

La verità matematica da Kant a Gödel

Alessandro Berarducci

Pisa, 15 Marzo 2010

Questa è la trascrizione di un intervento tenuto il 7 Febbraio 2008 alla Scuola Normale Superiore nell'ambito degli incontri serali su "Matematica, Cultura e Società". Ringrazio Ilaria Gabbani e Pietro Majer per avermene dato occasione con il loro invito. Non si tratta evidentemente di uno studio critico, ma di un puro e semplice *divertissement* consistente in un dialogo a più voci sulla verità matematica e avente come punto di arrivo i teoremi di incompletezza di Gödel. Per le citazioni da Hilbert mi sono avvalso degli scritti raccolti nel volume "Ricerche sui fondamenti della matematica", a cura di Michele Abrusci (Bibliopolis 1978). Per le citazioni da altri autori ho talvolta usato fonti secondarie e altre volte ho azzardato io stesso una traduzione.

Indice

1	Logica o intuizione?	1
2	Aritmetizzazione dell'analisi	5
3	Il logicismo	6
4	L'infinito di Cantor	8
5	Hilbert	11
6	Gödel	19
7	Conclusioni	21

1 Logica o intuizione?

POINCARÉ 1894

Nessuno può introdurre il tema del nostro intervento meglio di Poincaré, al quale cedo la parola.



Henri Poincaré
1854-1912

“La possibilità stessa della scienza matematica sembra costituire un’insolubile contraddizione. Se questa scienza è deduttiva solamente in apparenza, allora da dove deriva il suo perfetto rigore?”

Se d’altra parte tutte le sue proposizioni possono essere dedotte dalle regole della logica, come mai la matematica non si riduce ad una gigantesca tautologia?”

Poincaré, *Sur la nature du raisonnement mathématique*, 1894

Poincaré si sta interrogando sulle fonti della conoscenza matematica. Il perfetto rigore di questa disciplina sembra giustificarsi solo ammettendo che essa si riduca alla pura logica, ma a questa conclusione Poincaré si ribella. Il motivo lo spiega lui stesso:

“Il sillogismo non ci può insegnare nulla di essenzialmente nuovo, e se ogni cosa proviene dal principio dell’identità, allora ogni cosa deve potersi ridurre a tale principio.

Dobbiamo ammettere che gli enunciati di tutti i teoremi che riempiono le pagine di così tanti volumi siano solo modi indiretti di dire che A è A ?”

ibid.

La logica non può fornirci altro che ciò che è implicitamente contenuto nelle premesse. Ma se le cose stanno così, dove cercare la fonte della conoscenza matematica, visto che evidentemente essa non è una scienza sperimentale?

KANT 1787. L’INTUIZIONE

Sentiamo cosa diceva un altro grande pensatore poco più di un secolo prima.



Immanuel Kant
1724-1804

“La rappresentazione dello spazio non può essere nata per esperienza da rapporti con il fenomeno esterno; ma l’esperienza esterna è essa stessa possibile, prima di tutto, per la detta rappresentazione. [...]

Così anche tutti i principî geometrici, per esempio che in un triangolo la somma di due lati è maggiore del terzo, non vengono mai ricavati dai concetti universali di linea e di triangolo, bensì dall’intuizione, e a priori con certezza apodittica.”

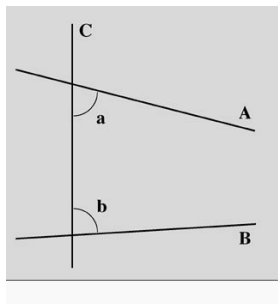
Kant, *Critica della ragion pura*, 1787

Dunque per Kant i principî della geometria non sono né analitici (ovvero ricavati dalla logica) né empirici (essendo l’esperienza stessa basata su una rappresen-

tazione *a priori* dello spazio), ma sono ricavati dall'intuizione.

LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Questa concezione entrò però in crisi con la scoperta, da parte di Gauss, Bolyai e Lobačewskij, di geometrie in cui non vale il V postulato di Euclide:



V postulato:

Se una retta che taglia due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

Per ragioni che non sto ad indagare questo postulato era ritenuto meno evidente degli altri assiomi euclidei. Il gesuita Girolamo Saccheri (1667-1733) cercò invano di dedurlo dagli altri assiomi, e così fece Farkas Bolyai, il quale dopo una vita sprecata in inutili tentativi mise in guardia il figlio János con questo solenne ammonimento:



Farkas Bolyai
1775-1856

“Per amor di Dio, te ne supplico, lascialo stare. Devi temerlo non meno di una passione carnale, perché anch'esso può prendersi tutto il tuo tempo e privarti del benessere, della tranquillità della mente e della felicità nella vita.”

Farkas Bolyai, Lettera al figlio, 1820

I figli non sempre ascoltano i padri, e talvolta hanno più fortuna di loro. Ecco la risposta di János Bolyai:

“Ho scoperto cose tanto meravigliose da esserne stupefatto... dal nulla ho creato un nuovo universo.”

János Bolyai, Lettera al padre, 1823



János Bolyai
1802-1860

János aveva scoperto che esistevano geometrie in cui valevano tutti gli assiomi di Euclide ad eccezione del V, che pertanto non si poteva dedurre dagli altri

assiomi.

CRITICA DELL'INTUIZIONE KANTIANA

L'esistenza di geometrie non euclidee era secondo Gauss:



Karl Friedrich Gauss
1777-1855

“la più chiara dimostrazione che Kant aveva torto ad affermare che lo spazio è solo una forma della nostra intuizione.”

Se infatti la geometria è la scienza dello spazio, allora in presenza di più geometrie solo l'esperienza sembra poterci dire quale sia la geometria giusta.

Se d'altra parte la geometria non è la scienza dello spazio, ma trae invece legittimazione solo dalla coerenza logica, ci ritroviamo di nuovo di fronte al dilemma di Poincaré.

POINCARÉ 1903. IL CONVENZIONALISMO

In disaccordo sia con l'empirismo di Gauss che con l'intuizione di Kant, vediamo come Poincaré cerca di uscire dall'impasse:



Henri Poincaré
1845-1912

“Gli assiomi geometrici non sono dunque né giudizi sintetici a priori né fatti sperimentali. Gli assiomi geometrici sono convenzioni; la nostra scelta tra tante convenzioni possibili è guidata dai fatti sperimentali; ma essa resta libera ed è limitata solamente dalla necessità di evitare ogni contraddizione. [...]

In altri termini, gli assiomi della geometria (non parlo di quelli dell'aritmetica) non sono che definizioni apparenti.”

Poincaré, *La Science et L'Hypothèse*, 1903

Dunque né sillogismi, né intuizioni, e neppure fatti empirici, ma semplici convenzioni. La questione se la geometria euclidea sia vera

“sarebbe come domandarsi se il sistema metrico sia vero e false le antiche misure; se siano vere le coordinate cartesiane e quelle polari false. Una geometria non può essere più vera di un'altra: essa può essere soltanto più comoda.”

ibid.

MA L'ARITMETICA NO ...

Se andiamo a rileggere i passi di Poincaré notiamo però che dalla concezione convenzionalista della verità egli sembra escludere gli assiomi dell'aritmetica (“...non parlo di quelli dell'aritmetica”), che Kant metteva invece sullo stesso piano di quelli della geometria ritenendoli entrambi sintetici a priori. Forse che, caduta l'intuizione geometrica come fonte della verità matematica, essa può essere cercata nell'aritmetica?

2 Aritmetizzazione dell'analisi

CRISI DEL CALCOLO INFINITESIMALE

Ricordiamo che era stata proprio l'aritmetica - nelle mani di Weierstrass, Dedekind e Cantor - a salvare il calcolo infinitesimale dalla crisi fondazionale che lo aveva investito. L'idea di quantità infinitamente piccola che stava alla base del calcolo di Newton e Leibniz era apparsa ripugnante a più di un critico e potenzialmente generatrice di paradossi.



George Berkeley
1685-1753

“io indagherò con la massima imparzialità se questo metodo è chiaro od oscuro, coerente o ripugnante, dimostrativo o precario.”

Berkeley, *The Analyst*, 1734

Più di un secolo dopo era possibile affermare che

“la continuità è ancora un'idea confusa.”

Leopold Kronecker, 1864

L'ARITMETIZZAZIONE DELL'ANALISI

Weierstrass, Dedekind e Cantor erano però corsi ai ripari riuscendo ad eliminare le quantità infinitamente piccole dai fondamenti dell'analisi.



Richard Dedekind
1831-1916

In linea di principio “ogni proposizione di algebra o di analisi superiore, per quanto lontana, si lascia esprimere come un teorema sui numeri naturali.”

Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen, 1888

L’analisi veniva così ricondotta all’aritmetica dei numeri naturali, grandezze finite sulle quali nessuno sollevava dubbi. Visto che a sua volta la geometria (o le geometrie) si poteva ridurre all’analisi tramite l’introduzione di coordinate, ecco che l’intero edificio veniva a poggiare sull’aritmetica:

“Dio ci ha dato i numeri naturali, il resto è opera dell’uomo.”

Kronecker, 1886

TUTTAVIA ...

gli attenti osservatori non potevano mancare di osservare che:

“Nell’analisi di Weierstrass sono stati eliminati l’infinitamente piccolo e l’infinitamente grande, mediante la riconduzione degli enunciati su di essi a relazioni tra grandezze finite. Tuttavia, l’infinito compare ancora nelle successioni infinite di numeri naturali che definiscono i numeri reali.”

Hilbert, Sull’infinito, 1926

Buttato fuori dalla porta l’infinito rientrava dalla finestra. I numeri reali di Weierstrass, pur emendati dalle quantità infinitamente piccole o infinitamente grandi, hanno pur sempre, come il famoso $\pi = 3,1415\dots$, infinite cifre dopo la virgola.

Abbandonata l’intuizione geometrica, la matematica veniva dunque a poggiare su due pilastri: la nozione di numero naturale (che forniva le approssimazioni finite ai numeri reali) e la nozione di insieme infinito (che ci dà la totalità delle approssimazioni).

3 Il logicismo

FREGE

Gottlob Frege, confidando forse prematuramente nella solidità del pilastro insiemistico, pensò che fosse possibile ridurre i numeri naturali stessi, e con essi

tutta la matematica, a nozioni puramente logico-insiemistiche.



Gottlob Frege
1848-1925

“ho quasi completato un libro dove tratto del concetto di numero e dimostro che i primi principi del calcolo, che fino ad ora sono stati assunti come assiomi indimostrabili, possono essere dimostrati in base alle definizioni e alle leggi logiche, di modo che probabilmente devono essere ritenuti come giudizi analitici nel senso di Kant.”

Frege, Lettera ad Anton Mary, 1882

Ricordiamo che per Kant i giudizi aritmetici, come quelli geometrici, erano invece “sintetici a priori”, ovvero basati sull’intuizione e non riconducibili né all’esperienza né alla sola logica. Già criticato da Gauss sul versante geometrico, Kant è qui contestato, anche se per motivi diversi, su quello aritmetico. Ecco come Frege riesce a definire il numero 1 in termini puramente logici:

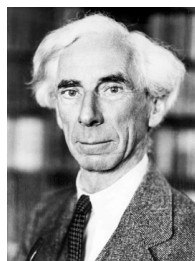
“il numero 1 appartiene ad un concetto F se, qualsiasi cosa sia A , la proposizione che A non cade sotto F non è universalmente valida, e inoltre dalle proposizioni ‘ A cade sotto F ’ e ‘ B cade sotto F ’, segue universalmente che A e B sono la stessa cosa.”

Frege, Die Grundlagen der Arithmetik, 1884

Dunque il numero 1 è un attributo di un concetto. Esso viene attribuito a quei concetti sotto cui per l’appunto cade un solo elemento. Avendo portato a termine la sua impresa Frege poteva affermare che “l’aritmetica non è che una logica sviluppata”.

IL PARADOSSO DI RUSSELL

La riduzione di Frege della matematica alla logica fu messa in crisi dal paradosso di Russell. Il barbiere di un villaggio taglia i capelli a tutti quelli che non se li tagliano da soli: lui se li taglia da solo? Detto più formalmente:



Bertrand Russell
1872-1970

“Poniamo che w sia il predicato: essere un predicato che non può essere predicato di se stesso. Può w essere predicato di se stesso?”

Russell, 1902

Frege con grande onestà riconobbe immediatamente che queste due righe facevano crollare l’intero edificio da lui faticosamente messo in piedi:

“La vostra scoperta di una contraddizione mi ha sorpreso oltre ogni misura, direi che mi ha lasciato folgorato, in quanto ha scosso i fondamenti stessi sui quali intendevo fondare l’aritmetica.”

Frege, 1902

Se infatti ci sono predicati paradossali, la matematica non può essere basata sulla logica dei predicati.

RUSSELL 1903

Eppure Russell non era avverso al logicismo di Frege, ed anzi, in opposizione a Poincaré, fu tra i massimi sostenitori dell’idea che la matematica si potesse ridurre alla sola logica:

“La matematica pura è l’insieme di tutte le proposizioni della forma ‘ p implica q ’, dove p e q sono proposizioni che contengono una o più variabili, né p né q contenendo costanti che non siano costanti logiche.”

Russell, Principles of Mathematics, 1903

La matematica - ci dice Russell - non si pronuncia su come stanno le cose, ma si limita ad affermazioni della forma “se le cose stanno così, allora ...”. Conseguenza di questo approccio è che la matematica non ha un suo contenuto specifico extralogico (“... né p né q contenendo costanti che non siano costanti logiche”), come potrebbe averlo la botanica o la zoologia. Questo, lungi dall’essere un fatto negativo, è proprio ciò che permette alla matematica di essere applicabile, ovvero di essere di volta in volta riempita con il contenuto che vogliamo.

4 L’infinito di Cantor

INFINITO ATTUALE E POTENZIALE

Parallelamente a Frege, Georg Cantor andava intanto sviluppando le sue idee sugli insiemi infiniti. L’infinito era stato oggetto di riflessione fin dall’antichità e già Aristotele ne distingueva due specie: il potenziale e l’attuale. Quello potenziale implicava l’idea di tempo, movimento, divenire:

“L’infinito potenziale si ritrova per lo più laddove si ha un’indeterminata quantità finita variabile, che o aumenta oltre ogni limite (qui possiamo prendere ad esempio il tempo contato a partire da un momento iniziale fissato), oppure decrementa oltre ogni piccolo limite finito (come ad esempio nella presentazione corretta dei cosiddetti differenziali).”

Cantor, Mitteilungen zur Lehre vom Transfinitem, 1887-8

Mentre quello attuale era immobile nella sua compiutezza:

“Per infinito attuale si deve intendere una quantità che per un verso è *non variabile*, ma fissata e determinata in tutte le sue parti - una vera costante -

ma che al tempo stesso supera in grandezza qualsiasi quantità finita dello stesso genere.”

ibid.

IL TRANSFINITO

Alla distinzione aristotelica tra infinito potenziale ed infinito attuale, Cantor aggiungeva un'ulteriore suddivisione dell'infinito attuale in: *transfinito*; *assoluto*.



Georg Cantor
1845-1918

Quello assoluto

“trascende il potere umano di comprensione, e in particolare è al di là della possibilità di una determinazione matematica.”

Cantor 1887-8

Mentre quello transfinito è matematicamente trattabile e, sorprendentemente, ammette varie graduazioni (per Cantor esistono infiniti più o meno grandi).

L'infinito cantoriano, nella sua forma transfinita, interveniva nella definizione dei numeri irrazionali consentendo così di portare a termine la fondazione dell'analisi sui numeri naturali e sugli insiemi.

“I numeri transfiniti sono in un certo senso dei nuovi irrazionali, e in effetti secondo me il miglior modo di definire i numeri irrazionali è interamente simile, o identico, al modo di introdurre i numeri transfiniti.”

Di fronte a idee così innovative la comunità matematica si divise in due fazioni: i difensori e i detrattori. Tra questi ultimi troviamo Poincaré, che ammetteva solo l'infinito potenziale.

I PARADOSSI

A rinfocolare il coro dei detrattori della nuova teoria contribuì la scoperta di alcuni paradossi o antinomie analoghi a quelli che avevano minato la teoria di Frege. Il primo ad essere pubblicato, addirittura precedente a quello di Russell, fu il cosiddetto paradosso di Burali-Forti: i numeri transfiniti servono per contare, ma possono essi stessi essere contati? Servirebbe un numero transfinito più grande di tutti quelli esistenti.

Questo è almeno quanto ne abbiamo desunto con il senno di poi. Burali-Forti si esprimeva in effetti in termini diversi:



Cesare Burali-Forti
1861-1931

“Il principale obiettivo di questa nota è dimostrare che esistono numeri transfiniti (o tipi d'ordine) A e B tali che A non è né uguale a B , né più piccolo di B , né più grande di B .”

Burali-Forti, A question on transfinite numbers, 1897

I CRITICI

Oltre ai paradossi c'erano state le polemiche riguardanti l'assioma della scelta. Esso era stato introdotto da Ernst Zermelo nel 1904 per dimostrare, come voleva Cantor, che ogni insieme può essere “bene ordinato”, ovvero che è possibile contarlo con un numero transfinito. I critici della teoria di Cantor si scagliarono con altrettanta veemenza contro l'assioma di Zermelo:



Émile Borel
1871-1956

“ogni argomento in cui si suppone di compiere delle scelte arbitrarie un'infinità non numerabile di volte ... è estraneo al dominio della matematica.”

Borel, 1905

Anche Lebesgue aveva i suoi dubbi:



Henri Lebesgue
1875-1941

“Si può dimostrare l'esistenza di un ente matematico senza definirlo?”

CORSA AI RIPARI

Nel cercare di rintuzzare le critiche, Zermelo rifondò la teoria degli insiemi su base assiomatica con l'intento salvare ciò che c'era di buono della teoria di Cantor escludendo al tempo stesso le antinomie.



Ernst Zermelo
1871-1953

“Al momento l’esistenza di questa disciplina sembra minacciata da alcune contraddizioni o antinomie.”

“La definizione originaria di Cantor di insieme (1895) come ‘collezione, raccolta in un tutto, di certi oggetti ben distinti della nostra percezione o pensiero’ richiede quindi certamente qualche restrizione.”

“Dobbiamo, da un parte, restringere i principî in misura sufficiente ad escludere tutte le contraddizioni e, dall’altra, assumerli in forma sufficientemente ampia da manternere tutto ciò che è di valore in questa teoria.”

Ernst Zermelo, Investigations in the foundations of set theory I, 1908

5 Hilbert

SITUAZIONE GRAVE

Ma le grida dei critici non si tacevano e lo stesso Hilbert, che pure era in prima linea nel difendere l’infinito cantoriano, doveva riconoscere che la situazione era

“così grave che indusse matematici assai autorevoli, ad es. Kronecker e Poincaré, a negare il diritto di esistenza all’intera teoria degli insiemi, ad una delle branche più feconde e più potenti della matematica.”

Hilbert, Pensiero Assiomatico, 1917

CHE FARE?

Nella mente di Hilbert cominciò a delinearsi un piano. Innanzitutto bisognava riconoscere che, nonostante Zermelo fosse momentaneamente riuscito ad allontanare i paradossi,



David Hilbert
1862-1943

“non basta evitare le contraddizioni presenti, se deve essere ristabilita la reputazione, da esse messa in pericolo, della matematica come modello della scienza più rigorosa.”

Hilbert, Pensiero Assiomatico, 1917

e che dunque per poter utilizzare in tutta tranquillità l’infinito cantoriano occorreva dimostrare la coerenza degli assiomi di Zermelo. Se otteniamo questa

dimostrazione

“avremo stabilito che gli enunciati matematici sono realmente verità incontestabili e definitive.”

Hilbert, Nuova fondazione della matematica, 1922

LEZIONI DAL PASSATO?

In passato si era ben saputo affrontare simili situazioni:

“nei *fondamenti della geometria* io ho dimostrato la non contraddittorietà degli assiomi ivi fissati, facendo vedere che ogni contraddizione presente fra le conseguenze degli assiomi geometrici sarebbe necessariamente riconoscibile anche nell'aritmetica dei numeri reali.”

Hilbert, Pensiero Assiomatico, 1918

“Anche la questione della non-contraddittorietà del sistema di assiomi per i *numeri reali* può venir ricondotta, mediante l'uso di concetti insiemistici, all'analoga questione per i numeri naturali: è questo il merito delle teorie degli irrazionali di Weierstrass e Dedekind.”

ibid.

QUESTO LASCIAVA BEN SPERARE. PERÒ ...

“Solo in due casi, cioè quando si ha a che fare con gli assiomi dei numeri interi e quando si ha a che fare con la fondazione della teoria degli insiemi, è chiaro che non è praticabile questa via di riconduzione ad un altro più particolare campo conoscitivo, poiché oltre alla logica non c'è proprio più alcuna disciplina alla quale si potrebbe far ricorso.”

ibid.

E DUNQUE?

Come prima cosa occorre riconoscere che la crisi non investiva indistintamente tutta la matematica: vi è una distinzione tra gli enunciati *ideali* della matematica, che menzionano entità astratte e insiemi infiniti, e i suoi enunciati *reali*, che parlando di oggetti finiti sono dotati di un significato immediato.

Tra gli oggetti finiti Hilbert annovera in primo luogo i numeri naturali, che per lui sono semplicemente i segni I, II, III, IIII, ...

“per me - in netta contrapposizione a Frege e a Dedekind - gli oggetti della teoria dei numeri sono proprio i segni.”

Hilbert, Nuova fondazione della matematica, 1922

Si trattava di un completo capovolgimento rispetto a Frege, che aveva invece definito i numeri naturali in termini di concetti astratti, incappando però nel paradosso di Russell. Anche l'approccio di Dedekind era da scartare per analoghe ragioni:

“Per quanto brillante e affascinante apparisse l’idea di Dedekind di fondare sull’infinito il numero finito, l’impraticabilità di questa via è oggi fuori di dubbio.”

Hilbert, Nuova fondazione della matematica, 1922

Bisognava fare esattamente l’opposto, ovvero fondare la matematica ideale su quella finitaria. Hilbert intravedeva la possibilità di questa riduzione nel fatto che le dimostrazioni della matematica ideale, una volta espresse in segni, sono pur sempre oggetti finiti. Dunque, per uscire dalla crisi

“dobbiamo fare del concetto stesso di dimostrazione specificamente matematica un oggetto di indagine.”

Hilbert, Pensiero Assiomatico, 1918

FORMALIZZAZIONE

Per far ciò era innanzitutto necessario tradurre tutta la matematica in segni, essendo questi, come i numeri naturali, passibili di essere studiati matematicamente con mezzi finitari.

“Tutte le proposizioni che costituiscono la matematica sono convertite in formule, così che la matematica vera e propria diventa un inventario di formule. Queste differiscono dalle usuali formule della matematica solo per il fatto che, oltre agli usuali segni, vi occorrono anche i segni logici $\rightarrow, \&, \vee, -, (x), (Ex)$ ”

Hilbert, I fondamenti della matematica, 1928

Si trattava in sostanza della vecchia idea di Leibniz di una lingua universale, ripresa anche da Peano con la sua idea del formulario:



Giuseppe Peano
1858-1932

“Si vuole studiare un argomento qualunque? Si apra il formulario al posto opportuno; vi si possono ordinare gli argomenti secondo i segni che li compongono, così come si ordinano le parole in un dizionario secondo le lettere che le costituiscono.”

Peano, Introduction au tome II du “Formulaire de Mathématiques”, 1896

Come contributo al formulario mi sono divertito a scrivere l’enunciato “la radice di due è irrazionale”, usando, oltre alle variabili e alla versione aggiornata dei segni logici $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$, esclusivamente il simbolo di appartenenza $\in$ della teoria degli insiemi. Ecco cosa è venuto fuori:

$$\begin{aligned} & \forall A \forall B (\forall F (A \in F \wedge \forall b ((b \in F \wedge \exists w (w \in b)) \rightarrow \exists c (\exists z (\forall y (y \in b \leftrightarrow (y \in c \vee y = z))) \wedge c \in F)) \rightarrow \exists d (d \in F \wedge \forall s (s \notin d))) \wedge \exists w (w \in A) \rightarrow (\forall A' \forall B' (\forall w (w \in A' \leftrightarrow \exists l \exists j (\forall m (m \in w \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow t = l) \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = l \vee t = j)) \wedge l \in A \wedge j \in A)) \wedge \forall w (w \in B' \leftrightarrow \exists l \exists j (\forall m (m \in w \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow t = l) \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = l \vee t = j)) \wedge l \in B \wedge j \in B)) \rightarrow \forall R \forall S (\neg \exists e (e \in R \wedge e \in S) \wedge \exists f (\forall u (u \in f \rightarrow (\exists a \exists b (\forall m (m \in u \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow t = a) \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = a \vee t = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b))) \wedge \forall a, b (\forall m (m \in u \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow t = a) \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = a \vee t = b)) \rightarrow \\
& a \in R \wedge b \in B')) \wedge \forall x \forall x' \forall y \forall z \forall z' ((z \in f \wedge z' \in f \wedge \forall m (m \in z \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow \\
& t = y) \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = y \vee t = x)) \wedge \forall m (m \in z' \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow t = y) \vee \forall t (t \in \\
& m \leftrightarrow t = y \vee t = x')) \rightarrow z = z') \wedge \forall y (y \in B' \rightarrow (\exists x \exists z (z \in f \wedge \forall m (m \in z \leftrightarrow \\
& \forall t (t \in m \leftrightarrow t = x) \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = x \vee t = y)))) \wedge \forall x \forall x' \forall y \forall z \forall z' ((z \in f \wedge z' \in \\
& f \wedge \forall m (m \in z \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow t = x) \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = x \vee t = y)) \wedge \forall m (m \in \\
& z' \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow t = x') \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = x' \vee t = y))) \rightarrow z = z')) \wedge \exists f (\forall u (u \in \\
& f \rightarrow (\exists a \exists b (\forall m (m \in u \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow t = a) \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = a \vee t = b))) \wedge \\
& \forall a, b (\forall m (m \in u \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow t = a) \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = a \vee t = b)) \rightarrow a \in S \wedge b \in \\
& B')) \wedge \forall x \forall x' \forall y \forall z \forall z' ((z \in f \wedge z' \in f \wedge \forall m (m \in z \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow t = y) \vee \forall t (t \in \\
& m \leftrightarrow t = y \vee t = x)) \wedge \forall m (m \in z' \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow t = y) \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = y \vee t = \\
& x')) \rightarrow z = z') \wedge \forall y (y \in B' \rightarrow (\exists x \exists z (z \in f \wedge \forall m (m \in z \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow t = \\
& x) \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = x \vee t = y)))) \wedge \forall x \forall x' \forall y \forall z \forall z' ((z \in f \wedge z' \in f \wedge \forall m (m \in z \leftrightarrow \\
& \forall t (t \in m \leftrightarrow t = x) \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = x \vee t = y)) \wedge \forall m (m \in z' \leftrightarrow \forall t (t \in m \leftrightarrow t = \\
& x') \vee \forall t (t \in m \leftrightarrow t = x' \vee t = y))) \rightarrow z = z')) \rightarrow \neg \forall r (r \in A' \leftrightarrow r \in R \vee r \in S)))
\end{aligned}$$

$\sqrt{2}$ è irrazionale.

Si tratta indubbiamente di una configurazione finita di simboli, che non ha certo nulla dell'infinità delle cifre della radice di due.

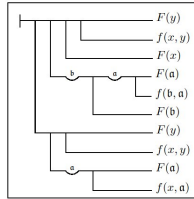
DIMOSTRAZIONI FORMALI

Una volta formalizzati gli enunciati, occorre formalizzare anche le dimostrazioni:

“anche le consuete argomentazioni contenutistiche della teoria matematica devono venire rimpiazzate da formule e regole.”

Hilbert, Nuova fondazione della matematica, 1922

Affinché le dimostrazioni della matematica ideale possano essere studiate con mezzi *finitari*, le regole in questione devono prescindere completamente dal significato (astratto) attribuibile ai simboli, così come negli scacchi le regole per muovere il re non richiedono di conoscere il significato “regale” del pezzo.



Che fosse possibile formalizzare in tal guisa le regole lo aveva già scoperto Frege con la sua “ideografia” bidimensionale, spingendosi oltre i limiti del sillogismo aristotelico.

Frege, Begriffsschrift, 1879

METAMATEMATICA

Fin qui il programma di Hilbert è dunque perfettamente realizzabile. Le dimostrazioni della matematica ideale diventano un gioco di segni che può essere studiato con mezzi finitari da una nuova branca della matematica:

“alla matematica vera e propria si aggiunge una matematica in certo senso nuova, una *metamatematica*, che serve per dare sicurezza a quella proteggendola

sia dal terrore di divieti non necessari che dal travaglio dei paradossi.”

Hilbert, Nuova fondazione della matematica, 1922

Se da un lato le dimostrazioni della matematica ideale vengono formalizzate, dall'altro, nell'interpretazione dei risultati e nello studio della metamatematica, si deve continuare ad usare il ragionamento contenutistico:

“In questa metamatematica, contrariamente ai mezzi puramente formali delle inferenze della matematica vera e propria, viene usato il ragionamento contenutistico, e precisamente per la dimostrazione della non-contraddittorietà degli assiomi.”

Hilbert, Nuova fondazione della matematica, 1922

Con la sua metamatematica, Hilbert si propone di dimostrare contenutisticamente la coerenza degli assiomi di Zermelo. Naturalmente

“la coerenza va intesa nel senso formale (hilbertiano), ovvero come proprietà puramente combinatoria di certi sistemi di segni e delle “regole del gioco” che li governano.”

Gödel, Diskussion zur Grundlegung der Mathematik, 1931

RITORNO A KANT

Precondizione del programma hilbertiano è che esista una matematica finitaria in cui sia possibile dare dimostrazioni contenutistiche di enunciati reali riguardanti oggetti finiti (*in primis*, la coerenza formale della teoria di Zermelo). Questo comporta un ritorno all'intuizione nel senso di Kant.

“Già Kant ci ha insegnato che la matematica dispone di un contenuto assicurato indipendentemente da ogni logica. [...] come prerequisito per l'uso delle inferenze logiche, ci deve essere dato già qualcosa nell'immaginazione: certi oggetti discreti extralogici, che esistono intuitivamente come esperienze immediate prima di ogni pensiero.”

Hilbert, Nuova fondazione della matematica, 1922

Per questo contenuto intuitivo preesistente non si pongono problemi di coerenza:

“In una teoria dei numeri svolta in questo modo non ci sono assiomi e non ci possono essere contraddizioni. Come oggetti abbiamo sempre segni concreti, con essi operiamo e su di essi facciamo enunciati contenutistici.”

Hilbert, Nuova fondazione della matematica, 1922

I QUANTIFICATORI: “TUTTI” ED “ESISTE”

Resta da chiarire fin dove si estendano gli enunciati *reali* della matematica e dove inizino quelli *ideali*, e altresì quali siano i mezzi *finitari* ammissibili nelle dimostrazioni contenutistiche di enunciati reali (quali la coerenza della teoria di Zermelo).

Non basta infatti parlare di oggetti finiti per rimanere nell'ambito della matem-

atica finitaria, ma occorre anche controllare l'uso dei quantificatori. Secondo Hilbert il quantificatore “per ogni” applicato ad un predicato “decidibile” (ovvero un predicato le cui istanze siano risolubili mediante un numero finito di operazioni) non fa uscire dall'ambito degli enunciati reali, mentre il quantificatore “esiste” ne fa in generale uscire.

Ad esempio, mentre un'affermazione esistenziale della forma “esiste un numero pari che non è somma di due primi” è un enunciato ideale in quanto equivale ad una disgiunzione infinita di casi, un'affermazione universale della forma “ogni numero pari è somma di due primi” (congettura di Goldbach) è invece un enunciato reale in quanto è interpretabile, oltre che idealmente come congiunzione infinita di casi, anche finitariamente come

“un giudizio ipotetico che asserisce qualcosa per il caso in cui sia dato un segno numerico.”

Hilbert, Sull'infinito, 1926

FALSIFICABILITÀ

La caratteristica degli enunciati reali è che, quando sono falsi, sono falsificabili con l'esibizione di un controesempio seguito da una verifica algoritmica.

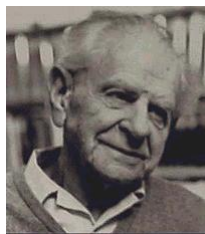
Ad esempio la congettura “tutti i numeri della forma $2^{2^n} + 1$ sono primi”, è stata falsificata da Eulero con il controesempio $n = 5$ seguito dalla verifica $2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417$.

Similmente, l'asserzione che la teoria di Zermelo è formalmente coerente è un enunciato reale, che potrebbe essere falsificato dalla eventuale scoperta di una contraddizione formale.

In presenza di più quantificatori le cose si complicano. La congettura che esistano infiniti numeri primi di Sophie Germain - “per ogni n esiste un numero primo $p > n$ tale che $p + 2$ è anch'esso primo” - non è, *prima facie*, falsificabile allo stesso modo degli enunciati reali, e neppure la sua negazione lo è. Entriamo nell'ambito degli enunciati ideali.

UNA BASE EMPIRICA PER LA MATEMATICA?

C'è un notevole parallelismo tra gli enunciati reali della matematica, nell'accezione di Hilbert, e gli enunciati empirici secondo la definizione datane da Popper:



Karl Popper
1902-1994

“Ma io ammetterò certamente come empirico, o scientifico, soltanto un sistema che possa essere *controllato* dall’esperienza. Queste considerazioni suggeriscono che, come criterio di demarcazione, non si deve prendere la verificabilità, ma la falsificabilità di un sistema. [...] Un sistema empirico deve poter essere confutato dall’esperienza.”

Popper, Logica della scoperta scientifica, 1934

Ad esempio l’enunciato “tutti gli extra-terrestri amano la marmellata di mirtilli” è empirico in quanto è possibile specificare quali esperienze, se si verificassero, lo falsificherebbero: basterebbe incontrare un extra-terrestre che non ami la marmellata di mirtilli.

Per contro un’affermazione puramente esistenziale quale “Dio esiste” non è empirica in quanto non è possibile specificare quali esperienze la falsificherebbero (sebbene sia possibile specificare quali esperienze la verificherebbero!).

TERTIUM NON DATUR

La negazione di un enunciato popperianamente empirico non è in generale un enunciato empirico. Analogamente la negazione di un enunciato reale nel senso di Hilbert, non è in generale un enunciato reale:

“la posizione finitaria non è suscettibile di negazione.”

Hilbert, Sull’infinito, 1926

Ciò comporta delle limitazioni all’uso delle leggi logiche di cui possiamo far uso nella metamatematica:

“se restiamo, come noi dobbiamo restare, nell’ambito degli enunciati finitari, vi regnano rapporti logici assai poco dominabili [...]. Comunque, non valgono quelle leggi logiche che gli uomini hanno sempre adoperato da quando hanno cominciato a pensare, e che proprio Aristotele ci ha insegnato.”

ibid.

In particolare nella matematica finitaria non vale il principio del “tertium non datur”. Hilbert faceva qui una concessione, ma limitata alla metamatematica, alla posizione “intuizionista” di Brouwer, nonostante le aspre polemiche che vi erano state tra i due a riguardo.

Avendo chiarito i confini tra la matematica ideale e quella finitaria, Hilbert pensava di poter finalmente procedere senza intoppi a dimostrare con mezzi finitari la coerenza della matematica ideale.

ANCHE SE NON ESISTESSE . . .

Anche se Dio non esistesse - ci insegna Pascal - converrebbe comportarsi come

se ci fosse.

Forte dei primi successi della metamatemática, Hilbert proponeva agli oppositori di Cantor e Zermelo un atteggiamento analogo (seppure per ragioni diverse) verso l'infinito matematico:

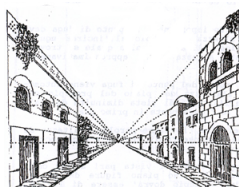
“Nella mia teoria della dimostrazione non viene affermato che può sempre essere compiuto il ritrovamento di un oggetto tra un'infinità di oggetti, ma che tuttavia senza rischi di errore, ci si può comportare sempre *come se* la scelta fosse stata compiuta.”

Hilbert, I fondamenti della matematica, 1923

Una volta dimostrata la non contraddittorietà, il matematico sarebbe stato libero di credere all'esistenza dell'infinito cantoriano, o continuare ad usarlo in tutta tranquillità dandone però un'interpretazione puramente nominalistica.

UTILITÀ PRATICA

Che ci si credesse o meno, per Hilbert l'unica cosa importante era di non bandire l'uso dell'infinito cantoriano nella pratica, in quanto esso era in ogni caso utile come “elemento ideale” al pari dell'unità immaginaria dei numeri complessi o del punto all'infinito della geometria proiettiva:



“introducendo elementi ideali, cioè dei punti all'infinito e una retta all'infinito, possiamo fare in modo che valga in generale il teorema secondo cui due rette si intersecano sempre in uno e un solo punto. Gli elementi ideali all'infinito hanno il vantaggio di rendere il più possibile semplice e chiaro il sistema delle leggi del collegamento.”

Hilbert, Sull'infinito, 1926

RISPOSTA A BROUWER



Luitzen E. J. Brouwer
1881-1966

In modo analogo Hilbert si proponeva di rispondere alle critiche di Brouwer al principio aristotelico del terzo escluso, da questi ritenuto al pari dell'infinito attuale responsabile dei paradossi.

“Ma resta da fare ancora il passo decisivo, cioè quello della dimostrazione dell'applicabilità del principio logico del *tertium non datur*, nel senso che è permesso inferire, anche per infiniti numeri, che un enunciato o vale per tutti questi numeri oppure c'è necessariamente fra di essi un numero per cui l'enunciato non

vale.”

Hilbert, Nuova fondazione della matematica, 1922

Concedendo che a tale principio non si potesse dare una giustificazione contenutistica, e che quindi andasse bandito dalla metamatematica, Hilbert proponeva pragmaticamente di continuare ad usarlo nella matematica, insieme all’infinito cantoriano, dopo aver preso le dovute precauzioni. Farne a meno, come volevano i seguaci della scuola intuizionista di Brouwer, avrebbe complicato le leggi logiche e comportato la rinuncia a molti dei classici risultati dell’analisi.

“Al momento non abbiamo modo di dimostrare il teorema di Bolzano-Weierstrass intuizionisticamente.”

Heyting, Intuitionism, 1956

SOLO IL FUTURO POTRÀ DIRE

Il programma di Hilbert procedeva a pieno ritmo:



John von Neumann
1903-1957

“Il programma di Hilbert ha passato la sua prima prova di forza: la giustificazione, attraverso mezzi finitisti costruttivi, di un sistema matematico non finitario, non puramente costruttivo. Se qualcuno riuscirà ad estendere questa giustificazione al più difficile e più importante sistema della matematica classica è cosa che solo il futuro potrà dire.”

von Neumann, The formalistic foundations of mathematics, 1931

6 Gödel

IL FUTURO LO DISSE MOLTO PRESTO



Kurt Gödel
1906-1978

Proprio avvalendosi della metamatematica di Hilbert, nel 1931 Gödel dimostra che l’affermazione che la teoria di Zermelo-Fraenkel (ZF) sia coerente diventa, tramite la formalizzazione, un enunciato aritmetico indimostrabile in ZF.

Quindi non solo non possiamo dimostrare la coerenza di ZF con mezzi finitari, ma nemmeno con mezzi infinitari se essi sono codificabili in ZF.

Tutto ciò presuppone ovviamente che ZF sia coerente, altrimenti dimostrerebbe qualsiasi cosa, inclusa la sua coerenza.

IRRIDUCIBILITÀ DELL'INFINITO

Dobbiamo quindi rassegnarci ad una teoria dell'infinito non giustificabile su base finitaria. E non possiamo fare a meno di assiomi sempre più forti sull'infinito, anche se siamo interessati solamente alla dimostrazione di enunciati “reali” su oggetti finiti:

“certe proposizioni aritmetiche che sono indecidibili in Z diventano decidibili da assiomi sui cardinali, ad esempio l'assioma che esistono insiemi la cui cardinalità è maggiore di ogni α_n , dove $\alpha_0 = \aleph_0$, $\alpha_{n+1} = 2^{\aleph_n}$.”

Gödel, Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit, 1932

COERENTI MA INAFFIDABILI

Una persona che dica “io sono incoerente”, non è necessariamente incoerente, a meno che non dica al tempo stesso “io sono coerente”.

Analogamente, in base ai teoremi di Gödel, se aggiungessimo a ZF l'assioma “ZF è incoerente”, otterremmo una teoria coerente (ammesso che lo sia ZF), ma su cui ovviamente non potremmo fare affidamento.

“In tal caso, nonostante la coerenza di A, ci sarebbe una proposizione dimostrabile in A della cui falsità potremmo però essere certi in base a considerazioni finitarie.”

Gödel, Diskussion zur Grundlegung der Mathematik, 1931

La coerenza, conclude Gödel, non può essere l'unico criterio di accettabilità di una teoria dell'infinito.

VERI MA INDIMOSTRABILI

Ricordiamo che al V postulato di Euclide, per il fatto di essere indipendente dagli altri assiomi della geometria, è toccato in sorte di essere considerato né vero né falso in senso assoluto, ovvero la sua verità è stata “relativizzata”.

Differente sorte toccherebbe agli enunciati aritmetici “reali” che risultassero indipendenti dagli assiomi di ZF. Tali enunciati, nonostante la loro indimostrabilità, dovrebbero essere riconosciuti come veri in base a considerazioni contenutistiche.

Ad esempio se la congettura di Goldbach fosse indipendente da ZF, essa sarebbe necessariamente vera. Il motivo è che in caso contrario ammetterebbe un controesempio “popperianamente controllabile”, che potrebbe essere facilmente tradotto in una confutazione all'interno della teoria.

Similmente, se ci fidiamo di ZF, dobbiamo ammettere che l'enunciato aritmetico

che ne esprime la coerenza tramite la formalizzazione è contenutisticamente vero, nonostante sia indimostrabile in ZF.

Come spiegare l'asimmetria di trattamento rispetto al V postulato? Ricordiamo le parole di Hilbert: "certi oggetti discreti extralogici esistono intuitivamente come esperienze immediate prima di ogni pensiero."

L'intuizione kantiana dello spazio aveva vacillato, ma non quella dei numeri naturali, almeno a livello dei suoi enunciati reali.

TURING

Ogni sistema coerente è dunque ampliabile con l'aggiunta dell'assioma contenutisticamente vero che ne esprime la coerenza.



Alan M. Turing
1912-1954

"Il ben noto teorema di Gödel mostra che ogni sistema logico è in un certo senso incompleto, ma al tempo stesso fornisce dei mezzi tramite i quali a partire da un sistema logico L si può ottenere un sistema più completo L' . Ripetendo il processo otteniamo una successione $L, L_1, L_2, \dots$ ciascuno più completo del precedente."

Turing, Systems of logic based on ordinals, 1939

EMIL L. POST, 1944

"è inevitabile la conclusione che anche per tale corpo fisso e ben definito di proposizioni matematiche, il pensiero matematico è e deve rimanere essenzialmente creativo. Secondo l'autore questa conclusione deve risolversi inevitabilmente in un rovesciamento almeno parziale dell'intera corrente assiomatica della fine del secolo XIX e dell'inizio del XX, con un ritorno al significato e alla verità in quanto appartengono all'essenza della matematica."

Post, Insiemi ricorsivamente enumerabili di interi positivi e loro problemi di decisione, 1944

7 Conclusioni

SORPRESE DAL FUTURO?

Non è dato sapere cosa ci riserverà il futuro. Potrebbe capitare che la congettura dell'esistenza di infiniti numeri primi di Sophie Germain sopra menzionata si dimostri indipendente da ZF. Poiché, come abbiamo osservato, la congettura coinvolge quantificatori sia universali che esistenziali, essa non è falsificabile in

senso popperiano, e neppure la sua negazione lo è. Dobbiamo in tale eventualità aspettarci che l'intuizione kantiana dei numeri naturali possa vacillare? Ovvero che la verità della congettura possa essere relativizzata come nel caso del V postulato di Euclide? Forse sì o forse no, ma sicuramente si aprirebbe un dibattito. Anche il problema " $P \neq NP$?" (una famosa congettura nell'ambito della complessità computazionale), ha una struttura di quantificatori analoga a quella della congettura dei primi di Sophie Germaine, e potrebbe toccargli analoga sorte.

SIGNIFICATO E TRADUZIONE

Mi sembra in ogni caso di poter condividere almeno in questo l'opinione di Emil Post: sarà sempre il significato a rimanere al centro dell'attenzione del matematico. E il significato di un enunciato matematico non si può esaurire nel fatto che esso sia dimostrabile in una certa teoria. Il fatto che il formulone che ho scritto come contributo al formulario di Peano sia dimostrabile in ZF non avrebbe alcun interesse, se non sapessimo che esso può essere interpretato come l'irrazionalità della radice di 2.

Già che ci siamo, vi svelo come ho ottenuto la formula. Essa esprime il fatto che un insieme finito della forma $A \times A$ (prodotto cartesiano), non può essere spezzato in due parti ciascuna delle quali è in corrispondenza biunivoca con un insieme della forma $B \times B$. Chi conosca il significato delle cose, non avrà difficoltà a riconoscere una corretta traduzione in termini insiemistici dell'irrazionalità della radice di due.

Formalizzare significa tradurre, e tradurre è sempre un pò tradire. Cosa si debba intendere per traduzione corretta, è cosa che nessuno è mai riuscito a spiegare in termini formali. Il teorema stesso di Gödel, cioè il fatto che ZF non dimostra la propria coerenza, richiede sottili precisazioni, in quanto presuppone una traduzione "corretta" dell'enunciato di coerenza nel linguaggio di ZF.

ESTRARRE SIGNIFICATI

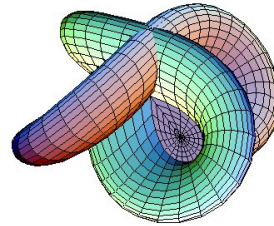
101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

Spirale di Ulam

Se vi avessi detto che la formula per l'irrazionalità della radice è un teorema di ZF, senza svelarne il significato, il semplice fatto di provare ad estrarne un significato avrebbe costituito una genuina attività matematica, analoga per certi versi a quella di chi si ingegna a scovare le regolarità che si celano dietro la distribuzione dei numeri primi. Il matematico, prima ancora di dimostrazioni, cerca significati.

DIMOSTRAZIONI VISIVE

Ho visto recentemente un filmato che dimostra, visivamente, che la sfera è “rovesciabile” nello spazio tridimensionale senza creare singolarità, ma consentendo autointersezioni (Teorema di Stephen Smale, 1958)



Superficie di Morin

In modo analogo a quanto fatto per la radice di 2, potrei con qualche sforzo produrre una gigantesca formula che traduce in termini insiemistici l'enunciato che afferma la possibilità di rovesciare la sfera. Potrei poi predirne - accettando scommesse - la dimostrabilità formale in ZF, pur senza aver intrapreso l'immane compito di verificarla. Posto che la mia previsione risultasse corretta, come si spiegherebbe la sua correttezza? Evidentemente essa si basa sulla mia percezione del significato geometrico della formula, sulla evidenza ricavata dalla visione del filmato, e sulla mia percezione della correttezza della traduzione insiemistica. È possibile, alla luce di simili esempi, sostenere che il significato di un teorema si esaurisca in ultima analisi nella sua dimostrabilità in qualche sistema formale? O che la matematica non abbia contenuti extra-logici? O che sia una semplice convenzione?