

COGNOME NOME
MATRICOLA VALUTAZIONE + =

1. ISTRUZIONI

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; solo questo sarà ritirato e valutato. I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. PRIMA PARTE

Esercizio 0. (punti 0) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (punti 3) Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Studiare il comportamento per $n \rightarrow +\infty$ della successione $b_n = (-1)^n + a_n$

SOLUZIONE

Esercizio 2. (punti 3) Determinare, se esiste, il minimo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \bar{n}$, $2^n > n^2$.

SOLUZIONE

Esercizio 3. (punti 4) Determinare l'estremo superiore e inferiore, precisando se sono massimo e minimo, dell'insieme $X = \left\{ \frac{t}{t^2 + 1} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

SOLUZIONE

3. SECONDA PARTE

Esercizio 1. (punti 6)

- Si determini il più grande sottoinsieme $C \subset \mathbb{R}$ tale che la formula

$$f(x) = \max(\log(1+x), \log(1-x))$$

definisca una funzione continua $f : C \rightarrow \mathbb{R}$

- Si determini il più grande sottoinsieme $D \subset C$ dove questa formula definisce una funzione derivabile.
- Descrivere gli eventuali punti di massimo o minimo locali e assoluti della funzione $f(x)$.
- Dire se il grafico della funzione $f(x)$ ammette asintoti.

SOLUZIONE

Esercizio 2. (punti 6)

Sia f una funzione derivabile su \mathbb{R} tale che $f(0) = 0$, $|f| < 1$ e $f'(x) > 0$.
Dimostrare che esiste ed è finito il limite per $n \rightarrow \infty$ della successione

$$a_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

SOLUZIONE

Esercizio 3. (punti 6) Determinare i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che verificano

$$\begin{cases} (1+z)^3 = 1 \\ z + \bar{z} + 2 < 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Esercizio 4. (punti 6) Determinare se esistono soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y'' - y = 0$$

che siano contemporaneamente localmente crescenti in un intorno di $x = 0$ e localmente decrescenti in un intorno di $x = \frac{\pi}{2}$.

SOLUZIONE