April 16, 2014

(X, G)-VARIETÀ

1. Introduzione

In questa nota vogliamo formalizzare l'idea che una varietà liscia M può essere (a volte) munita di una struttura geometrica (in senso lato) che sia "localmente isomorfa" al modello basico di quella geometria. Lo faremo richiedendo che M sia munita di un atlante speciale a valori nel modello. Ci limiteremo al solito alla descrizione delle definizioni e costruzioni principali. Per maggiori approfondimenti si può consultare il libro [W.P. Thurston, Three-Dimensional Geometry and Topology, Vol. 1], il libro [R. Benedetti, C.Petronio, Lectures on hyperbolic geometry] e anche le note sulla geometria iperbolica reperibili nella homepage di B. Martelli presso il Dipartimento di Matematica.

2. Modelli

Un modello è costituito da una coppia (X, G) dove X è una n-varietà liscia connessa e semplicemente connessa, G è un sottogruppo del gruppo degli automorfismi differenziabili di X. Spesso X sarà orientata e allora possiamo lavorare anche con (X, G^+) dove G^+ indica il sottogruppo di G formato dai diffeomorfismi che preservano l'orientazione. Per semplicità richiediamo anche che X è una varietà analitica e G un gruppo di trasformazioni analitiche. In tal caso G verifica la *proprietà della continuazione analitica*, cioè se due elementi $g, g' \in G$ coincidono su un aperto connesso di X allora sono uguali su tutto X. Modelli interessanti sono per esempio:

- $(X, G) = (\mathbb{R}^n, \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n))$, questo è il modello della geometria euclidea. Sappiamo che $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n))$ è il prodotto semidiretto $\mathbb{R}^n \rtimes O(n, \mathbb{R})$ sottogruppo del gruppo $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) := \mathbb{R}^n \rtimes GL(n, \mathbb{R})$ delle trasformazioni affini di $\mathbb{R}^n$.
- $(X, G) = (M^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} \rtimes O(n, 1, \mathbb{R}))$ cioè lo spazio di Minkowski su cui agisce il gruppo di Poincaré. Anche in questo caso G è un sottogruppo delle trasformazioni affini di $\mathbb{R}^{n+1}$. Questo è il modello della geometria Lorentziana "piatta".
- $(X, G) = (\mathbb{R}^n, \mathrm{Aff}(R^n))$. Questo è il modello della geometria affine.
- $(X, G) = (\mathbb{H}^2, \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2))$. Questo è il modello della geometria iperbolica piana. Lavorando per esempio nel modello del semipiano π^+, abbiamo realizzato che in questo caso G^+ è isomorfo a $PSL(2, \mathbb{R})$ e agisce sul semipiano considerato come un aperto nella sfera di Riemann
$$S^2 = P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$
come restrizioni di omografie, cioè di trasformazioni proiettive della retta proiettiva complessa. In effetti il gruppo delle trasformazioni proiettive di $S^2 = P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è $PSL(2, \mathbb{C})$, $PSL(2, \mathbb{R})$ è il sottogruppo delle traformazioni per le quali il semipiano è invariante.
- $(X, G) = (\mathbb{H}^n, \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n))$, cioè i modelli della geometria iperbolica in dimensione arbitraria.
- $(X, G) = (P^1(\mathbb{C}), PSL(2, \mathbb{C}))$.

Si noti che solo in alcuni casi G è anche un gruppo di isometrie per una determinata metrica Riemanniana completa su X. In questi casi diremo che si tratta di un *modello metrico*.

3. (X, G)-varietà

Fissato un modello (X, G), una n-varietà connessa M è una (X, G)-varietà se ammette un (X, G)-*atlante* $\{(U, \phi_U)\}$, dove:

(1) Gli U formano una famiglia $\mathcal{F}$ di aperti di M che ricopre M. Se $U \in \mathcal{F}$ e U' è un aperto di M contenuto in U allora anche $U' \in \mathcal{F}$.
(2) Per ogni U, $\phi_U : U \to W \subset X$ è un diffeomorfismo a valori in un aperto di X. Se $U' \subset U$ come sopra, allora anche $(U', \phi_U | U')$ appartiene all'atlante.
(3) Se $U \cap U' \neq \emptyset$ allora per ogni componente connessa U_0 dell'intersezione, la restrizione di $\phi_{U'} \circ \phi_U^{-1}$ a $\phi_U(U_0)$ è uguale alla restrizione di un elemento $g \in G$, necessariamente unico per la proprietà della continuazione analitica.

Naturalmente X è una (X, G) varietà dove possiamo prendere l'atlante formato da tutti gli aperti di X muniti dell'inclusione in X. Date due (X, G)-varietà M e N, un (X, G)-*morfismo* è una applicazione differenziabile $f : M \to N$ tale che per ogni (U, ϕ_U) dell'atlante di M, U connesso tale che $f(U) \subset U'$ dove $(U', \psi_{U'})$ appartiene all'atlante di N, esiste $g \in G$ tale che la restrizione a $\phi_U(U)$ di $\phi_{U'} \circ \phi_U^{-1}$ coincide con la restrizione di g. Un (X, G)-*isomorfismo* è un (X, G)-*morfismo* che ammette un (X, G)-inverso. Si nota che per definizione ogni (X, G)-*morfismo* è *localmente* un (X, G)-*isomorfismo.*

4. Applicazioni sviluppanti e olonomia

Siano M una (X, G)-varietà e $p : \tilde{M} \to M$ un rivestimento universale (di punto base x_0 sottointeso); allora si può sollevare in modo canonico la (X, G)-struttura su $\tilde{M}$ in modo tale che p diventa un (X, G)-morfismo. Inoltre $\mathrm{Aut}(\tilde{M}, p) \simeq \pi_1(M)$ diventa un gruppo di (X, G)-automorfismi.

Per definizione un'*applicazione sviluppante* è un (X, G)-morfismo $D : \tilde{M} \to X$. Vale

Proposizione 4.1. *Per ogni elemento (U_0, ϕ_0) di un (X, G)-atlante di $\tilde{M}$, con U_0 connesso, esiste un' unica applicazione sviluppante $D : \tilde{M} \to X$ tale che $D|U_0 = \phi_0$.*

Dim. (Cenni) L'unicità segue dalla proprietà della continuazione analitica. Per l'esistenza si applica il metodo della continuazione analitica lungo i cammini. Sia $y_0 \in U_0$; per ogni $y \in \tilde{M}$ si fissi un arco γ che connette y_0 con y. Per semplicità supponiamo che γ sia iniettivo così che possiamo confondere γ con la sua immagine in $\tilde{M}$. Ricopriamo γ con una catena di (X, G)-carte connesse (U_j, ϕ_j) $j = 0, \ldots, k$, con intersezioni connesse, in modo tale che $y \in U_k$, $U_j \cap \gamma$ è un sottointervallo γ_j di γ, $\gamma_j \cap \gamma_{j+1}$ è un altro sottointervallo. Allora definiamo induttivamente $D|\gamma_j = (g_j \ldots g_1)^{-1}\phi_j|\gamma_j$, dove $g_i \in G$ corrisponde all'unica estensione di $\phi_i \circ \phi_{i-1}^{-1}$. In questo modo si definisce una funzione continua su γ e possiamo definire in particolare $D(y)$. Si dimostra che fissato γ il risultato non dipende dalla scelta della catena di carte e che non dipende dalla scelta del cammino γ (qui si usa che $\tilde{M}$ è semplicemente connesso).

□

Lemma 4.2. *Se D e D' sono due applicazioni sviluppanti, allora esiste $g \in G$ tale che $D = g \circ D'$.*

Infatti possiamo prendere un aperto connesso abbastanza piccolo U tale che la restrizione a U di entrambe le sviluppanti sia una (X, G)-carta di $\tilde{M}$. Allora esiste $g \in G$ tale che $D|U = g \circ D|U'$. Per la proprietà della continuazione analitica questo vale su tutto $\tilde{M}$.

□

Fissata una sviluppante D, per ogni $f \in \mathrm{Aut}(\tilde{M}, p)$, $D \circ f$ è un'altra sviluppante. Allora esiste $h_D(f) \in G$ tale che per ogni $y \in \tilde{M}$ (equivarianza):

$$D(f(y)) = h_D(f)(D(y)) \ .$$

Si verifica facilmente che

$$h_D : \mathrm{Aut}(\tilde{M}, p) \to G$$

è un omomorfismo detto l'*olonomia* relativa alla sviluppante D. Se $D = g \circ D'$, allora

$$h_{D'} = g h_D g^{-1}$$

cioè le olonomie relative a due applicazioni sviluppanti sono *rappresentazioni coniugate* di $\mathrm{Aut}(\tilde{M}, p) \simeq \pi_1(M)$ nel gruppo di struttura G del modello. Quindi la classe di coniugazione $[h_D]$ è un invariante (detto l'olonomia) della (X, G)-varietà M.

5. Completezza

Per definizione una (X, G)-varietà M è detta *completa* se le applicazioni sviluppanti sono (X, G)-isomorfismi. Fissata una tale sviluppante $D : \tilde{M} \to X$, risulta che:

(1) L'olonomia h_D è iniettiva con immagine un sottogruppo Γ di G.
(2) Il quoziente X/Γ è una (X, G)-varietà che ha come rivestimento universale la proiezione
$$\pi : X \to X/\Gamma \ .$$
(3) Esiste un (X, G)-isomorfismo naturale $d : M \to X/\Gamma$ tale che $d \circ p = \pi \circ D$.

5.1. (X, G)**-completezza e completezza metrica.** Supponiamo che il modello (X, G) sia metrico, cioè G è un gruppo di isometrie per una determinata metrica Riemanniana ds^2 su X completa (questo significa che la distanza indotta dalla metrica su X è completa e questo è equivalente al fatto che la metrica ds^2 è geodeticamente completa). Data una (X, G)-varietà M, ds^2 si trasporta su M e $\tilde{M}$ in modo che $D : \tilde{M} \to X$ e $p : \tilde{M} \to M$ sono localmente delle isometrie. Poiché ogni successione di Cauchy è definitivamente in una palla di raggio arbitrariamente piccolo, segue che M è metricamente completo se e solo se $\tilde{M}$ lo è. Risulta che in questo caso le due nozioni di completezza coincidono.

Proposizione 5.1. *M è (X, G)-completa se e solo se è metricamente completa.*

Dim. (Cenni) Una implicazione è evidente. Infatti se D è un (X, G)-isomorfismo allora è una isometria e quindi $\tilde{M}$ è metricamente completo perché X lo è per ipotesi. Per dimostrare l'altra implicazione basta verificare (perché ?) che D verifica la seguente proprietà di sollevamento unico dei cammini:

Per ogni $y \in \tilde{M}$, per ogni cammino γ in X tale che $\gamma(0) = D(y)$, esiste un unico cammino $\tilde{\gamma}$ in $\tilde{M}$ tale che $\tilde{\gamma}(0) = y$, $D \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Per verificare questa proprietà, si osserva che poiché D è un isomorfismo locale esiste $t_0 > 0$ in I tale che il sollevamento unico di γ esite sull'intervallo $[0, t_0] \subset I$. Posto $\bar{t}$ l'estremo superiore di tali t_0, basta dimostrare che in effetti è un massimo. Ne segue infatti che allora $\bar{t} = 1$, perché se fosse < 1, ancora usando il fatto che D è un isomorfismo locale, potremmo prolungare il sollevamento ancora un po' contro la definizione stessa di $\bar{t}$. E' un massimo perché se t_n è una successione crescente tale che $t_n \to \bar{t}$, allora $\tilde{\gamma}(t_n)$ è una successione di Chauchy in $\tilde{M}$, quindi converge ad un valore s (perché $\tilde{M}$ è completo) e possiamo porre $\tilde{\gamma}(\bar{t}) = s$. Si tratta di una successione di Cauchy perché se non lo fosse $\tilde{\gamma}$ avrebbe lunghezza infinita, ma questo è assurdo perché, essendo D una isometria locale, la sua lunghezza è minorata dalla lunghezza di γ che è finita.

$\square$

In particolare se M è compatta e (X, G) è metrico, allora M è una (X, G)-varietà completa, dunque è il quoziente $M = X/\Gamma$, dove Γ è un sottogruppo di G. Per esempio questo vale se S è una superficie iperbolica (cioè munita di una $(\mathbb{H}^2, \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2))$ compatta.