o i millesimi, ma nulla impedisce di disegnare anche i settimi, i terzi, e via dicendo, solo che dopo un po' le tacche diventerebbero così fitte che non ci si capirebbe più nulla. Se la retta fosse fatta di atomi indivisibili, dopo un po' mi dovrei fermare, ma per la retta idealizzata matematica posso supporre di poter disegnare *tutte* le tacche possibili, una per ogni numero razionale. Ne risulta allora un insieme **denso**, il che vuol dire che tra due tacche ne trovo sempre una terza, cioè due razionali non stanno mai uno accanto all'altro, ce ne è sempre un altro in mezzo.

Questo non vuol dire che i razionali ricoprano tutta la retta. Per il teorema di Pitagora (la somma delle aree dei quadrati sui cateti è uguale all'area del quadrato sull'ipotenusa) qualche punto rimane scoperto, ad esempio quello corrispondente alla lunghezza della diagonale del quadrato di lato uno (in base al teorema di Pitagora la sua lunghezza al quadrato è 2, ma usando la scomposizione in fattori primi si vede che non c'è nessun numero razionale m/n che al quadrato dia 2, altrimenti nell'uguaglianza $m^2 = 2n^2$ il fattore due comparirebbe un numero pari di volte a sinistra, e un numero dispari di volte a destra). Tale diagonale non può pertanto essere misurata con precisione infinita da un numero razionale.

Un modo suggestivo di immaginarsi la densità dei razionali è di pensare di stare in mezzo ad un frutteto infinito, con gli alberi piantati a scacchiera e i tronchi infinitamente fini come punti matematici, e di voler fare un dipinto su tela di ciò che si vede (con la tela parallela alle file di alberi). Verranno una serie di trattini verticali distribuiti esattamente come i numeri razionali.

4.2.3 I razionali sono numerabili

Nonostante i razionali siano così fitti sulla retta, tanto da essere densi nel senso sopra specificato, ciò dipende solo dall'ordine in cui sono disposti sulla retta, e non dal fatto che siano tanti. Infatti la cardinalità dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali è uguale ad $\aleph_0$, cioè la stessa dei numeri naturali sebbene questi sembrino molti di meno. Come si dimostra? Preoccupiamoci per il momento solo dei razionali positivi. Possiamo disporli nell'albergo di Cantor usando il numeratore e il denominatore per stabilire la camera e il piano. Ad esempio

2/7 si mette nella camera 2 del piano 7. Visto che già sappiamo che le camere dell'albergo di Cantor sono numerabili il gioco è quasi fatto. C'è solo il piccolo dettaglio che alcune camere rimangono vuote, non solo perché non si può dividere per zero, ma soprattutto perché se metto 2/7 nella camera $(2,7)$, poi la camera $(6,21)$ rimane libera (perché il signor 6/21 non è altri che il signor 2/7 sotto altro nome, essendo sei ventunesimi la stessa cosa di due settimi). Chiaramente ciò non è per noi un problema in quanto una parte infinita di un insieme numerabile è anch'essa numerabile (essendo $\aleph_0$ il più piccolo cardinale infinito). Se non ci accontentiamo di questo ragionamento e vogliamo trovare una enumerazione esplicita basta che ci trasferiamo dall'albergo di Cantor a quello di Russell seguendo il metodo a zig-zag, saltando però le camere vuote. In questo modo si ottiene la seguente enumerazione dei numeri razionali positivi: $1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, 1/5, 5/1, \ldots$, in ordine crescente di somma "numeratore più denominatore", e avendo eliminato le ripetizioni come 2/4 che è la stessa cosa di 1/2. Se aggiungiamo anche i razionali negativi otteniamo ancora un insieme numerabile in quanto $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

5 Il metodo diagonale di Cantor

Ancora non abbiamo risposto alla questione se $\mathbf{c}$ sia diverso da $\aleph_0$, cioè se i punti della retta siano di più dei numeri naturali, ma prima devo parlarvi delle dimostrazioni per assurdo e del numero $2^{\aleph_0}$.

5.1 Le dimostrazioni per assurdo

I matematici quasi sempre sono onesti: se gli si dimostra che sbagliano lo ammettono e non cercano di nascondere le contraddizioni. Talvolta usano le loro stesse contraddizioni a loro favore con il seguente trucchetto chiamato "dimostrazione per assurdo": si fa finta di sostenere la tesi dell'avversario (mentre in realtà si pensa che sia vero l'esatto contrario) e per dimostrarla si conduce con grande rigore e convinzione un dato ragionamento, fino a quando ad un tratto, senza che l'interlocutore neppure se ne renda conto, si arriva in modo ineccepibile ad una contraddizione e si esclama vittoriosi: "visto? la tesi è falsa, contrariamente a quel che sostenevi!" Al che, se l'altro risponde che la si sosteneva entrambi, si controbatte: "no, io la sostenevo per finta, solo per farti vedere che era insostenibile". Potreste pensare che di fronte ad un simile trattamento l'altro se ne vada indignato, e invece no, se è un matematico accetta il ragionamento e cambia idea sulla tesi, convincendosi della sua falsità.

5.2 Il numero $2^{\aleph_0}$

Una successione binaria infinita è una successione di 0 e 1 che va avanti all'infinito, come ad esempio $0100101011101011\ldots$, di cui non posso svelarvi per ovvie ragioni tutte le cifre, ma che vi chiedo di immaginare come effettivamente infinita. Chiamo $2^{\aleph_0}$ (si legge "due alla aleph-zero") la cardinalità dell'insieme di tutte le possibili successioni binarie. Il nome dipende dal fatto che devo fare $\aleph_0$ scelte, ognuna con due possibilità, e quindi ho in tutto $2^{\aleph_0}$ possibilità. È del tutto analogo al calcolo del numero delle possibili schedine del totocalcio: ho tre possibilità $1, x, 2$, e tredici caselle da riempire, quindi in tutto ho 3^{13} possibilità. La stessa idea si può applicare a numeri cardinali qualunque, ed è in base ad essa che si definisce **l'esponenziazione di due numeri cardinali**.

È facile vedere che $\aleph_0 \leq 2^{\aleph_0}$, cioè che ci sono almeno tante successioni binarie infinite quanti sono i numeri naturali. Basta associare al numero n la successione che inizia con la cifra 1 ripetuta n volte, seguita da infiniti 0. La grande scoperta di Cantor è che $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Ragionando per assurdo, se le successioni binarie infinite fossero in quantità numerabile, potreste immaginare di poterle distribuire tutte senza esclusione nei vari piani dell'albergo di Cantor, con le singole cifre di una successione disposte in sequenza nelle camere del piano corrispondente. Vi farò invece vedere che ciò non è possibile: comunque le distribuiate sono in grado di trovare almeno una successione binaria che non si trova in nessun piano. Come è fatta questa misteriosa successione che rimane fuori da ogni piano? Consideriamo dapprima la successione binaria le cui cifre sono quelle che si ottengono viaggiando in diagonale nell'albergo di Cantor, visitando cioè la camera $(0, 0)$, poi la camera $(1, 1)$, poi la camera $(2, 2)$, e così via (come se salissimo lungo una scala che prosegue sempre dritta senza curvare). Ora invertiamo le cifre della successione diagonale così trovata, mettendo 1 dove c'era 0 e viceversa. Questa successione diagonale a cifre invertite non si trova in nessun piano. Per fare vedere che non si trova all'ottavo piano, basta notare che l'ottava cifra della successione diagonale a cifre invertite è differente dall'ottava cifra della successione che si trova all'ottavo piano (proprio perché ho invertito quella cifra), cosicché queste due successioni differiscono per almeno l'ottava cifra. Lo stesso ragionamento porta ad escludere di poter trovare la nostra successione diagonale invertita in un qualsiasi altro piano. Questo completa la dimostrazione che l'insieme delle successioni infinite binarie non è numerabile, e pertanto $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$.

5.3 Quanti rami ha un albero?

Immaginatevi un albero genealogico che si biforca ad ogni generazione. Supponiamo che nessun ramo si estingua, e l'albero continui quindi all'infinito. Otteniamo in tal modo un **albero binario completo**. Quanti rami ci sono? (Per ramo intendiamo una successione infinita di elementi, ognuno figlio del precedente, che parte dal capostipite.) Risposta: esattamente tanti quante le successioni binarie infinite, e quindi $2^{\aleph_0}$. Possiamo infatti associare biunivocamente i rami alle successioni, specificando che 0 significa "vai a sinistra" e 1 significa "vai a destra". Ad esempio una successione che inizia con $01001\ldots$, corrisponde ad un ramo in cui partendo dal capostipite si scende prima a sinistra nella biforcazione, poi a destra, poi a sinistra, poi ancora a sinistra, poi a destra, e si prosegue in accordo con le altre cifre della successione.

5.4 L'insieme delle parti di un insieme numerabile

Chiamiamo $\mathrm{Parti}(X)$ l'insieme delle parti dell'insieme X. Che vuol dire? Prendiamo ad esempio $X = \{0, 1, 2\}$, l'insieme costituito dai primi tre numeri naturali. Questo ha otto parti: $\{\}$ (la parte vuota), $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, e tutto l'insieme $\{0, 1, 2\}$ che consideriamo anch'esso una parte.

Supponiamo ora che X sia un insieme di cardinalità $\aleph_0$, ad esempio $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Quante parti ci sono questa volta? C'è ad esempio la parte dei pari, dei dispari, dei primi, dei quadrati, e tante altre ancora. Quale è la cardinalità di $\mathrm{Parti}(\mathbb{N})$? Possiamo associare biunivocamente a ciascuna parte una successione binaria, mettendo 1 nelle posizioni corrispondenti ai numeri che appartengono alla parte scelta, e 0 nelle altre. Ad esempio ai pari viene associata la successione a cifre alterne $1010101010\ldots$ con gli 1 in posizione pari. Questa corrispondenza mostra che $|\mathrm{Parti}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$. Più in generale un quasiasi insieme di cardinalità $\aleph_0$ ha $2^{\aleph_0}$ parti.

6 Quanti punti ha una retta?

6.1 Infinite cifre dopo la virgola

Se prendete una calcolatrice non troppo buona e calcolate la radice di due (cioè la lunghezza della diagonale del quadrato unitario) ottenete $1,41$, il che significa che $\sqrt{2}$ è compreso tra $1,41$ e $1,42$, cosa che potete controllare facilmente con carta e penna elevando al quadrato e verificando che 2 è compreso tra il quadrato di $1,41$ e quello di $1,42$. Ricordando che $1,41 = 1+4/10+1/100 = 141/100$ e $1,42 = 1+4/10+2/100 = 142/100$, ne segue che $\sqrt{2}$ appartiene all'intervallo di lunghezza un centesimo $[141/100, 142/100]$. Con una calcolatrice migliore ottenete $1,414$, e quindi $\sqrt{2}$ sta nell'intervallo di lunghezza un millesimo $[1414/1000, 1415/1000]$. Con calcolatrici sempre migliori si ottengono approssimazioni razionali sempre migliori, ad esempio con la mia ottengo $1,4142135623$ (facendo un errore non più grande di $1/10^{10}$), ma mai un risultato esatto in quanto $\sqrt{2}$ è irrazionale. Queste approssimazioni sempre migliori consentono di ingabbiare $\sqrt{2}$ in intervallini chiusi sempre più piccoli ad estremi razionali, ognuno contenuto nel precedente e di lunghezza pari ad un decimo del precedente. Se mettiamo insieme tutte le approssimazioni successive di $\sqrt{2}$, otteniamo una espressione decimale con infinite cifre dopo la virgola, dove se ci fermiamo alla n-esima cifra otteniamo una approssimazione per difetto, ed aggiungendo a questa la quantità $1/10^n$ otteniamo una approssimazione per eccesso.

Più in generale, se fissiamo un'origine ed una unità di misura sulla retta, ad ogni punto sulla retta può essere associata un'espressione decimale con infinite cifre dopo la virgola, che determina una successione di approssimazioni per difetto e per eccesso della sua distanza dall'origine nel modo sopra indicato. Ciò corrisponde a specificare una successione di intervallini chiusi sempre più piccoli, ad estremi razionali, contenenti il punto in questione.

Un punto sulla retta ha una unica espressione decimale infinita eccetto quando cade proprio su un estremo degli intervallini, nel qual caso è possibile associargli due espressioni decimali distinte. Ad esempio le espressioni decimali $0,5000\ldots$ (con infiniti zeri) e $0,49999\ldots$ (con infiniti 9) corrispondono entrambe al punto $1/2 = 0,5$. La prima espressione corrisponde a ingabbiare $1/2$ negli intervallini $[1/2, 1/2 + 1/10^n]$ che si trovano alla sua destra, la seconda ad ingabbiarlo negli intervallini $[1/2-1/10^n, 1/2]$ che si trovano alla sua sinistra. Questa anomalia capita solo per i punti razionali che ammettono una scrittura il cui denominatore è una potenza di 10 ($1/2$ è di questa forma perché si può scrivere anche come $5/10$), e che quindi cadono esattamente su uno degli estremi degli intervalli che scandiscono le unità, i decimi, i centesimi, i millesimi, eccetera. Se invece che la base 10 usassimo la base tre, l'analogo fenomeno capiterebbe in corrispondenza ai denominatori che sono potenze di tre.

La presenza di "doppioni" come $0,49999\ldots$ e $0,5000\ldots$, per quanto possa ingenerare confusione, non è di per sè un fenomeno riprovevole, e non lo abbiamo certo incontrato qui per la prima volta. Nello stesso senso $6/21$ può essere considerato un doppione di $2/7$. Si tratta semplicemente di due modi ugualmente legittimi di indicare la stessa cosa, come una persona che ha due nomi. Volendo eliminare i doppioni si può sempre optare per uno dei due modi, escludendo ad esempio le espressioni decimali con tutti 9 da un certo punto in poi.

Dai discorsi sopra fatti dovrebbe risultare chiaro che una espressione decimale con infinite cifre dopo la virgola rappresenta un punto sulla retta in modo piuttosto indiretto, fornendo in primo luogo esclusivamente una successione di intervalli chiusi (che si suppone contengano il punto in questione) ognuno contenuto nel precedente e di lunghezza pari ad un decimo del precedente. Solamente dopo aver stabilito che effettivamente esiste un ben determinato punto sulla retta contenuto in ciascuno di tali intervalli decrescenti, si può asserire che l'espressione decimale rappresenta un punto, e non unicamente una successione di intervalli. A priori sarebbe infatti concepibile che certe espressioni decimali infinite vadano bene, cioè il supposto punto effettivamente ci sia, mentre per certe altre espressioni il punto non ci sia, oppure ce ne sia più di uno (questo metterebbe a rischio la possibilità di indicare i punti della retta con le espressioni decimali infinite).

Tranquillizzatevi: alcune delle ipotesi basilari sulle proprietà della retta geometrica di cui poi vi parlerò - l'"assioma di Archimede" e "l'assioma di continuità" - equivalgono proprio a dire che questi guai non capitano. Sulla base di tali assiomi si ottiene una corrispondenza tra punti ed espressioni decimali infinite, che è biunivoca se si eliminano i doppioni.

Usando la corrispondenza biunivoca tra punti della retta ed espressioni decimali (doppioni esclusi) dimostrerò ora che $2^{\aleph_0} \leq \mathbf{c}$, da cui segue la non numerabilità dei punti della retta. È infatti del tutto evidente che $2^{\aleph_0}$, la cardinalità dell'insieme delle successioni binarie infinite, è minore o uguale alla cardinalità dell'insieme delle espressioni decimali con infinite cifre dopo la virgola (anche se si escludono quelle con tutti 9 da un certo punto in poi). Per convincersene basta associare ad una successione binaria l'espressione decimale che ha quella successione dopo la virgola, e prima della virgola uno 0. Ad esempio alla successione 01101010... posso associare $0,01101010\ldots$.

Usando le rappresentazioni in base due invece che dieci, non è difficile dimostare che vale anche la disuguaglianza opposta $\mathbf{c} \leq 2^{\aleph_0}$ (la difficoltà nell'ottenere direttamente l'uguaglianza sta soprattutto nel fatto che in base due l'avere infiniti 1 di seguito pone un problema analogo a quello degli infiniti 9 di seguito in base dieci). Mettendo insieme le due disuguaglianze si ottiene $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$.

Non entro nei dettagli delle rappresentazioni in base due perché nel seguito userò un altro procedimento per arrivare allo stesso risultato, che mi darà anche il pretesto per approfondire l'assioma di Archimede e l'assioma di continuità.

6.2 L'assioma di Archimede

L'**assioma di Archimede** dice che, dati due segmenti $[A, B]$ ed $[C, D]$, è sempre possibile trovare un intero positivo n tale che, dividendo il più grande dei due in n segmenti consecutivi della stessa lunghezza, le parti in tal modo ottenute hanno lunghezza minore del più piccolo dei due segmenti di partenza. In altre parole non è possibile che il più piccolo dei due sia infinitamente più piccolo dell'altro, o, considerato dal punto di vista speculare, il più grande sia infinitamente più grande dell'altro. L'assioma di Archimede implica in particolare che due punti diversi sulla retta non possono avere una distanza reciproca infinitamente piccola rispetto al segmento scelto come unità di misura, ed è proprio questo fatto che ci assicura che, andando abbastanza avanti nello sviluppo delle loro espressioni decimali, arriveremo prima o poi a sviluppi diversi per almeno una cifra. In altre parole, punti diversi non possono avere la stessa espressione decimale con infinite cifre dopo la virgola, cosa che può sembrare evidente, ma trova la sua giustificazione proprio nell'assioma di Archimede. L'assioma inoltre garantisce che non esistano punti a distanza infinitamente grande dall'origine rispetto all'unità di misura. Se ci fossero punti siffatti, non potremmo evidentemente associare loro alcuna espressione decimale. In conclusione l'assioma stabilisce che possiamo approssimare con precisione alta a piacere qualsiasi punto con un punto di coordinata razionale, riuscendo sempre a discriminare due punti qualsiasi a condizione di scegliere una precisione sufficientemte alta.

Un altro modo ancora di formulare l'assioma è di dire che, dati due punti sulla retta, si può trovare un terzo punto di coordinata razionale compreso tra i due (volendo basterebbero anche solamente i razionali il cui denominatore è una potenza di dieci, o di due, o di qualunque altra base).

Per illustrare il concetto consideriamo due pali della luce di altezza leggermente diversa, che immaginiamo come segmenti di retta. L'assioma di Archimede implica che, anche se le altezze fossero quasi uguali, potremmo stabilire chi è il più alto dividendo l'unità di misura in un numero sufficientemente alto di parti e andando a misurare i due pali con un nastro misuratore di precisione corrispondente.

Usando l'assioma di Archimede vi dimostro ora che $\mathbf{c} \leq 2^{\aleph_0}$. Se considero un punto sulla retta e vado a vedere quali razionali stanno alla sua sinistra ottengo una *parte dei razionali*. In questo modo ho associato ad ogni punto una parte dei razionali, e quindi i punti della retta sono al massimo in quantità pari alle parti dei razionali, che sono $2^{\aleph_0}$ in quanto i razionali sono numerabili. Mi potreste domandare: "E l'assioma di Archimede che c'entra?" L'assioma c'entra per evitare che a due punti diversi venga associata la stessa parte dei razionali: dati due punti c'è sempre un punto razionale a sinistra di uno e a destra dell'altro, e quindi le parti associate non possono essere le stesse. Si osservi che in questo modo non ottengo tutte le possibili parti dei razionali, ad esempio non ottengo mai delle parti finite, ma ciò non ha importanza perché a me bastava dimostrare che i punti corrispondono ad una *parte* delle parti dei razionali.

6.3 L'assioma di continuità

Abbiamo già detto che una delle proprietà fondamentali della retta è, parlando a livello intuitivo, la sua "continuità". Sempre parlando a livello intuitivo, l'opposto della continuità è la "discretezza", che si considera tipica dei numeri naturali. Bertrand Russell racconta di come Immanuel Kant abbia speso molte parole sul continuo e il discreto, ma su cosa intendesse per continuo e discreto abbia mantenuto un silenzio altrettanto continuo e discreto. Un primo tentativo di risposta alla questione di cosa sia la continuità potrebbe essere: "il fatto che tra due punti ce ne è sempre un terzo". Ma questa proprietà, che si chiama "densità", non è sufficiente, in quanto sarebbe verificata anche se togliessimo un singolo punto alla retta, interrompendone la continuità (anche togliendo tutti i punti irrazionali l'insieme rimarrebbe denso). Una risposta esauriente l'ha trovata Richard Dedekind nel 1872 in un lavoro intitolato "Continuità e numeri irrazionali". Se dividiamo la retta in due parti, in modo che tutti i punti di una parte siano maggiori (ovvero più a destra) di tutti i punti dell'altra, allora ci deve essere un punto che separa le due parti, nel senso che tutti i punti della prima parte sono più piccoli e tutti i punti della seconda parte sono più grandi del punto separatore, con la sola eccezione del punto stesso che apparterrà ad una delle due parti. Questo si chiama **assioma di continuità di Dedekind**.

Questo assioma giustifica i cosiddetti "ragionamenti per continuità" come il seguente. Supponiamo di voler dimostrare l'esistenza di una sfera di volume uguale a due rispetto ad una data unità di misura. Potremmo argomentare dicendo che certamente ci sono sfere sia di volume inferiore sia di volume superiore a due, e quindi ingrandendo il raggio della sfera con continuità si deve passare anche per il volume due in corrispondenza di una certa misura del raggio. La giustificazione del ragionamento usando l'assioma di continuità è la seguente. Fissata una origine ed una unità di misura ogni punto della retta individua una ben precisa lunghezza, a cui possiamo associare (se positiva) la misura del raggio di una sfera. Dividiamo i punti della retta in due gruppi, mettendo nel primo gruppo i punti che determinano un raggio corrispondente ad una sfera di volume superiore a due, e nel secondo gruppo tutti gli altri. Non è difficile dimostrare, ma non entro nei dettagli, che l'elemento separatore di questi due gruppi individua un raggio corrispondente ad una sfera di volume esattamente due.

Una conseguenza importante dell'assioma di continuità è il fatto che data una successione di intervalli chiusi ognuno contenuto nel precedente, esiste sempre almeno un punto sulla retta contenuto in ciascuno di questi intervalli. Ciò è alla base della possibilità di associare un punto della retta ad una espressione decimale con infinite cifre dopo la virgola.

6.4 L'insieme di Cantor

Usando l'assioma di continuità diamo una dimostrazione diretta della disuguaglianza $2^{\aleph_0} \leq \mathbf{c}$ che non usa gli sviluppi decimali. Consideriamo un segmento chiuso $[A, B]$ sulla retta. Rimuoviamo nella sua parte centrale un segmento aperto (C, D) di lunghezza pari ad un terzo di quella del segmento di partenza. Ciò che rimane sono due segmenti laterali chiusi più piccoli ognuno di lunghezza un terzo della lunghezza di $[A, B]$. Chiamiamo questi due segmenti i *figli* di $[A, B]$. Ripetiamo l'operazione in modo che ognuno dei figli di $[A, B]$ generi a sua volta due figli, per cancellazione del segmento centrale. Continuando a rimuovere il terzo centrale di ognuno dei segmenti che man mano si generano, e facendo l'albero genealogico dei segmenti chiusi così ottenuti, ognuno generante due figli, si ottiene un albero binario completo.

L'insieme dei punti che rimane dopo tutte le cancellazioni si chiama **insieme di Cantor**. Ad esempio sicuramente gli estremi dei segmenti man mano ottenuti non saranno mai cancellati, ed è facile vedere che in questo modo si ottengono almeno $\aleph_0$ punti, ma vedremo che oltre a questi estremi ci saranno tanti altri punti interni che non verranno mai cancellati. Sappiamo infatti che un albero binario completo ha $2^{\aleph_0}$ rami. Ogni scelta di un ramo dell'albero corrisponde, nella nostra costruzione, ad una successione di segmenti chiusi ognuno incluso nel precedente e di lunghezza pari ad un terzo di quella del segmento precedente. Supponiamo di aver fissato un tale ramo e la corrispondente successione di segmenti. Per l'assioma di continuità della retta esiste almeno un punto appartenente a tutti questi segmenti. Visto che ci sono $2^{\aleph_0}$ rami, otteniamo in tal modo $2^{\aleph_0}$ punti distinti nell'insieme di Cantor (e si può mostrare usando l'assioma di Archimede che non ve ne sono altri). Abbiamo così dimostrato che la retta ha almeno $2^{\aleph_0}$ punti, cioè $2^{\aleph_0} \leq \mathbf{c}$.

7 Numeri algebrici e trascendenti

7.1 Gli irrazionali algebrici

Tutte le lunghezze che sono state considerate dagli antichi greci nelle costruzioni con riga e compasso possono essere misurate con dei **numeri algebrici** (dei quali alcuni sono razionali e altri no), il che vuol dire che tali grandezze sono soluzioni di una equazione algebrica a coefficienti interi, ad esempio se indichiamo con x la lunghezza della diagonale del quadrato, allora per il teorema di Pitagora la quantità x verifica l'equazione algebrica $x^2 = 2$, mentre invece l'altezza del triangolo equilatero di lato uno verifica $4x^2 + 1 = 4$, cioè di nuovo una equazione algebrica. I numeri algebrici sono anche più di quelli che servono per misurare tutte le lunghezze costruibili con riga e compasso. Ci chiediamo: quante sono le equazioni algebriche? Dico che sono numerabili in quanto le possiamo enumerare in ordine di altezza crescente, dove qui per altezza intendiamo il massimo numero che compare nell'equazione come coefficiente o come esponente. Per ogni data altezza ce ne sono un numero finito che possiamo enumerare una dopo l'altra, per poi passare a quelle di altezza superiore. Si sa che una data equazione algebrica può avere al massimo un numero finito di soluzioni pari al massimo esponente (ad esempio $x^2 = 2$ ha due soluzioni: la radice di 2 presa con segno positivo o negativo). Quindi man mano che enumeriamo le equazioni possiamo enumerare nel frattempo anche tutte le loro soluzioni. Si dimostra così che i numeri algebrici sono numerabili.

7.2 Gli irrazionali trascendenti

La lunghezza di una circonferenza di raggio uno non è algebrica: se srotolo la circonferenza e la stendo piatta sul nastro misuratore ideale ottengo un punto di coordinata non algebrica (lo srotolamento non era contemplato nelle costruzioni con riga e compasso). Questo l'ha dimostrato Ferdinand Lindemann nel 1882. I punti non algebrici si chiamano trascendenti, e prima ancora di Lindemann il primo numero trascendente l'ha trovato Joseph Liouville nel 1844. Per noi è molto semplice dimostrare l'esistenza di un punto di coordinata trascendente. Visto che gli algebrici sono solo $\aleph_0$, e i punti in totale sono $\mathbf{c}$, ce ne deve essere qualcuno non algebrico.

8 L'ipotesi del continuo

Abbiamo visto che $\mathbf{c}$ coincide con $2^{\aleph_0}$ ed è più grande di $\aleph_0$, ma ancora non sappiamo di quanto è più grande. Ad esempio non sappiamo se viene immediatamente dopo $\aleph_0$ o se, viceversa, ci può essere un insieme X di cardinalità intermedia, cioè $\mathbf{c} > |X| > \aleph_0$. Ciò equivale a domandarsi se esiste una parte infinita della retta di cardinalità intermedia, cioè una parte infinita della retta che non ammetta una corrispondenza biunivoca nè con $\mathbb{N}$ nè con tutta la retta.

Tutte le parti della retta che fino ad ora abbiamo considerato indurrebbero a pensare di no. L'insieme dei punti a coordinata razionale (rispetto ad un fissato sistema di riferimento) ha cardinalità $\aleph_0$, l'insieme dei punti a coordinata irrazionale ha cardinalità $\mathbf{c}$ (perché è facile vedere che se tolgo $\aleph_0$ punti ad un insieme di cardinalità $\mathbf{c}$ ne rimangono $\mathbf{c}$), l'insieme dei punti a coordinata algebrica ha cardinalità $\aleph_0$, l'insieme dei punti a coordinata trascendente ha cardinalià $\mathbf{c}$, l'insieme di Cantor ha cardinalità $\mathbf{c}$.

L'**ipotesi del continuo** è la congettura fatta da Cantor che non vi siano insiemi di cardinalità intermedia. Cantor tentò ripetutamente senza riuscirci di dimostrare questa congettura. Nel corso dei suoi tentativi introdusse il concetto di "insieme chiuso" e dimostrò che un eventuale insieme di cardinalità intermedia non può essere chiuso. La tecnica della dimostrazione consiste nel mostrare che se un insieme chiuso non è numerabile, allora contiene un insieme di punti molto simile all'insieme di Cantor (un insieme chiuso senza punti isolati), che sappiamo avere cardinalità $2^{\aleph_0}$.

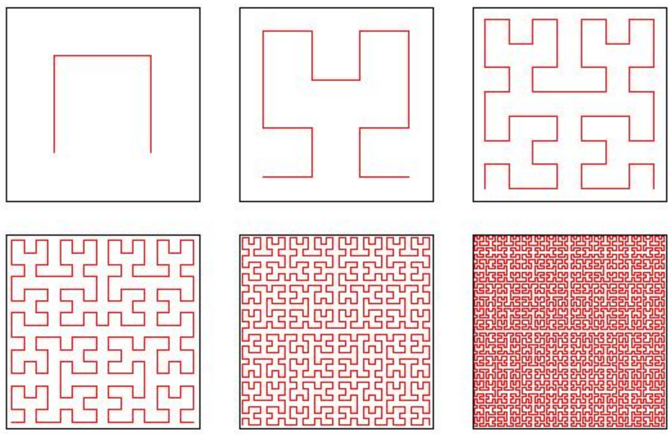
9 Quanti punti ha il piano?

9.1 Alternare le cifre di due sviluppi decimali

Fissato un sistema di riferimento, un punto del piano è individuato da una coppia di punti della retta, e quindi, per definizione di prodotto di due numeri cardinali, la cardinalità dell'insieme dei punti del piano è data dal prodotto $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$. Senza scendere nei dettagli, voglio convincervi che $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$, ovvero il piano ha lo stesso numero di punti della retta. L'idea è che dato un punto del piano, e considerate le sue due coordinate x ed y (ascissa e ordinata), a partire dallo sviluppo decimale di x e da quello di y, posso formare una nuova espressione decimale z le cui cifre sono ottenute alternando quelle di x e quelle di y. L'espressione z individua un punto sulla retta, e in questo modo ho associato ad ogni punto del piano un punto sulla retta, senza che mai due punti diversi del piano vengano associati allo stesso punto della retta. Ne segue che il piano non ha più punti della retta, e quindi ne ha lo stesso numero (non potendone certo avere di meno).

9.2 La curva di Peano

Una seconda dimostrazione della uguaglianza $\mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$ si basa sulla curva di Peano. Così come un segmento ha lo stesso numero dei punti dell'intera retta, non è difficile dimostrare che la superficie di un quadrato ha lo stesso numero dei punti di tutto il piano. Per dimostrare che $\mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$ basta allora far vedere che è possibile prendere un segmento di retta e "curvarlo" in modo tale che ricopra l'intera superficie di un quadrato. La curva si ottiene come limite di approssimazioni successive come nella figura.



Approssimazioni della curva di Peano

Supponendo che il quadrato abbia lato di lunghezza 1, la n-esima curva approssimante si avvicina a tutti i punti del quadrato a meno di una distanza minore o uguale a $1/2^n$. Si può dimostrare che le curve approssimanti tendono ad una curva limite, la curva di Peano appunto, che copre tutti i punti del quadrato. In questo modo si ottiene una funzione continua (una curva appunto) che associa ad ogni punto dell'intervallo $[0, 1]$ un punto del quadrato in modo che nessun punto del quadrato rimanga scoperto.

Se non ci si fida troppo delle figure si può cercare di descrivere la curva di Peano usando una numerazione in base 4 nel modo seguente. Osserviamo che il quadrato iniziale si può dividere in quattro quadratini di lato dimezzato, che possiamo numerare utilizzando le cifre da 1 a 4. La numerazione è scelta in modo che unendo i centri dei quattro quadratini dall'1 al 4 si ottiene la prima curva approssimante. Poi suddividiamo il quadratino numero x (dove x varia da 1 a 4) in 4 sotto-quadratini $x1, x2, x3, x4$. In questo modo si ottengono i sedici quadratini $11, 12, 13, 14,\ 21, 22, 23, 24,\ 31, 32,\ 33, 34,\ 41, 42,$ 43, 44 dove la numerazione è scelta in modo che unendo i centri dei sedici quadratini nell'ordine dato si ottenere la seconda curva approssimante. A questo punto dovrebbe essere chiaro come continuare iterando il procedimento. Al passo n avremo 2^n quadratini di lato $1/2^n$ ciascuno dei quali è numerato da una successione di n cifre (da 1 a 4). Ad ogni punto del quadrato possiamo associare una successione infinita di cifre (sempre da 1 a 4) che indicano la successione dei quadrati in cui il punto è inscatolato. Ad esempio il punto $12432\ldots$ si troverà all'interno della successione decrescente di quadrati $1, 12, 124, 1243, 12432, \ldots$. Se un punto si trova sul bordo comune a due quadrati possiamo associargli più di una successione ma questo non importa. Ora si fa la stessa cosa sul segmento $[0, 1]$. Ovvero si si divide il segmento $[0, 1]$ in quattro segmenti uguali che si toccano solo lungo i bordi. Si numerano i segmenti da sinistra a destra utilizzando le cifre $1, 2, 3, 4$. Poi si ripete il procedimento dividendo il segmento x nei quattro sotto-segmenti $x1, x2, x3, x4$. Ciascun sotto-segmento xy è a sua volta diviso in quattro sotto-sotto-segmenti $xy1, xy2, xy3, xy4$ e così via. Ad ogni punto del segmento $[0, 1]$ viene associata una successione infinita $xyz\ldots$ di cifre da 1 a 4 che indica in quale successione di segmenti decrescenti esso è contenuto. La curva di Peano associa ad ogni punto p del segmento $[0, 1]$ quell'unico punto $f(p)$ del quadrato unitario a cui viene associata la stessa successione di cifre. Ad esempio se p è contenuto nei segmenti $1, 12, 124, 1243, 12432, \ldots$, il punto $f(p)$ è contenuto nei corrispondenti quadrati $1, 12, 124, 1243, 12432, \ldots$. In questo modo nessun punto del quadrato rimane scoperto, e possiamo concludere che $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \leq \mathbf{c}$. Valendo chiaramente anche la disuguglianza opposta si ottiene l'uguaglianza (non si ottiene direttamente l'uguaglianza perché a causa dei bordi due punti del segmento potrebbero andare a finire nello stesso punto del quadrato).

9.3 Qualche conto con gli esponenziali

Una terza dimostrazione della uguaglianza $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$ si basa sui seguenti passaggi, che possono essere giustificati in base alla definizione di somma, prodotto ed esponenziale di numeri cardinali: $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$.

10 Numeri cardinali sempre più grandi

Gli unici numeri cardinali che abbiamo incontrato fino ad ora sono i cardinali finiti, $\aleph_0$ e $\mathbf{c}$. Per trovarne uno più grande di $\mathbf{c}$ non possiamo prendere i punti del piano, e nemmeno i punti dello spazio (che sono sempre $\mathbf{c}$), quindi dobbiamo cercare altrove. Consideriamo l'insieme delle parti della retta. Per ottenere una parte della retta dobbiamo fare una scelta binaria per ogni punto della retta, corrispondente alla decisione se metterlo o non metterlo nella parte. Visto che ci sono $\mathbf{c}$ scelte da fare, ognuna con 2 possibilità, si ottengono $2^{\mathbf{c}}$ parti. Per mostrare che $2^{\mathbf{c}} > \mathbf{c}$ si ragiona come segue. Chiaramente le parti della retta non sono di meno dei punti sulla retta, perché dato un punto posso formare la parte consistente di quel solo punto. Se per assurdo $\mathbf{c} = 2^{\mathbf{c}}$ potrei associare biunivocamente ad ogni punto sulla retta una parte della retta. Supposta data una tale corrispondenza, andiamo a considerare l'insieme R costituito da quei punti x sulla retta che non appartengono alla parte a loro associata. I casi sono due, o il punto p sulla retta associato ad R appartiene ad R oppure no. In entrambi i casi si arriva ad una contraddizione. Se p appartiene ad R vuol dire, per come è definito R, che p non appartiene all'insieme a lui associato, ma questo è assurdo perché per la scelta di p quell'insieme è proprio R. Analogamente se p non appartiene ad R deve appartenere all'insieme a lui associato, che però è proprio R, e si arriva ad un assurdo.

Con un ragionamento del tutto analogo si mostra che per un qualsiasi numero cardinale α, si ha $2^{\alpha} > \alpha$, e quindi non esiste un numero cardinale maggiore di tutti gli altri. Ciò può apparire paradossale, perché "l'insieme di tutte le cose" sembrerebbe avere una cardinalità più grande di ogni altra. Il problema è che "l'insieme di tutte le cose" non è un insieme matematicamente accettabile nel senso specificato dagli assiomi di Zermelo, proprio perché accettarlo condurrebbe a paradossi.

11 I numeri ordinali

11.1 Insiemi linearmente ordinati

Ordinare linearmente un insieme significa stabilire un ordine di precedenza tra i suoi elementi, in modo che, presi comunque due di essi, uno dei due abbia la precedenza sull'altro. Si suppone che la relazione di precedenza sia transitiva, cioè se x viene prima di y, e y viene prima di z, allora x viene prima di z. Conveniamo infine che "venire prima" si intenda con l'elemento stesso escluso, cioè un elemento non viene prima di sè stesso. Per poter parlare di ordine lineare basta che sia data una relazione per cui valgano le condizioni suddette.

Un modo tipico, ma non certo l'unico modo, per ordinare linearmente un insieme è di disporre i suoi elementi su una linea retta. In questo caso si può stabilire un ordine dicendo che viene prima quello che si trova più a sinistra. Questo è quel che capita quando stiamo in fila all'ufficio postale, ammesso che la fila scorra da destra a sinistra.

Leggermente sorprendente è il fatto che si possa dimostrare l'esistenza di insiemi linearmente ordinati di cardinalità più grande di **c**, nel qual caso è evidentemente impossibile disporne gli elementi sulla retta e bisogna stabilire l'ordine in altro modo (ma anche se l'insieme ordinato avesse cardinalità non superiore a **c**, non è detto che se ne possano disporre gli elementi sulla retta mettendo più a sinistra quelli che vengono prima nell'ordine dato).

Chiaramente lo stesso insieme potrebbe essere ordinato in tanti modi diversi, quindi quando diciamo che x ha la precedenza su y dobbiamo sempre specificare a quale ordine ci si riferisce. Fissato un ordine, diremo anche "x è minore di y", oppure "y è maggiore di x", oppure "x precede y", al posto di "x ha la precedenza su y".

11.2 Insiemi bene ordinati

Un insieme linearmente ordinato si dice un **buon ordine**, o un insieme **bene ordinato**, se, oltre a valere tutte le condizioni già dette, vale l'ulteriore condizione che, presa comunque una parte non vuota dei suoi elementi (compresa la parte costituita da tutto l'insieme), tra questi ce ne sia uno minore di tutti gli altri della parte considerata (cioè con maggiore precedenza nell'ordine).

Ad esempio i punti di un segmento chiuso di retta $[A, B]$, ordinati linearmente da sinistra a destra, non costituiscono un insieme bene ordinato in quanto, sebbene ci sia un punto di precedenza più alta di tutti gli altri (il punto A), tolto questo si ottiene una parte rimanente in cui non c'è un elemento con la massima precedenza.

Insomma per essere bene ordinato non basta che ci sia un elemento minore di tutti gli altri, ma è necessario che tolto questo ci sia un secondo elemento di massima precedenza tra i rimanenti (se ve ne sono), e poi un terzo elemento di massima precedenza tolti i primi due (se ve ne sono), e via dicendo.

Ogni elemento x di un insieme bene ordinato, o è il massimo elemento dell'insieme (ammesso che ci sia un massimo), oppure tra gli elementi dell'insieme ce ne deve essere uno che viene subito dopo di lui nell'ordine, e che viene chiamato l'**immediato successore** di x (o semplicemente il "successore" di x): basta infatti prendere l'elemento minimo tra quelli maggiori di x osservando che tale minimo esiste perché ogni parte non vuota di un insieme bene ordinato ha un minimo.

Se invece che gli elementi maggiori di x andiamo a considerare quelli minori, troviamo tre possibilità: o non ve ne sono affatto, ed x è il minimo elemento dell'insieme; oppure x è il successore immediato di un altro elemento che viene chiamato **l'immediato predecessore** di x; oppure tra gli elementi minori di x non c'è un massimo, ed x viene chiamato **elemento limite**. In quest'ultimo caso x non è nè il minimo di tutti, nè possiede un immediato predecessore.

Per illustrare queste nozioni ricordiamoci del primo metodo che avevo usato per trasferire i clienti dall'albergo di Cantor a quello di Russell. Prima si sistemavano i clienti del primo piano dell'albergo di Cantor nelle camere pari dell'albergo di Russell, poi quelli del secondo piano che andavano ad occupare una camera sì e una no delle camere rimaste libere, e poi quelli dei piani via via superiori che seguivano lo stesso metodo. Ciò corrisponde a stabilire un ordine di precedenza, che in effetti è un buon ordine, in cui i clienti dei piani più bassi hanno la precedenza su quelli dei piani più alti, e a parità di piano ha la precedenza chi ha il numero di camera più basso (anche se volendo si sarebbero potuti trasferire tutti insieme senza rispettare le precedenze calcolandosi in anticipo la camera spettante). In quest'ordine il primo cliente del secondo piano è un elemento limite, perchè non ce ne è uno che viene immediatamente prima di lui. Stesso discorso vale per il primo cliente di ognuno dei piani superiori.

11.3 I numeri ordinali indicano la posizione di un elemento in un buon ordine

A differenza dei numeri cardinali che indicano quanti elementi ci sono in un insieme, i **numeri ordinali** indicano la posizione di un elemento in un insieme bene ordinato. Se non ci sono elementi limite possiamo usare i soliti numeri ordinali finiti "primo", "secondo", "terzo", "quarto", eccetera. Se invece ci sono elementi limite, chiamo ω il numero ordinale del primo elemento limite. Quindi, nell'esempio precedente, ω indica la posizione del primo cliente del secondo piano. Gli altri clienti del secondo piano occupano le posizioni $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, eccetera, con la convenzione che se un elemento ha numero ordinale α, il suo successore immediato (se c'è) ha numero ordinale $\alpha + 1$. Se oltre ad ω ci sono altre posizioni limite, la prima di essa viene indicata con $\omega + \omega$, o con $\omega \cdot 2$. Nel nostro esempio il primo cliente del terzo piano occupa la posizione $\omega \cdot 2$, e gli altri clienti del terzo piano occupano le posizioni $\omega \cdot 2 + 1$, $\omega \cdot 2 + 2$, eccetera.

Da questi esempio risulta chiaro che per indicare la posizione di un elemento in un insieme bene ordinato non basta specificare quanti elementi ci sono prima di lui, ad esempio l'elemento in posizione ω non è la stessa cosa dell'elemento in posizione $\omega + 1$, anche se tutti e due sono preceduti dallo stesso numero di elementi, cioè $\aleph_0$. Il punto è che $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, mentre $\omega + 1 \neq \omega$, che illustra una delle differenze fondamentali tra numeri ordinali e numeri cardinali.

Il metodo di indicare la posizione di un elemento x specificando quanti elementi ci sono davanti ad x funziona solo se ce ne sono in numero finito: ad esempio il quinto elemento è quello con quattro elementi avanti a sè, e il primo elemento è quello con zero elementi avanti a sè. Seguendo la convenzione di indicare la posizione di un elemento con la cardinalità dell'insieme dei predecessori, nel caso siano in numero finito, alcuni matematici scrivono "4" per dire "quinto" e "0" per dire "primo". Questa idea, che io raccomando anche se non sembra aver riscosso molto successo al di fuori di un ristretto circolo di appassionati, consente di usare gli stessi numeri sia per i cardinali finiti che per gli ordinali finiti. Per quelli infiniti è un'altra storia.

11.4 Tipo d'ordine di un insieme bene ordinato

Per ora ho solo fatto degli esempi per darvi l'idea, ma ancora non ho dato una definizione del tutto rigorosa dei numeri ordinali. Così come il concetto fondamentale per definire i numeri cardinali è quello di corrispondenza biunivoca, il concetto fondamentale per definire i numeri ordinali è quello di "isomorfismo tra due insiemi bene ordinati". Ciò non è altro che una corrispondenza biunivoca tra due insieme bene ordinati, che in più mantiene l'ordine. Più precisamente due insiemi bene ordinati X ed Y sono **isomorfi**, se è possibile far corrispondere biunivocamente gli elementi di X a quelli di Y in modo che, se nell'ordine di X un dato elemento a viene prima di un altro elemento b, allora nell'ordine di Y l'elemento associato ad a viene prima dell'elemento associato a b. Intuitivamente X è isomorfo ad Y se X ed Y sono la stessa cosa qualora facciamo astrazione dalla natura dei loro elementi e guardiamo solo alla struttura delle relazioni di precedenza. Ad esempio X potrebbe essere un insieme bene ordinato di mele, ed Y un insieme bene ordinato di pere, ordinate nello stesso identico modo.

Chiaramente se due insieme bene ordinati sono isomorfi, allora hanno anche la stessa cardinalità. Il viceversa è vero se l'insieme ha un numero finito di elementi, ma se l'insieme è infinito ci potrebbero essere due modi non isomorfi di ordinarlo.

Ad esempio i numeri naturali possono essere ordinati nei seguenti tre modi diversi, di cui gli ultimi due sono isomorfi tra loro, ma non isomorfi al primo. i) Nell'ordine naturale di grandezza $0, 1, 2, 3, \ldots$. ii) Mettendo prima tutti i pari in ordine di grandezza e poi tutti i dispari in ordine di grandezza: $0, 2, 4, , \ldots, 1, 3, 5, \ldots$. iii) Mettendo prima tutti i dispari in ordine di grandezza e poi tutti i pari in ordine di grandezza: $1, 3, 5, \ldots, 0, 2, 4, \ldots$.

Un modo interessante di ordinare gli interi positivi è di dare la precedenza a quelli che nella scomposizione in fattori primi hanno una potenza di due più bassa, e a parità di potenza di due mettendoli in ordine di grandezza (dobbiamo escludere lo zero perché non ha una scomposizione in primi). In quest'ordine vengono prima i dispari $1, 3, 5, 7 \ldots$, poi i doppi di questi numeri $2, 6, 10, 14 \ldots$, poi i quadrupli $4, 12, 20, 28, \ldots$, eccetera.

In questo modo si ottiene un buon ordine sugli interi positivi isomorfo all'ordine sopra considerato per i clienti dell'albergo di Cantor: i clienti del piano n corrispondono a quegli interi positivi che contengono n volte il fattore 2 nella scomposizione in fattori primi.

Il **tipo d'ordine** di un insieme bene ordinato X, è ciò che hanno in comune tutti gli insiemi bene ordinati isomorfi ad X. Dire che il tipo d'ordine di X è uguale a quello di Y, è la stessa cosa che dire che X ed Y sono isomorfi.

Possiamo ora finalmente dire con esattezza cosa sia il **numero ordinale di un elemento in un insieme bene ordinato**: esso non è altro che il **tipo d'ordine dell'insieme dei suoi predecessori**. Questa definizione presuppone un teorema che non vi dimostro secondo il quale per individuare la posizione di un elemento in un insieme bene ordinato è sufficiente dare il tipo d'ordine dell'insieme dei suoi predecessori (mentre invece abbiamo visto che può non essere sufficiente dare semplicemente la cardinalià dell'insieme dei suoi predecessori).

I numeri ordinali e i tipi d'ordine sono quindi essenzialmente la stessa cosa, cambia solo il fatto che in un caso ci riferiamo agli elementi di un insieme bene ordinato, e nell'altro ad un insieme bene ordinato. Ogni numero ordinale è anche un tipo d'ordine (dei predecessori del dato elemento), e si può far vedere che vale anche il viceversa: ogni tipo d'ordine è un numero ordinale. Se ad esempio X è un insieme bene ordinato di tipo d'ordine α, allora aggiungendo ad X un nuovo elemento a che viene messo in fondo a tutti gli altri, il numero ordinale del nuovo elemento a coincide evidentemente con il tipo d'ordine di

X, in quanto nel nuovo ordine X è l'insieme dei predecessori di a. Il tipo d'ordine dell'insieme X con l'aggiunta di a è invece diventato $\alpha + 1$.

11.5 Alcune operazioni con i numeri ordinali

Il numero ordinale ω può essere definito come il tipo d'ordine dell'insieme bene ordinato dei numeri naturali nel loro usuale ordine di grandezza. Nel nostro solito esempio con l'albergo di Cantor (ordinato prima per numero di piano e poi per numero di camera), dire che il primo cliente del secondo piano sta in posizione ω, equivale a dire che i suoi predecessori sono ordinati in modo isomorfo ai numeri naturali nel loro solito ordine.

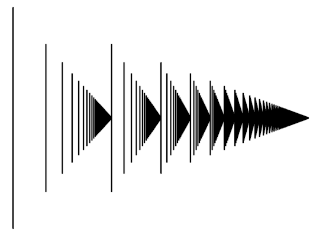
La **somma $\alpha+\beta$ di due numeri ordinali** si ottiene nel modo seguente. Si considera un insieme bene ordinato X di tipo d'ordine α, e un insieme Y di tipo d'ordine β senza elementi in comune con X. Ora si uniscono X ed Y mettendo il primo elemento di Y dopo tutti gli elementi di X, e mantenendo le stesse relazioni all'interno di X ed Y. L'insieme risultante è bene ordinato e il suo tipo d'ordine è indicato con $\alpha + \beta$. Ad esempio $\omega + \omega$ è il tipo d'ordine dei numeri naturali ordinati mettendo prima tutti i pari in ordine di grandezza, e poi tutti i dispari in ordine di grandezza.

Il numero ordinale $\omega + 1$ può essere rappresentato da un buon ordine sui numeri naturali ottenuto mettendo prima tutti gli interi positivi $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, e in fondo lo 0. Quest'ordine non è isomorfo a quello solito sui numeri naturali perché contiene un elemento massimo, che tra l'altro è anche un elemento limite. Quindi ω è diverso da $\omega + 1$.

Se invece aggiungiamo 1 a sinistra di ω riotteniamo la stessa cosa: $1+\omega = \omega$. Infatti il tipo d'ordine degli interi positivi $1, 2, 3, 4, \ldots$ nel solito ordine di grandezza è ω, e aggiungendo il nuovo elemento 0 all'inizio otteniamo l'insieme bene ordinato $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ che ha ancora tipo ω.

Il **prodotto $\alpha \cdot \beta$ di due numeri ordinali** si ottiene prendendo β copie di un insieme di tipo α, ovvero rimpiazzando ogni elemento di un insieme di tipo β con una copia di α. Ad esempio $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$, mentre $2 \cdot \omega = 2 + 2 + 2 + \ldots = \omega$.

L'albergo di Cantor ordinato con il metodo a zig-zag (cioè dando la precedenza ai clienti la cui somma "numero di camera + numero di piano") ha tipo ω, mentre se lo ordiniamo dando la precedenza a quelli dei piani più bassi, e mantenendo l'ordine per camera all'interno di ciascun piano, otteniamo un insieme di tipo $\omega \cdot \omega$.



Come esercizio cercate un sottoinsieme della retta che ordinato da sinistra a destra abbia tipo d'ordine $\omega \cdot \omega \cdot \omega$.

11.6 Ordinare i numeri ordinali

Abbiamo visto che i numeri ordinali servono a descrivere la forma di un insieme bene ordinato, oppure ad indicare la posizione di un elemento in un insieme bene ordinato.

È interessante notare che i numeri ordinali si possono a loro volta ordinare tra loro in modo del tutto naturale. Si parte dagli ordinali finiti $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$, che indichiamo con gli stessi nomi dei cardinali finiti, convenendo ad esempio che 3 è il tipo d'ordine di un qualsiasi insieme ordinato con tre elementi (gli insiemi finiti se sono ordinati sono automaticamente bene ordinati). Si prosegue poi con il primo ordinale limite ω, per poi passare a $\omega+1, \omega+2 < \ldots$, fino a che dopo infiniti passi si incontra il prossimo ordinale limite $\omega 2 = \omega+\omega$, e poi ancora $\omega 2+1 < \omega 2+2 < \ldots < \omega 3 < \ldots < \omega\omega < \ldots$. Gli ordinali della forma $\alpha + 1$ sono gli ordinali successore, gli altri sono gli ordinali limite (eccetto lo 0 che non è nè successore nè limite).

La regola per ordinare gli ordinali è la seguente: dati due ordinali α e β, scriviamo $\alpha < \beta$ per intendere che sommando un ordinale diverso da 0 alla destra di α si ottiene β.

Si può dimostrare che due ordinali diversi sono sempre confrontabili, nel senso che uno dei due è minore dell'altro. È proprio usando il fatto che i numeri ordinali sono confrontabili che si dimostra che anche i numeri cardinali sono confrontabili. La possibilità di ridurre il secondo problema al primo dipende da un teorema dimostrato da Ernst Zermelo nel 1908 secondo il quale ogni insieme si può bene ordinare (ve ne avevo già parlato).

Una osservazione importante è il fatto che, fissato un ordinale α, l'insieme degli ordinali minori di α risulta bene ordinato, e il suo tipo d'ordine è proprio α. Ad esempio gli ordinali minori di 3 costituiscono l'insieme $\{0, 1, 2\}$, ordinato nel modo naturale $0 < 1 < 2$, e questo insieme ha come tipo d'ordine proprio 3. La stessa cosa succede per gli ordinali infiniti, ad esempio gli ordinali minori di ω costituiscono l'insieme degli ordinali finiti $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ordinati nel modo consueto, e il tipo d'ordine di questo insieme è proprio ω.

11.7 Gli ordinali e l'induzione matematica

Ci sono due principi per generare tutti gli ordinali a partire da zero. Il primo principio dice che dato un ordinale se ne può creare una altro aggiungendogli 1 a destra. Il secondo principio dice che dopo aver generato un insieme di ordinali X tra cui non c'è un massimo elemento, c'è sempre un ordinale limite che è il minimo ordinale tra quelli maggiori di tutti gli ordinali di X.

Il metodo di induzione matematica consiste nel mostrare che una certa proprietà vale per tutti i numeri naturali, facendo vedere che vale per zero e mostrando come si passa da n ad $n+1$ per un generico n. Il metodo si può applicare anche per definire una funzione sui numeri naturali dando il suo valore per 0, e fornendo la regola per passare da n ad $n+1$.

L'esempio classico è la definizione della funzione $n!$ (si legge "n fattoriale"): $0! = 1$, $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. Per calcolare $n!$ per un certo n ci si riconduce al caso precedente. Ad esempio supponendo di aver già stabilito che $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$ e $3! = 6$, si ottiene il caso seguente applicando la regola $4! = 4 \cdot 3!$, che fornisce il risultato 24.

Il metodo di induzione si può applicare anche ai numeri ordinali, solo che oltre a far vedere come si passa da n ad $n+1$, bisogna anche far vedere anche come si passa agli ordinali limite, supposto di aver già trattato i casi precedenti.

Per illustrare il metodo diamo la definizione di esponenziazione di due numeri ordinali usando il metodo di induzione. A tal fine partiamo dall'esponente 0 e facciamo poi vedere come si passa ad esponenti sempre più grandi: $\alpha^0 = 1$, $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$, e infine se λ è un esponente limite α^λ è definito come il minimo ordinale maggiore di tutti quelli ottenuti elevando α ad un esponente minore di λ.

Come esercizio dopo aver calcolato $\omega^2 = \omega \cdot \omega$, e $\omega^3 = \omega \cdot \omega \cdot \omega$, potete cercare di immaginarvi come è fatto un insieme bene ordinato di tipo d'ordine ω^ω, che è il minimo ordinale maggiore di $\omega^2, \omega^3, \ldots$ (proseguendo per tutti gli esponenti finiti).

In generale l'esponenziazione tra i numeri ordinali non ha nulla a che fare con quella tra i numeri cardinali, eccetto nel caso si tratti di ordinali e cardinali finiti, nel qual caso tutte le operazioni coincidono.

Una giustificazione rigorosa del metodo di induzione sugli ordinali si basa sul fatto che in ogni insieme di ordinali c'è sempre un minimo elemento, cosa che accomuna i numeri ordinali e i numeri naturali.

11.8 Gli ordinali e l'ipotesi del continuo

Gli ordinali si possono suddividere in varie classi. Alla prima classe appartengono gli ordinali finiti $0, 1, 2, 3, \ldots$, che costituiscono un insieme di cardinalità $\aleph_0$. Alla seconda classe appartengono tutti gli ordinali α che hanno $\aleph_0$ predecessori. Ad esempio $\omega, \omega+1, \omega \cdot 2$, e in effetti tutti gli ordinali che abbiamo incontrato fino ad ora senza alcuna eccezione, sono in questa seconda classe. La cardinalità dell'insieme dei numeri ordinali della prima o della seconda classe si chiama $\aleph_1$, e si può dimostrare che $\aleph_1$ è maggiore di $\aleph_0$ ed è il più piccolo numero cardinale maggiore di $\aleph_0$. Alla terza classe appartengono quegli ordinali che hanno un insieme di predecessori di cardinalità $\aleph_1$. In modo analogo si definiscono le classi successive. Gli ordinali di una data classe hanno un numero di predecessori pari alla cardinalità dell'insieme degli ordinali di tutte le classi precedenti.

Si può dimostrare che in questo modo si ottengono cardinalità sempre più grandi che esauriscono tutte le possibili cardinalità. Ciò fornisce un metro per misurare ogni cardinalità usando gli ordinali. Facciamo subito un esempio.

Dopo aver stabilito che $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$ avevamo sollevato il problema se valesse l'"ipotesi del continuo", cioè se $\mathbf{c}$ fosse il più piccolo numero cardinale maggiore di $\aleph_0$. Ciò equivale a chiedersi se $\mathbf{c} = \aleph_1$, ovvero se ci siano tanti numeri reali quanti sono gli ordinali della seconda classe. Questo fornisce un secondo metodo per affrontare l'ipotesi del continuo, ma nonostante gli sforzi di Cantor e dei suoi successori il problema è ancora irrisolto. Si è inoltre dimostrato che non può essere risolto usando esclusivamente gli assiomi di Zermelo, quindi occorre inventarsi qualcos'altro o rinunciarci e dichiararlo irrisolubile.

Sempre usando gli ordinali si può dimostrare che per ogni numero cardinale ce ne è uno immediatamente più grande, ad esempio dopo $\aleph_0$ c'è appunto $\aleph_1$. Dopo $\aleph_1$ i prossimi numeri cardinali in ordine di grandezza si chiamano $\aleph_2, \aleph_3, \ldots$, e subito dopo tutti questi c'è un numero cardinale che si chiama $\aleph_\omega$. Si sa che $\mathbf{c}$ non può essere uguale ad $\aleph_\omega$, ma per quanto ne sappiamo potrebbe essere sia più grande che più piccolo.

Chi ne voglia sapere di più può leggere la raccolta degli scritti di Cantor "La formazione della teoria degli insiemi" a cura di Gianni Rigamonti, edito da Sansoni nel 1992, e dopo averlo finito può spedirmi una posta elettronica per ulteriori indicazioni bibliografiche.