Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 4 (1972), 161-192.

(8)

RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION PARABOLIQUE NON LINÉAIRE AVEC DES CONTRAINTES UNILATÉRALES SUR LA FRONTIÈRE

par Hugo BEIRÃO DA VEIGA et João-Paulo DIAS (1).

0. Position du problème.

Dans la suite on désignera par Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbf{R}^N$ de frontière Γ, variété de dimension $N-1$ et de classe C^1 (2), Ω étant localement situé d'un seul côté de Γ.

On notera par Λ_t le cylindre $\Omega \times]0, t[$, avec

$$0 < t \leqslant T < +\infty.$$

En particulier, on pose $\Lambda = \Lambda_T$.

Le point générique de Ω sera noté $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Avec (x, t) on désignera le point générique de Λ.

Ceci étant, soit (3)

$$H^1(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) | D_i\varphi \in L^2(\Omega),\ i = 1, \ldots, N\},$$

où $D_i\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ au sens des distributions.

Avec

$$\nabla\varphi = (D_1\varphi, \ldots, D_N\varphi), \quad \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \|D_i\varphi\|^2_{L^2(\Omega)},$$

(1) Chercheurs du « Instituto de Física e Matemática » (Lisbonne).
(2) On peut affaiblir cette condition.
(3) On ne considère que des fonctions réelles.

la norme usuelle de $H^1(\Omega)$ est donnée par

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Avec $\mathbb{K}$ on désigne le convexe fermé de $H^1(\Omega)$ défini par

$$(0.1) \qquad \mathbb{K} = \{u \in H^1(\Omega) | u \geqslant 0 \text{ (4) sur } \Gamma\}$$

L'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ et l'espace des fonctions hölderiennes d'exposant $\alpha \in]0, 1]$ seront désignés respectivement par $C^0(\overline{\Omega})$ et $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Si $v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ on pose

$$[v]_{\alpha,\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Si on se donne $s \in [1, +\infty[$ et un espace de Banach X on note avec $L^s(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions $t \to v(t)$ fortement mesurables de $]0, T[$ à valeurs dans X telles que

$$\|v\|_{L^s(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|^s_X \, dt\right)^{1/s} < +\infty$$

Si $s = +\infty$ on donne la définition correspondante habituelle.

En particulier, si $X = L^p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, alors l'espace $L^s(0, T; L^p(\Omega))$ s'identifie avec l'espace $L^{p,s}(\Lambda)$ des fonctions $v(x, t)$ réelles et mesurables en Λ telles que (en supposant p et s finis, sinon on fait les modifications évidentes)

$$(0.2) \qquad \|v\|_{p,s,\Lambda} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |v(x,t)|^p \, dx\right)^{s/p} dt\right)^{1/s} < +\infty$$

On pose

$$(0.3) \qquad \mathcal{V} = \{v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) | v' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(\Lambda)\}$$

où $v'(t)$ est la dérivée définie par

$$(0.4) \qquad \int_0^T v'(t)\varphi(t) \, dt = -\int_0^T v(t)\varphi'(t) \, dt, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$$

On a $\mathcal{V} \subset C^0([0, T]); L^2(\Omega))$ d'où on peut définir pour $v \in \mathcal{V}$

$$(0.5) \qquad |v|^2_\Lambda = \left(\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Lambda)}$$

(4) Au sens des traces sur Γ.

L'espace $\mathcal{V}$ peut s'identifier avec l'espace de Sobolev $H^1(\Lambda)$.

On donne des définitions analogues dans le cas où l'on remplace Λ par Λ_t. L'espace correspondant à $\mathcal{V}$ sera alors noté $\mathcal{V}_t$.

Finalement on désignera par $C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda})$, $\alpha \in]0, 1]$, l'espace des fonctions réelles $v(x, t)$ définies en $\overline{\Lambda}$, telles qu'il existe une constante c telle que

$$(0.6) \quad |v(x, t) - v(x', t')| \leqslant c(|x - x'|^\alpha + |t - t'|^{\alpha/2}), \quad \forall (x, t), (x', t') \in \overline{\Lambda}.$$

On pose, pour chaque $v \in C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda})$,

$$(0.7) \quad \begin{cases} [v]_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} = \inf c \text{ vérifiant } (0.6) \\ |||v|||_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} = \|v\|_{\infty,\Lambda} + [v]_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} \text{ (}^5\text{)} \end{cases}$$

Ceci étant on se donne p et s, $1 \leqslant p, s \leqslant +\infty$, tels que

$$(0.8) \quad \begin{cases} 0 \leqslant \dfrac{N}{2p} + \dfrac{1}{s} < 1 & \text{si} \quad N \geqslant 2 \\ \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{N}{2p} + \dfrac{1}{s} < 1 & \text{si} \quad N = 1 \end{cases}$$

Définissons χ_0 par l'égalité

$$(0.9) \quad \frac{N}{2p} + \frac{1}{s} = 1 - \chi_0$$

On notera avec p_0 et s_0 deux constantes définies par

$$(0.10) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{p_0} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{\chi_0}{N + 2\chi_0} \cdot \dfrac{1}{p'} \\ \dfrac{1}{s_0} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{\chi_0}{N + 2\chi_0} \cdot \dfrac{1}{s'} \end{cases}$$

où r' est donné par

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1 \quad \text{si} \quad 1 \leqslant r \leqslant +\infty$$

(5) $C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda})$ est un espace de Banach pour la norme $|||\cdot|||_{\alpha,\alpha/2,\Lambda}$.

On se donne aussi des fonctions réelles $B_k(x, t, y, z)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, définies en $\Lambda \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, mesurables en $(x, t) \in \Lambda$ pour tout $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ et continues en $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ pour presque tous les $(x, t) \in \Lambda$. On suppose encore qu'il existe des constantes positives a et $\overline{a}$ et des fonctions b, f, d, m, g, e, h non négatives et mesurables en Λ telles que pour tout $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ et pour presque tout $(x, t) \in \Lambda$ on a $\left(\text{avec } z = (z_1, \ldots, z_N),\ |z|^2 = \sum_{i=1}^N z_i^2\right)$:

$$(0.11)\qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^N B_i(x, t, y, z) . z_i \geqslant a|z|^2 - b(x, t)y^2 - f(x, t) \\ |B_0(x, t, y, z)| \leqslant d(x, t)|z| + m(x, t)|y| + g(x, t) \end{cases}$$

$$(0.12)\qquad |B_i(x, t, y, z)| \leqslant \overline{a}|z| + e(x, t)|y| + h(x, t), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Soit finalement $u(x, t)$ une solution du problème suivant

$$(0.13)\qquad u(x, t) \in \mathcal{V}$$

et de plus

(i) pour presque tout $t \in]0, T[$ on a $u(t) \in \mathbf{K}$ et

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u'(t)(\varphi(x) - u(x, t))\, dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_\Omega B_i(x, t, u, \nabla u) . D_i(\varphi(x) - u(x, t))\, dx \\ &\quad + \int_\Omega B_0(x, t, u, \nabla u) . (\varphi(x) - u(x, t))\, dx \geqslant 0, \qquad \forall \varphi \in \mathbf{K}. \end{aligned}$$

(ii) $u(x, 0) = u_0(x)$, où u_0 est donnée dans $L^2(\Omega)$.

Si l'on pose

$$\psi_{u,B}(x, t) = \sum_{i=1}^N B_i(x, t, u, \nabla u) . \cos(\overline{n}(x), x_i),$$

où $\overline{n}(x)$ est la normale extérieure à Γ au point $x \in \Gamma$ et

$$S = \Gamma \times]0, T[$$

alors on peut vérifier que (0.13) est une formulation faible du problème aux limites avec des contraintes unilatérales sur la frontière défini par

$$u'(x,t) - \sum_{i=1}^{N} D_i B_i(x, t, u, \nabla u) + B_0(x, t, u, \nabla u) = 0 \quad \text{dans } \Lambda$$
$$u(x, t) \geqslant 0, \quad \psi_{u,B}(x, t) \geqslant 0, \quad u(x, t)\,\psi_{u,B}(x, t) = 0 \ \text{ sur S},$$
$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

Nous démontrons dans ce travail les résultats suivants qui ont été annoncés dans [2] avec un aspect un peu simplifié :

THÉORÈME I. — *Supposons que les hypothèses* (0.11) *et* (0.12) *sont vérifiées avec* $b, f, m, d^2, e^2, h^2 \in L^{p,s}(\Lambda)$, $g \in L^{p_0,s_0}(\Lambda)$ *et que* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. *Alors* $u \in L^\infty(\Lambda)$. *De plus, étant donnée une constante* $c \geqslant 0$ *il existe* $\bar{c} = \bar{c}(c, N, \Omega, T, a, p, s) \geqslant 0$ *telle que, si*

$$\max(\|b\|_{p,s,\Lambda}, \|f\|_{p,s,\Lambda}, \|m\|_{p,s,\Lambda}, \|d^2\|_{p,s,\Lambda}, \|g\|_{p_0,s_0,\Lambda}, \|u_0\|_{\infty,\Omega}) \leqslant c$$

alors

$$\|u\|_{\infty,\Lambda} \leqslant \bar{c},$$

THÉORÈME II. — *Supposons que les hypothèses* (0.11) *et* (0.12) *sont vérifiées avec* $b, f, m, g, d^2, e^2, h^2 \in L^{p,s}(\Lambda)$ *et que* $u_0 \in \mathbf{K} \cap C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, $\lambda \in]0, 1]$. *Alors il existe des constantes* $c \geqslant 0$ *et* $\alpha \in]0, \lambda]$, *ne dépendant que de* $N, \Omega, T, a, \bar{a}, p, s$ *et* λ, *telles que* $u \in C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda})$ *et, de plus,*

$$(0.14) \quad |||u|||^2_{\alpha;\alpha/2,\Lambda} \leqslant c\{[u_0]^2_{\lambda;\Omega} + \|f\|_{p,s,\Lambda} + \|h^2\|_{p,s,\Lambda} + \|u\|_{\infty,\Lambda}\|g\|_{p,s,\Lambda} + \|u\|^2_{\infty,\Lambda}(1 + \|b\|_{p,s,\Lambda} + \|m\|_{p,s,\Lambda} + \|d^2\|_{p,s,\Lambda} + \|e^2\|_{p,s,\Lambda})\}$$

Les théorèmes I et II seront démontrés avec la technique des troncatures introduite par E. De Giorgi (cf. [4]).

On utilisera dans ce travail des méthodes analogues aux méthodes décrites par O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov et N. N. Ural'ceva dans [6].

La majoration (0.14) est obtenue avec la technique utilisée dans [1].

Un premier résultat de régularité dans des espaces du type $C^{0,\alpha,\beta}(\overline{\Lambda})$, concernant les équations linéaires paraboliques à coefficients discontinus, a été obtenu par J. Nash (cf. [9]).

Des résultats du même type ont ensuite été étudiés par plusieurs auteurs avec des méthodes diverses.

Le problème unilatéral parabolique étudié dans ce travail a été introduit (avec un opérateur linéaire) par J. L. Lions et G. Stampacchia dans [8] (cf. aussi [7]). Des résultats de régularité hölderienne pour les fonctions $x \to u(x, t)$, définies en $\overline{\Omega}$, se trouvent dans [3] et [5].

Dans un article prochain nous étudierons les propriétés de régularité L^∞ et hölderienne d'une solution plus faible ($u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$) du problème considéré dans ce travail.

1. La régularité L^∞.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème I.

Soit $k \geqslant \|u_0\|_{\infty,\Omega}$ et posons dans l'inéquation (0.13), (i),

$$v = \{u(t)\}^k = \begin{cases} k & \text{si} \quad u \geqslant k \\ u & \text{si} \quad u \leqslant k \end{cases}$$

Intégrons l'inégalité obtenue entre 0 et $t \in]0, T[$.

On obtient

$$(1.1) \quad \int_0^t \int_\Omega u' . (u - \{u\}^k)\, dx\, d\tau + \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_\Omega B_i(x, \tau, u, \nabla u) D_i(u - \{u\}^k)\, dx\, d\tau + \int_0^t \int_\Omega B_0(x, \tau, u, \nabla u)(u - \{u\}^k)\, dx\, d\tau \leqslant 0.$$

D'autre part, puisque $k \geqslant \|u(0)\|_{\infty,\Omega}$, on a

$$(1.2) \quad \int_0^t \int_\Omega u' . (u - \{u\}^k)\, dx\, d\tau = \int_0^t \int_\Omega (u - \{u\}^k)' . (u - \{u\}^k)\, dx\, d\tau = \frac{1}{2} \|u - \{u\}^k\|^2_{2,\Omega}\Big|_0^t = \frac{1}{2} \|(u - \{u\}^k)(t)\|^2_{2,\Omega}.$$

De (1.1) et (1.2) on obtient, avec

$u^{(k)} = u - \{u\}^k$ et $Q_k(t) = \{(x, \tau) \in \Lambda_t | u(x, \tau) > k\}$, et compte tenu de (0.11)

$$\frac{1}{2}\,\|u^{(k)}(t)\|^2_{2,\Omega} + a\int_{Q_k(t)} |\nabla u|^2\,dx\,d\tau \leqslant \cancel{\int_{Q_k(t)} bu^2\,dx\,d\tau}$$
$$+ \cancel{\int_{Q_k(t)} f\,dx\,d\tau + \int_{Q_k(t)} d|\nabla u|u^{(k)}\,dx\,d\tau}$$
$$+ \cancel{\int_{Q_k(t)} m|u|u^{(k)}\,dx\,d\tau}$$
$$+ \int_{Q_k(t)} gu^{(k)}\,dx\,d\tau$$

Ceci entraîne, puisque $|\nabla u|du^{(k)} \leqslant \frac{a}{2}|\nabla u|^2 + \frac{2}{a}d^2(u^{(k)})^2$,

$$(1.3)\quad \frac{1}{2}\,\|u^{(k)}(t)\|^2_{2,\Omega} + \frac{a}{2}\int_{Q_k(t)} |\nabla u|^2\,dx\,d\tau$$
$$\leqslant 2\int_{Q_k(t)} b(u^{(k)})^2\,dx\,d\tau + 2k^2\int_{Q_k(t)} b\,dx\,d\tau$$
$$+ \frac{2}{a}\int_{Q_k(t)} d^2(u^{(k)})^2\,dx\,d\tau$$
$$+ \int_{Q_k(t)} f\,dx\,d\tau + 2\int_{Q_k(t)} m(u^{(k)})^2\,dx\,d\tau$$
$$+ 2k^2\int_{Q_k(t)} m\,dx\,d\tau + \int_{Q_k(t)} gu^{(k)}\,dx\,d\tau.$$

En appliquant cette inégalité à $\tau \in [0, t]$ et compte tenu que le second membre est une fonction croissante de t on obtient aisément

$$(1.4)\quad |u^{(k)}|^2_{\Lambda_t} \equiv \max_{0\leqslant\tau\leqslant t} \|u^{(k)}(\tau)\|^2_{2,\Omega} + \int_{Q_k(t)} |\nabla u|^2\,dx\,d\tau$$
$$\leqslant 4\max(1, a^{-1})\Big[\cancel{\int_{Q_k(t)} \theta(u^{(k)})^2\,dx\,d\tau + k^2\int_{Q_k(t)} \theta_1\,dx\,d\tau}$$
$$+ \int_{Q_k(t)} gu^{(k)}\,dx\,d\tau + \cancel{\int_{Q_k(t)} f\,dx\,d\tau}\Big],$$

$d = b = m = f = 0$

où

$$\theta = 2\Big(b + m + \frac{d^2}{a}\Big), \qquad \theta_1 = 2(b + m)$$

Posons

$$(1.5)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\bar p} = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \dfrac{1}{p}\Big); & \dfrac{1}{\bar s} = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \dfrac{1}{s}\Big) \\ \chi = \dfrac{2\chi_0}{N}, & \chi_0 \text{ étant défini par (0.9)} \\ q = \bar p(1 + \chi); & r = \bar s(1 + \chi) \end{cases}$$

On obtient

$$(1.6)\quad \frac{N}{2q} + \frac{1}{r} = \frac{N}{4}$$

et aussi (remarquons que $0 < \chi_0 \leqslant 1$ si $N \geqslant 2, 0 < \chi_0 \leqslant \frac{1}{2}$ si $N = 1$)

$$(1.7) \quad \begin{cases} q \in \left[2(1+\chi), \dfrac{2(1+\chi)}{1 - \dfrac{2}{N} + \chi}\right], \\ r \in \left[2(1+\chi), \dfrac{4(1+\chi)}{N\chi}\right] & \text{si} \quad N \geqslant 2 \\ q \in [2(1+\chi), \infty], \\ r \in \left[4, \dfrac{4(1+\chi)}{N\chi}\right] & \text{si} \quad N = 1 \end{cases}$$

ce qui implique, en particulier,

$$(1.8) \quad \begin{cases} q \in \left]2, \dfrac{2N}{N-2}\right[, \quad r \in]2, \infty[& \text{si} \quad N \geqslant 2 \\ q \in]2, \infty], \quad r \in [4, \infty[& \text{si} \quad N = 1 \end{cases}$$

Étant donné (1.8) on peut appliquer à $u^{(k)}$ l'inégalité (3.8) du chapitre II de [6]. On a alors

$$(1.9) \quad \|u^{(k)}\|_{q,r,\Lambda_t} \leqslant \beta |u^{(k)}|_{\Lambda_t},$$ pag-77

où

$$\beta = \beta_1(N, \Gamma, r, q) + \sqrt{2}\, T^{1/r} |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}$$

$|\Omega|$ étant la mesure de Ω.

Cela étant, on va majorer les termes du second membre de (1.4) de la manière suivante :

$$\int_{Q_k(t)} \theta (u^{(k)})^2 \, dx \, d\tau \leqslant \|\theta\|_{p,s,\Lambda} \|(u^{(k)})^2\|_{\frac{q}{2}, \frac{r}{2}, Q_k(t)} \|1\|_{\frac{q}{2\chi}, \frac{r}{2\chi}, Q_k(t)}$$

En effet on a

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2\chi}{q} = 1 = \frac{1}{s} + \frac{2}{r} + \frac{2\chi}{r}$$

D'autre part

$$\|(u^{(k)})^2\|_{\frac{q}{2}, \frac{r}{2}, Q_k(t)} = \|u^{(k)}\|^2_{q,r,Q_k(t)} \leqslant \beta^2 |u^{(k)}|^2_{\Lambda_t}$$

$$\|1\|_{\frac{q}{2\chi}, \frac{r}{2\chi}, Q_k(t)} = \|1\|^{2}_{\frac{q}{\chi}, \frac{r}{\chi}, Q_k(t)} \leqslant (t^{1/r} |\Omega|^{1/q})^{2\chi}$$

Donc, on a

$$(1.10)\quad \int_{Q_k(t)} \theta (u^{(k)})^2\, dx\, d\tau \leqslant \|\theta\|_{p,s,\Lambda}\cdot \beta^2 |u^{(k)}|^2_{\Lambda_t}\cdot (t^{1/r}|\Omega|^{1/q})^{2\chi}$$

On a aussi, avec $A_k(\xi) = \{x \in \Omega \mid u(x, \xi) > k\}$,

$$(1.11)\quad k^2 \int_{Q_k(t)} \theta_1\, dx\, d\tau \leqslant k^2 \|\theta_1\|_{p,s,\Lambda}\, \|1\|^2_{\bar p, \bar s, Q_k(t)}$$

$$= k^2 \|\theta_1\|_{p,s,\Lambda} \left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{\bar s/\bar p}\, d\xi\right)^{\frac{2}{\bar s}}$$

$$= k^2 \|\theta_1\|_{p,s,\Lambda} \left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi\right)^{2.\frac{1+\chi}{r}}$$

(avec la convention $0^0 = 0$).

Estimons les deux termes qui manquent. On a

$$(1.12)\quad \int_{Q_k(t)} f\, dx\, d\tau \leqslant \|f\|_{p,s,\Lambda} \|1\|^2_{\bar p, \bar s, Q_k(t)}$$

$$= \|f\|_{p,s,\Lambda} \left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi\right)^{2.\frac{1+\chi}{r}}$$

$$(1.13)\quad \int_{Q_k(t)} g u^{(k)}\, dx\, d\tau \leqslant \|g\|_{p_0, s_0, \Lambda} \|u^{(k)}\|_{q, r, Q_k(t)}\cdot \|1\|_{\bar p, \bar s, Q_k(t)}$$

$$\leqslant \|g\|_{p_0, s_0, \Lambda}\cdot \beta |u^{(k)}|_{\Lambda_t} \left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi\right)^{\frac{1+\chi}{r}}$$

$$\leqslant \frac{1}{16 \max(1, a^{-1})} |u^{(k)}|^2_{\Lambda_t} + 16 \max(1, a^{-1}) \beta^2 \|g\|^2_{p_0, s_0, \Lambda}$$

$$\cdot \left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi\right)^{2.\frac{1+\chi}{r}}$$

Supposons alors

$$(1.14)\quad t \leqslant t_0 \equiv [16 \max(1, a^{-1})]^{-\frac{r}{2\chi}} \beta^{-r/\chi} |\Omega|^{-r/q} \|\theta\|_{p,s,\Lambda}^{-\frac{r}{2\chi}}$$

De (1.10) on en déduit

$$(1.15)\quad \int_{Q_k(t)} \theta (u^{(k)})^2\, dx\, d\tau \leqslant \frac{1}{16 \max(1, a^{-1})} |u^{(k)}|^2_{\Lambda_t}$$

Alors de (1.4), (1.11), (1.12), (1.13) et (1.15) on obtient

$$\frac{1}{2} |u^{(k)}|^2_{\Lambda_t} \leqslant 4 \max(1, a^{-1}) \left[k^2 \|\theta_1\|_{p,s,\Lambda} \left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi\right)^{2.\frac{1+\chi}{r}} \right.$$

$$\left. + (16 \max(1, a^{-1}) \beta^2 \|g\|^2_{p_0, s_0, \Lambda} + \|f\|_{p,s,\Lambda}) \left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi\right)^{2.\frac{1+\chi}{r}} \right]$$

i.e.

$$(1.16)\quad |u^{(k)}|_{\Lambda_t} \leqslant c_1 \|\theta_1\|^{1/2}_{p,s,\Lambda} k\mu(k,t)^{\frac{1+\chi}{r}} + c_2(\|g\|_{p_0,s_0,\Lambda} + \|f\|^{1/2}_{p,s,\Lambda})\mu(k,t)^{\frac{1+\chi}{r}}$$

avec $c_1 = c_1(a)$, $c_2 = c_2(a, \beta)$,

$$\mu(k,t) = \begin{cases} \int_0^t |\mathrm{A}_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi & \text{si} \quad q < \infty \\ \text{mes } \{\xi \in [0,t] \,|\, |\mathrm{A}_k(\xi)| \neq 0\} & \text{si} \quad q = \infty \end{cases}$$

Posons

$$\gamma_1 = c_1 \|\theta_1\|^{1/2}_{p,s,\Lambda}, \qquad \gamma_2 = c_2(\|g\|_{p_0,s_0,\Lambda} + \|f\|^{1/2}_{p,s,\Lambda}), \qquad k_0 = \|u_0\|_{\infty,\Omega}$$

et soient $l > k \geqslant k_0$.

Compte tenu de

$$(1.17)\quad \beta . |u^{(k)}|_{\Lambda_t} \geqslant \|u^{(k)}\|_{q,r,\Lambda_t} \geqslant \left(\int_0^t \left(\int_{\Lambda(\xi)} (u-k)^q\, dx\right)^{r/q} d\xi\right)^{1/r} \geqslant (l-k)\mu(l,t)^{1/r}$$

et de (1.16), on obtient

$$(1.18)\quad (l-k)\mu(l,t)^{1/r} \leqslant \beta\gamma_1 k[\mu(k,t)^{1/r}]^{1+\varkappa} + \beta\gamma_2[\mu(k,t)^{1/r}]^{1+\varkappa}\ \forall l > k \geqslant k_0,\ t \in [0, t_0].$$

En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 6.1 du chapitre II de [6], on en déduit qu'il existe une fonction $\varphi(\xi, \mathrm{N}, \Omega, \mathrm{T}, a, p, s) \geqslant 0$, $\xi \in \mathbf{R}^+$, qu'on peut supposer vérifiant $\varphi(\xi, .) = \varphi(\xi, \mathrm{N}, \Omega, \mathrm{T}, a, p, s) \geqslant \xi$, telle que

$$(1.19)\quad \max(\|\theta_1\|_{p,s,\Lambda},\quad \|f\|_{p,s,\Lambda},\quad \|g\|_{p_0,s_0,\Lambda_0}) \leqslant \xi$$

$$(1.20)\quad \|u_0\|_{\infty,\Omega} \leqslant \xi$$

entraînent

$$\sup_{\Lambda_{t_0}} \text{ess. } u \leqslant \varphi(\xi, .)$$

On obtient de même, en raisonnant avec

$$v = \{u(t)\}_k = \max(u(t), k), \qquad k \leqslant -\|u_0\|_{\infty,\Omega}.$$

$$\inf_{\Lambda_{t_0}} \text{ess. } u \geqslant -\varphi(\xi, .)$$

et donc (1.19) et (1.20) entraînent

$$\|u\|_{\infty, \Lambda_{t_0}} \leqslant \varphi(\xi, \ .)$$

Travaillant d'une façon analogue dans l'intervalle $[t_0, 2t_0]$, avec $k \geqslant \|u\|_{\infty, \Lambda_{t_0}} \geqslant \|u(t_0)\|_{\infty, \Omega}$ et $k \leqslant -\|u\|_{\infty, \Lambda_{t_0}}$, on obtient que (1.19) et (1.20) entraînent

$$\|u\|_{\infty, \Lambda_{2t_0}} \leqslant \varphi[\varphi(\xi, \ .), \ .]$$

Par induction, et compte tenu de (1.14), on arrive à démontrer complètement le théorème I.

2. La régularité hölderienne.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème II.

2.1. Estimations a priori.

Supposons que les hypothèses (0.11) et (0.12) sont vérifiées avec $b, f, m, g, d^2, e^2, h^2 \in L^{p,s}(\Lambda)$ et soit $u \in \mathcal{V}$ une solution de (0.13), (i), (ii), telle que $u \in L^\infty(\Lambda)$ [6]. Posons

$$M = \|u\|_{\infty, \Lambda} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} f_1(x, t) = b(x, t)M^2 + f(x, t) \\ g_1(x, t) = m(x, t)M + g(x, t) \\ h_1(x, t) = e(x, t)M + h(x, t) \end{cases} \tag{2.2}$$

On en déduit

$$f_1, \ g_1, \ h_1^2 \in L^{p,s}(\Lambda) \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} B_i(x, t, u, \nabla u).D_i u(x, t) \geqslant a|\nabla u(x, t)|^2 - f_1(x, t) \\ |B_0(x, t, u, \nabla u)| \leqslant d(x, t)|\nabla u(x, t)| + g_1(x, t) \\ |B_i(x, t, u, \nabla u)| \leqslant \bar{a}|\nabla u(x, t)| + h_1(x, t), \ i = 1, \dots, N, \\ \text{pour presque tout } (x, t) \in \Lambda \end{cases} \tag{2.4}$$

Dans la suite on désignera par k une constante telle que

$$-M \leqslant k \leqslant M. \tag{2.5}$$

Ceci étant désignons par $B(x_0, R)$ une boule ouverte de

[6] Il suffit, pour que cela soit vérifié, que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ (cf. le théor. I).

$\mathbf{R}^N$ de centre $x_0 \in \overline{\Omega}$ et de rayon $R > 0$ et par $\xi(x, t)$ une fonction réelle lipschitzienne dans $\mathbf{R}^{N+1}$ telle que

$$(2.6) \quad 0 \leqslant \xi(x, t) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \text{support } \xi \subset \overline{B(x_0, R)} \times \mathbf{R}$$

Posons pour $t \in]0, T[$

$$(2.7) \qquad \nu_t = u(t) - \xi^2 u^{(k)}(t)$$

(où $u^{(k)} = u - \{u\}^k$, $\{u\}^k = \min(u, k)$).

Supposons encore qu'on ait

$$(2.8) \qquad k \geqslant 0 \quad \text{si} \quad B(x_0, R) \cap \Gamma \neq \emptyset.$$

Alors $\nu_t \in \mathbf{K}$ p.p. en $]0, T[$. Soient alors k vérifiant (2.5) et (2.8), ν_t défini par (2.7), $0 \leqslant t < t_0 \leqslant T$. Compte tenu qu'on a

$$\int_t^{t_0} \int_\Omega u'(u - \nu)\, dx\, d\tau = \int_t^{t_0} \int_\Omega (u^{(k)})' \xi^2 u^{(k)}\, dx\, d\tau$$
$$= \frac{1}{2} \| u^{(k)}(x, \tau)\xi(x, \tau)\|^2_{2, \Omega}\Big|_t^{t_0} - \int_t^{t_0} \int_\Omega (u^{(k)})^2 \xi . \xi' d\, x\, d\tau$$

on déduit de (0.13), (i),

$$(2.9) \quad \frac{1}{2} \| u^{(k)}(x, \tau)\xi(x, \tau)\|^2_{2, \Omega}\Big|_t^{t_0} - \int_t^{t_0} \int_\Omega (u^{(k)})^2 \xi . \xi'\, dx\, d\tau$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_t^{t_0} \int_\Omega B_i(x, \tau, u, \nabla u)(\xi^2 D_i u^{(k)} + 2\xi u^{(k)} D_i \xi)\, dx\, d\tau$$
$$+ \int_t^{t_0} \int_\Omega B_0(x, \tau, u, \nabla u)\xi^2 u^{(k)}\, dx\, d\tau \leqslant 0.$$

D'autre part, compte tenu de (2.4), on a

$$(2.10) \quad \sum_{i=1}^{N} \int_t^{t_0} \int_\Omega B_i(x, \tau, u, \nabla u)\xi^2 D_i u^{(k)}\, dx\, d\tau$$
$$\geqslant a \int_t^{t_0} \int_{A_k(\tau)} |\nabla u|^2 \xi^2\, dx\, d\tau$$
$$- \int_t^{t_0} \int_{A_k(\tau)} f_1\, dx\, d\tau, \quad \text{où} \quad A_k(\tau) = \{x \in \Omega | u(x, \tau) > k\}.$$

$$(2.11) \quad 2 \sum_{i=1}^{N} \int_t^{t_0} \int_\Omega |B_i(x, \tau, u, \nabla u)|\, \xi u^{(k)}|\, D_i \xi|\, dx\, d\tau$$
$$\leqslant 2N\Big[\bar{a} \int_t^{t_0} \int_{A_k(\tau)} |\nabla u| \xi u^{(k)} |\nabla \xi|\, dx\, d\tau$$
$$+ \int_t^{t_0} \int_{A_k(\tau)} h_1 \xi u^{(k)} |\nabla \xi|\, dx\, d\tau\Big]$$

$$(2.12) \quad \int_t^{t_0} \int_\Omega |B_0(x, \tau, \nabla u)|\, \xi^2 u^{(k)}\, dx\, d\tau$$
$$\leqslant \int_t^{t_0} \int_{A_k(\tau)} d|\nabla u| \xi^2 u^{(k)}|\, dx\, d\tau + \int_t^{t_0} \int_{A_k(\tau)} g_1 \xi^2 u^{(k)}\, dx\, d\tau.$$

et encore

$$(2.13)\quad 2N\bar{a}\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}|\nabla u|\xi u^{(k)}|\nabla\xi|\,dx\,d\tau$$
$$\leqslant \frac{a}{4}\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}|\nabla u|\xi^2\,dx\,d\tau$$
$$+ 16a^{-1}N^2\bar{a}^2\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}(u^{(k)})^2|\nabla\xi|^2\,dx\,d\tau$$

$$(2.14)\quad 2N\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}h_1\xi u^{(k)}|\nabla\xi|\,dx\,d\tau$$
$$\leqslant N^2\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}h_1^2\xi^2\,dx\,d\tau + \int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}(u^{(k)})^2|\nabla\xi|^2\,dx\,d\tau$$

$$(2.15)\quad \int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}d|\nabla u|\xi^2u^{(k)}\,dx\,d\tau$$
$$\leqslant \frac{a}{4}\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}|\nabla u|^2\xi^2\,dx\,d\tau + 16M^2a^{-1}\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}d^2\xi^2\,dx\,d\tau$$

$$(2.16)\quad \int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}g\xi^2u^{(k)}\,dx\,d\tau \leqslant 2M\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}g\xi^2\,dx\,d\tau$$

On obtient de (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.13), (2.14), (2.15) et (2.16)

$$(2.17)\quad \frac{1}{2}\|u^{(k)}(x,\tau)\xi(x,\tau)\|^2_{2,A_k(\tau)}\Big|_t^{t_0}$$
$$+\frac{a}{2}\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}|\nabla u|^2\xi^2\,dx\,d\tau$$
$$\leqslant \max(2, 16a^{-1}N^2\bar{a}^2, N^2, 16a^{-1})$$
$$\Big[\int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}(u^{(k)})^2(|\nabla\xi|^2+\xi|\xi'|)\,dx\,d\tau + \int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}\Phi\xi^2\,dx\,d\tau\Big]$$

où

$$(2.18)\qquad \Phi = f_1 + Mg_1 + M^2d^2 + h_1^2 \in L^{p,s}(\Lambda).$$

Soit $Q_k(t, t_0) = \{(x,\tau)\in\Lambda \mid t<\tau<t_0,\ u(x,\tau)>k\}$, $\bar{p}$, $\bar{s}$, χ, q et r définis dans (1.5).
Il vient

$$(2.19)\quad \int_t^{t_0}\int_{A_k(\tau)}\Phi\xi^2\,dx\,d\tau \leqslant \|\Phi\|_{p,s,\Lambda}\|\xi\|^2_{\bar{p},\bar{s},Q_k(t,t_0)}$$
$$\leqslant \|\Phi\|_{p,s,\Lambda}\Big(\int_t^{t_0}\Big(\int_{A_k(\tau)}\xi\,dx\Big)^{r/q}d\tau\Big)^{\frac{2(1+\chi)}{r}}$$

si N et p sont différents de 1, ou

$$\leqslant \|\Phi\|_{p,s,\Lambda}\Big(\int_t^{t_0}\|\xi(\tau)\|^{\frac{4}{1+\chi}}_{\infty,A_k(\tau)}\,d\tau\Big)^{\frac{2(1+\chi)}{4}}$$

si $N = p = 1$, puisque dans ce cas on a

$$q = \infty, \qquad r = 4, \qquad \text{comme il est aisé de voir.}$$

Dans la suite on supposera pour simplifier

$$(2.20) \qquad M \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \|\Phi\|_{p,s,\Lambda} \leqslant 1$$

A la fin de la démonstration on reviendra sur ce point. Ceci étant on pose

$$(2.21) \quad A_k(x_0, R; \tau) = \{x \in B(x_0, R) \cap \Omega | u(x, \tau) > k\}$$

$$(2.22) \quad Q_k(x_0, R; t, t_0) = \{(x, \tau) \in (B(x_0, R) \cap \Omega) \times]t, t_0[| u(x, \tau) > k\}$$

$$(2.23) \quad \mu_k(x_0, R; t, t_0) = \begin{cases} \int_t^{t_0} |A_k(x_0, R; \tau)|^{r/q} d\tau & \text{si} \quad q < \infty \\ \text{mes}\,\{\tau \in]t, t_0[\;|\; |A_k(x_0, R; \tau)| \neq 0\} & \text{si} \quad q = \infty \end{cases}$$

Alors, compte tenu du fait que $\xi(x, \tau) = 0$ pour $x \notin B(x_0, R)$, on déduit de (2.17), (2.18), (2.19) et (2.20) :

$$(2.24) \quad \|u^{(k)}(x, t_0)\xi(x, t_0)\|^2_{2, A_k(x_0, R; t_0)} + a\|\nabla u^{(k)}\xi\|^2_{2Q_k(x_0, R; t, t_0)} \leqslant \|u^{(k)}(x, t)\xi(x, t)\|^2_{2, A_k(x_0, R; t)} + c\Big[\int_{Q_k(x_0, R; t, t_0)} (u^{(k)})^2(|\nabla\xi|^2 + \xi|\xi'|)\,dx\,d\tau + \mu_k(x_0, R; t, t_0)^{\frac{2}{r}(1+\chi)}\Big]$$

où

$$c = c(N, a, \bar{a})$$

En raisonnant avec $v_t = u(t) - \xi^2 u_{(k)}(t)$,

$$u_{(k)} = u - \{u\}_k, \qquad \{u\}_k = \max(u, k),$$

k vérifiant (2.5) (ce qui entraîne $v_t \in \mathbf{K}$ même dans le cas où $B(x_0, R) \cap \Gamma \neq \emptyset$) on arrive de même à

$$(2.24') \quad \|u_{(k)}(x, t_0)\xi(x, t_0)\|^2_{2, A'_k(x_0, R; t_0)} + a\|\nabla u_{(k)}\xi\|^2_{2, Q'_k(x_0, R; t, t_0)} \leqslant \|u_{(k)}(x, t)\xi(x, t)\|^2_{2, A'_k(x_0, R; t)} + c\Big[\int_{Q'_k(x_0, R; t, t_0)} (u_{(k)})^2(|\nabla\xi|^2 + \xi|\xi'|)\,dx\,d\tau + \mu'_k(x_0, R; t, t_0)^{\frac{2}{r}(1+\chi)}\Big]$$

où

$$A'_k(x_0, R; \tau) = \{x \in B(x_0, R) \cap \Omega \mid u(x, \tau) < k\}$$

$$Q'_k(x_0, R; t, t_0) = \{(x, \tau) \in (B(x_0, R) \cap \Omega) \times]t, t_0[\mid u(x, \tau) < k\}$$

$$\mu'_k(x_0, R; t, t_0) = \begin{cases} \int_t^{t_0} A'_k|(x_0, R; \tau)|^{r/q} & \text{si} \quad q < \infty \\ \text{mes } \{\tau \in]t, t_0[\mid |A'_k(x_0, R; \tau)| \neq 0\} & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

En choisissant convenablement la fonction ξ on obtient à partir de (2.24) et (2.24′) les majorations suivantes :

Soit $\rho'_0 \leqslant 1$ une constante positive qu'on choisira au paragraphe 2.2. Posons

$$(2.25) \quad \rho_0(x_0) = \begin{cases} \min (\text{dist } (x_0, \Gamma), \rho'_0) & \text{si} \quad x_0 \in \Omega \\ \rho'_0 & \text{si} \quad x_0 \in \Gamma \end{cases}$$

et soient

$$(2.26) \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_0 \leqslant T, \qquad 0 < \rho \leqslant R \leqslant \rho_0(x_0)$$

Alors on a, avec $c = c(N, a, \bar{a})$,

$$(2.27) \quad \max_{t_1 \leqslant \tau \leqslant t_0} \|u^{(k)}(x, \tau)\|^2_{2, A_k(x_0, \rho; \tau)} \leqslant \|u^{(k)}(x, t_1)\|^2_{2, A_k(x_0, R; t_1)} + c[(R - \rho)^{-2} \|u^{(k)}\|^2_{2, Q_k(x_0, R; t_1, t_0)} + \mu_k^{\frac{2}{r}(1+\chi)}(x_0, R; t_1, t_0)]$$

où $\qquad k \geqslant 0 \quad \text{si} \quad x_0 \in \Gamma$

$$(2.27') \quad \max_{t_1 \leqslant \tau \leqslant t_0} \|u_{(k)}(x, \tau)\|^2_{2, A'_k(x_0, \rho; \tau)} \leqslant \|u_{(k)}(x, t_1)\|^2_{2, A'_k(x_0, R; t_1)} + c[(R - \rho)^{-2} \|u_{(k)}\|^2_{2, Q_k(x_0, R; t_1, t_0)} + \mu_k'^{\frac{2}{r}(1+\chi)}(x_0, R; t_1, t_0)]$$

$$(2.28) \quad |u^{(k)}|^2_{Q_k(x_0, \rho, t, t_0)} \equiv \max_{t \leqslant \tau \leqslant t_0} \|u^{(k)}(x, \tau)\|^2_{2, A_k(x_0, \rho; \tau)} + \|\nabla u^{(k)}\|^2_{2, Q_k(x_0, \rho; t, t_0)} \leqslant c\{[(R - \rho)^{-2} + (t - t_1)^{-1}] \|u^{(k)}\|^2_{2, Q_k(x_0, R; t_1, t_0)} + \mu_k^{\frac{2}{r}(1+\chi)}(x_0, R; t_1, t_0)\},$$

où

$$k \geqslant 0 \quad \text{si} \quad x_0 \in \Gamma$$

$$(2.28') \quad |u_{(k)}|^2_{Q'_k(x_0, \rho; t, t_0)} \leqslant c\{[(R - \rho)^{-2} + (t - t_1)^{-1}] \|u_{(k)}\|^2_{2, Q'_k(x_0, R; t_1, t_0)} + \mu_k'^{\frac{2}{r}(1+\chi)}(x_0, R; t_1, t_0)\}$$

$$(2.29)\quad |u^{(k)}|^2_{Q_k(x_0,\rho;0,t)} \leqslant \|u^{(k)}(x,0)\|^2_{2,A_k(x_0,R;0)} + c[(R-\rho)^{-2}\|u^{(k)}\|^2_{2,Q_k(x_0,R;0,t)} + \mu_k^{\frac{2}{r}(1+\chi)}(x_0, R; 0, t)],$$

où

$$k \geqslant 0 \quad \text{si} \quad x_0 \in \Gamma$$

$$(2.29')\quad |u_{(k)}|^2_{Q'_k(x_0,\rho;0,t)} \leqslant \|u_{(k)}(x,0)\|^2_{2,A'_k(x_0,R;0)} + c[(R-\rho)^{-2}\|u_{(k)}\|^2_{2,Q'_k(x_0,R;0,t)} + \mu'^{\frac{2}{r}(1+\chi)}_k(x_0, R; 0, t)].$$

2.2. Lemmes préliminaires.

Dans la suite on supposera $N \geqslant 2$. A la fin de cette sous-section on enlèvera cette restriction.

Compte tenu de la régularité de la frontière Γ, il existe des constantes $\rho'_0 \in]0, 1]$, $\theta_0, \theta'_0 \in]0, 1[$ telles qu'on a

$$(2.30)\quad \theta_0|B(x_0,\rho)| \leqslant |\Omega(x_0,\rho)| \leqslant \theta'_0|B(x_0,\rho)|, \quad \forall x_0 \in \Gamma, \quad \forall \rho \in]0, \rho'_0], \quad \text{où} \quad \Omega(x_0,\rho) = B(x_0,\rho) \cap \Omega$$

et aussi, si $v \in H^1(\Omega)$, $A_k(x_0,\rho) = \{x \in \Omega(x_0,\rho) | v(x) > k\}$, $A'_k(x_0,\rho) = \{x \in \Omega(x_0,\rho) | v(x) < k\}$:

Lemme 2.0. (De Giorgi, cf. aussi [6], [1] et [5]). — *Soit* $\lambda < 1$ *une constante. Alors il existe une constante* β_0 *(ne dépendant pas de* v*) telle que pour tout* $x_0 \in \Omega$ *et tout*

$$\rho \in]0, \rho_0(x_0)]$$

($\rho_0(x_0)$ *défini par* (2.25)) *on a*

(i) $\quad |A_k(x_0,\rho)| \leqslant \lambda|\Omega(x_0,\rho)| \Longrightarrow$

$$(2.31)\quad (l-k)|A_l(x_0,\rho)| \leqslant \beta_0\rho \int_{A_k(x_0,\rho)-A_l(x_0,\rho)} |\nabla u(x)|\,dx, \forall l \geqslant k$$

(ii) $\quad |A'_k(x_0,\rho)| \leqslant \lambda|\Omega(x_0,\rho)| \Longrightarrow$

$$(2.31')\quad (l-k)|A'_l(x_0,\rho)| \leqslant \beta_0\rho \int_{A'_k(x_0,\rho)-A'_l(x_0,\rho)} |\nabla u(x)|\,dx, \quad \forall l \leqslant k,$$

(iii) $\quad x_0 \in \Gamma$, $v \geqslant k$ sur $B(x_0, 2\rho) \cap \Gamma \Longrightarrow$ (2.31′)

Ceci étant, revenons aux hypothèses de 2.1 sur la fonction

u et introduisons la notation suivante

$$(2.32)\quad \Lambda(x_0, \rho\,; t_1, t_2) = (\mathrm{B}(x_0, \rho) \cap \Omega) \times\,]t_1, t_2[\quad (0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \mathrm{T})$$

Dans la suite on représentera par c une constante ne dépendant éventuellement que de N, Ω, T, a, $\bar{a}$, p, s. Sauf mention explicite, aucune constante introduite dépendra d'autres paramètres que ceux-là.

Avec une démonstration analogue à celle du lemme 7.1 du chapitre II de [6], on établit le lemme suivant, compte tenu des estimations (2.27), (2.27') et de la première partie de l'inégalité (2.30) si $x_0 \in \Gamma$:

LEMME 2.1. — Il existe des constantes $\theta > 0$ et $b \in\,]0, 1[$ telles que

(i) Si pour $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$, $0 \leqslant t_1 \leqslant \mathrm{T}$ on a (avec $k \geqslant 0$ si $x_0 \in \Gamma$)

$$(2.33)\quad |\mathrm{A}_k(x_0, \rho\,; t_1)| \leqslant \frac{1}{2}\,|\Omega(x_0, \rho)|$$

et

$$(2.34)\quad \mathrm{H} \equiv \sup_{\Lambda(x_0, \rho\,; t_1, t_1 + \Omega\rho^2)} (u(x, t) - k) \geqslant \rho^{\frac{\mathrm{N}\chi}{2}} \text{ (7)}$$

alors

$$(2.35)\quad |\Omega(x_0, \rho) - \mathrm{A}_{k+3/4\mathrm{H}}(x_0, \rho\,; t)| \geqslant b\,|\Omega(x_0, \rho)|, \quad \forall t \in [t_1, t_1 + \theta\rho^2] \cap [t_1, \mathrm{T}]$$

(ii) Si pour $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$, $0 \leqslant t_1 < \mathrm{T}$ on a

$$(2.33')\quad |\mathrm{A}'_k(x_0, \rho\,; t_1)| \leqslant \frac{1}{2}\,|\Omega(x_0, \rho)|$$

et

$$(2.34')\quad \mathrm{H}' \equiv \sup_{\Lambda(x_0, \rho\,; t_1, t_1 + \theta\rho^2)} (k - u(x, t)) \geqslant \rho^{\frac{\mathrm{N}\chi}{2}}$$

alors

$$(2.35')\quad |\Omega(x_0, \rho) - \mathrm{A}'_{k-3/4\mathrm{H}'}(x_0, \rho\,; t)| \geqslant b\,|\Omega(x_0, \rho)|, \quad \forall t \in [t_1, t_1 + \theta\rho^2] \cap [t_1, \mathrm{T}]$$

(7) Pour simplifier l'écriture on écrira sup. $\equiv$ sup. ess., inf. $\equiv$ inf. ess.

Compte tenu des estimations (2.28), (2.28′) on démontre le lemme suivant comme le lemme 7.2 du chapitre II de [6] :

LEMME 2.2. — *Il existe une constante* $\theta_1 > 0$ *telle que*

(*i*) *Si pour* $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$, $\theta\rho^2 \leqslant t_0$ *on a* (*avec* $k \geqslant 0$ *si* $x_0 \in \Gamma$)

$$(2.36) \qquad |Q_k(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)| \leqslant \theta_1\rho^{N+2}$$

et

$$(2.37) \qquad H \equiv \sup_{\Lambda(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)} (u(x, t) - k) \geqslant \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

alors

$$(2.38) \qquad \left|Q_{k+\frac{H}{2}}\left(x_0, \frac{\rho}{2}; t_0 - \theta\left(\frac{\rho}{2}\right)^2, t_0\right)\right| = 0$$

(ii) *Si pour* $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$, $\theta\rho^2 \leqslant t_0$ *on a*

$$(2.36') \qquad |Q'_k(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)| \leqslant \theta_1\rho^{N+2}$$

et

$$(2.37') \qquad H' \equiv \sup_{\Lambda(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)} (k - u(x, t)) \geqslant \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

alors

$$(2.38') \qquad |Q'_{k-H'/2}(x_0, \rho/2; t_0 - \theta(\rho/2)^2, t_0)| = 0.$$

LEMME 2.2′. — *Supposons* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. *Alors il existe une constante* $\theta'_1 > 0$ *telle que*

(i) *Si pour* $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$, $\theta\rho^2 \leqslant T$, $k \geqslant \sup_{\Omega(x_0, \rho)} u(x, 0)$ (*ce qui entraîne* $k \geqslant 0$ *si* $x_0 \in \Gamma$), *on a*

$$(2.39) \qquad |Q_k(x_0, \rho; 0, \theta\rho^2)| \leqslant \theta'_1\rho^{N+2}$$

et

$$(2.40) \qquad H \equiv \sup_{\Lambda(x_0, \rho; 0, \theta\rho^2)} (u(x, t) - k) \geqslant \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

alors

$$(2.41) \qquad |Q_{k+H/2}(x_0, \rho/2; 0, \theta(\rho/2)^2)| = 0.$$

(ii) *Si pour* $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$, $\theta\rho^2 \leqslant T$, $k \leqslant \inf_{\Omega(x_0, \rho)} u(x, 0)$, *on a*

$$(2.39') \qquad |Q'_k(x_0, \rho; 0, \theta\rho^2)| \leqslant \theta'_1\rho^{N+2}$$

et

$$(2.40') \qquad H' \equiv \sup_{\Lambda(x_0, \rho; 0, \theta\rho^2)} (k - u(x, t)) \geqslant \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

alors

$$(2.41') \qquad |Q'_{k-H'/2}(x_0, \rho/2; 0, \theta(\rho/2)^2)| = 0.$$

Esquisse de la démonstration du lemme 2.2' :

Compte tenu des estimations (2.29), (2.29') la démonstration est analogue à celle du lemme 7.2 du chapitre II de [6]. En effet, l'inégalité $k \geqslant \sup_{\Omega(x_0, \rho)} u(x, 0)$ entraîne la nullité du premier terme du second membre de (2.29).

En travaillant avec (2.29) dans ces conditions, et avec un changement de coordonnées en t convenable, on achève la démonstration comme celle du lemme cité. Même raisonnement pour établir (ii).

LEMME 2.3. — *Il existe un entier positif* s_1 *tel que pour tout* $(x_0, t_0) \in \overline{\Lambda}$, *avec* $t_0 > 0$, *et pour tout* ρ *tel que* $0 < \rho \leqslant \frac{\rho_0(x_0)}{2}$, $\theta(2\rho)^2 \leqslant t_0$, *on ait ou*

$$(2.42) \qquad \text{osc.}\ (u;\ \Lambda(x_0,\ \rho/2;\ t_0 - \theta(\rho/2)^2,\ t_0)) \leqslant 2^{s_1+1}\rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

ou alors

$$(2.43) \qquad \text{osc.}\ (u;\ \Lambda(x_0,\ \rho/2;\ t_0 - \theta(\rho/2)^2,\ t_0)) \\ \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^{s_1+1}}\right) \text{osc.}\ (u;\ \Lambda(x_0,\ 2\rho;\ t_0 - \theta(2\rho)^2,\ t_0))$$

$\left(\textit{avec}\ \underset{\Lambda}{\text{osc.}}\, u = \sup_{\Lambda} u - \inf_{\Lambda} u\right)$

Démonstration. — Si $x_0 \in \Omega$ la démonstration est celle des lemmes 7.3 et 7.4 du chapitre II de [6]. Si $x_0 \in \Gamma$, étant donné le caractère unilatéral de la condition sur la frontière, on doit faire certaines modifications. La démonstration dans ce cas se fait comme suit :

Posons

$$\mu_1 = \sup_{\Lambda(x_0, 2\rho; t_0 - \theta(2\rho)^2, t_0)} u(x, t),$$

$$\mu_2 = \inf_{\Lambda(x_0, 2\rho; t_0 - \theta(2\rho)^2, t_0)} u(x, t)$$

$$\omega = \mu_1 - \mu_2, \qquad \bar{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \mu_1 - \frac{\omega}{2} = \mu_2 + \frac{\omega}{2}$$

Choisissons s_1 entier vérifiant

$$s_1 \geqslant 3 + \frac{\bar{c}}{\theta_1^2} \tag{2.44}$$

où θ_1 est défini dans le lemme 2.2 et $\bar{c}$ est une constante à préciser ultérieurement, dépendant seulement des paramètres habituels.

Supposons donc

$$\omega > 2^{s_1+1}\rho^{\frac{N\chi}{2}} \tag{2.45}$$

Alors ou bien on a

$$\bar{\mu} < 0 \tag{2.46}$$

ou

$$\bar{\mu} \geqslant 0 \tag{2.47}$$

Supposons vérifiée (2.46). Posons

$$l = \mu_2 + \frac{\omega}{2^{\sigma+1}}, \qquad k = \mu_2 + \frac{\omega}{2^{\sigma}}, \qquad \sigma \geqslant 1.$$

Comme $l < k \leqslant \bar{\mu} < 0$, on a $u(t) \geqslant k$ sur $B(x_0, 2\rho) \cap \Gamma$ pour $t \in [t_0 - \theta\rho^2, t_0]$ et donc, par le lemme 2.0, (iii) il vient

$$\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}\left|A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho;\, t)\right| \leqslant \beta_0\rho \int_{\mathcal{D}'_\sigma(t)} |\nabla u(x, t)|\, dx \tag{2.48}$$

avec

$$\mathcal{D}'_\sigma(t) = A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho;\, t) - A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho;\, t) \tag{2.49}$$

Intégrons (2.48) entre $t_0 - \theta\rho^2$ et t_0, élevons au carré et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}\right)^2 \int_{t_0-\theta\rho^2}^{t_0} \left|A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho;\, t)\right|^2 dt \tag{2.50}$$
$$\leqslant \beta_0^2\rho^2 \left(\int_{t_0-\theta\rho^2}^{t_0}\int_{\mathcal{D}'_\sigma(t)} |\nabla u(x, t)|^2\, dx\, dt\right)\left(\int_{t_0-\theta\rho^2}^{t_0} |\mathcal{D}'_\sigma(t)|\, dt\right)$$

D'autre part on a

$$\int_{t_0-\theta\rho^2}^{t_0}\int_{\mathcal{D}'_\sigma(t)} |\nabla u(x, t)|^2\, dx\, dt \leqslant \left|u_{\left(\mu_2+\frac{\omega}{2^\sigma}\right)}\right|^2_{\Lambda(x_0, \rho;\, t_0-\theta\rho^2, t_0)} \tag{2.51}$$

Appliquons alors (2.28′) avec $k = \mu_2 + \dfrac{\omega}{2^\sigma}$,

$$R = 2\rho, \qquad t_1 = t_0 - 4\theta\rho^2, \qquad t = t_0 - \theta\rho^2.$$

Il vient, compte tenu de (2.51),

$$(2.52) \quad \int_{t_0-\theta\rho^2}^{t_0}\int_{\mathfrak{D}'_\sigma(t)} |\nabla u(x, t)|^2\, dx\, dt$$
$$\leqslant c\{[\rho^{-2} + (3\theta\rho^2)^{-1}]\left(\mu_2 + \frac{\omega}{2^\sigma} - \mu_2\right)^2 \chi_N(2\rho)^N$$
$$. 4\theta\rho^2 + [[\chi_N(2\rho)^N]^{r/q}4\theta\rho^2]^{2/r\,(1+\chi)}\},$$

où χ_N est la mesure de la boule unité de $\mathbf{R}^N$.

Compte tenu de (2.45), (2.50), (2.52) et de (1.6) on en déduit

$$(2.53) \quad \left|Q'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)\right|^2 \leqslant c\rho^{N+2}\int_{t_0-\theta\rho^2}^{t_0} |\mathfrak{D}'_\sigma(t)|\, dt$$

pour $\sigma \in [1, s_1 - 1]$ (par exemple). Mais

$$(2.54) \quad \left|Q'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{s_1}}}(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)\right|$$
$$\leqslant \left|Q'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)\right|$$

pour $\sigma \in [1, s_1 - 1]$ et donc, par addition, on tire de (2.53) et (2.54)

$$(2.55) \quad (s_1 - 1)\left|Q'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{s_1}}}(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)\right|^2$$
$$\leqslant c\rho^{N+2}\theta\rho^2 . \chi_N\rho^N = \bar{c}\rho^{2(N+2)}$$

Alors par (2.44), il vient $\dfrac{\bar{c}}{s_1 - 1} \leqslant \dfrac{\bar{c}}{s_1 - 3} \leqslant \theta_1^2$ et donc

$$(2.56) \quad \left|Q'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{s_1}}}(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)\right| \leqslant \theta_1\rho^{N+2}$$

Par le lemme 2.2, (ii), on a, compte tenu de (2.56),

$$(2.57) \quad H' \equiv \sup_{\Lambda(x_0,\, \rho;\, t_0-\theta\rho^2,\, t_0)} \left(\mu_2 + \frac{\omega}{2^{s_1}} - u(x, t)\right) \leqslant \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

ou alors

$$(2.58) \quad \left|Q'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{s_1}}-\frac{H'}{2}}(x_0, \rho/2; t_0 - \theta(\rho/2)^2, t_0)\right| = 0$$

Supposons (2.57) vérifié. Alors il vient

$$(2.59)\qquad \inf_{\Lambda(x_0,\,\rho/2;\,t_0-\theta(\rho/2)^2,\,t_0)} u(x,\,t) \geqslant \mu_2 + \frac{\omega}{2^{s_1}} - \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

$$> \mu_2 + \frac{\omega}{2^{s_1+1}},\quad \text{compte tenu de (2.45).}$$

De (2.59), il s'ensuit qu'on a (2.43).

Si (2.58) est vérifié, alors on a

$$(2.60)\qquad \inf_{\Lambda(x_0,\,\rho/2;\,t_0-\theta(\rho/2)^2,\,t_0)} u(x,\,t) \geqslant \mu_2 + \frac{\omega}{2^{s_1}} - \frac{H'}{2}$$

$$\geqslant \mu_2 + \frac{\omega}{2^{s_1+1}}$$

puisque

$$H' \leqslant \frac{\omega}{2^{s_1}}$$

Donc on a aussi (2.43).

Supposons maintenant l'hypothèse (2.47) vérifiée.

Dans ce cas ou bien on a

$$(2.61)\qquad |A_{\mu_1-\frac{\omega}{2}}(x_0,\,\rho\,;\,t_0-\theta\rho^2)| \leqslant \frac{1}{2}\,|\Omega(x_0,\,\rho)|$$

ou alors

$$(2.62)\qquad \left|A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2}}(x_0,\,\rho\,;\,t_0-\theta\rho^2)\right| \leqslant \frac{1}{2}\,|\Omega(x_0,\,\rho)|$$

Étant donné que ces deux cas se traitent d'une façon analogue, supposons (2.62) vérifiée.

Posons

$$\mu_2' = \inf_{\Lambda(x_0,\,\rho\,;\,t_0-\theta\rho^2,\,t_0)} u(x,\,t).$$

Si $\mu_2' \geqslant \mu_2 + \dfrac{\omega}{2^{s_1+1}}$ alors il vient

$$\text{osc.}\,(u\,;\,\Lambda(x_0,\,\rho\,;\,t_0-\theta\rho^2,\,t_0)) \leqslant \mu_1 - \mu_2' \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^{s_1+1}}\right)\omega$$

ce qui entraîne (2.43).

Supposons donc $\mu_2' < \mu_2 + \dfrac{\omega}{2^{s_1+1}}$ et posons

$$H' \equiv -\,\mu_2' + \left(\mu_2 + \frac{\omega}{2^{r_1}}\right).$$

On a, par (2.45),

$$H' > \frac{\omega}{2^{r_1}} - \frac{\omega}{2^{s_1+1}} \geqslant \frac{\omega}{2^{s_1+1}} > \rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

pour $r_1 \in [1, s_1]$.

Appliquons le lemme 2.1, (ii) avec

$$k = \mu_2 + \frac{\omega}{2^{r_1}} \qquad \text{et} \qquad t_1 = t_0 - \theta\rho^2$$

il vient

$$(2.63) \qquad \left|\Omega(x_0, \rho) - A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{r_1}}-\frac{3}{4}H'}(x_0, \rho; t)\right| \geqslant b|\Omega(x_0, \rho)|, \quad \forall t \in [t_0 - \theta\rho^2 : t_0]$$

Mais, puisqu'on a

$$\mu_2 + \frac{\omega}{2^{r_1}} - \frac{3}{4}H' \geqslant \mu_2 + \frac{\omega}{2^{r_1}} - \frac{3}{4}\frac{\omega}{2^{r_1}} = \mu_2 + \frac{\omega}{2^{r_1+2}}$$

il s'ensuit de (2.63) que

$$\left|\Omega(x_0, \rho) - A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{r_1+2}}}(x_0, \rho; t)\right| \geqslant b|\Omega(x_0, \rho)|$$

c'est-à-dire

$$(2.64) \qquad \left|A'_{\mu_2+\frac{\omega}{2^{r_1+2}}}(x_0, \rho; t)\right| \leqslant (1-b)|\Omega(x_0, \rho)| \quad \forall t \in [t_0 - \theta\rho^2, t_0]$$

On peut donc appliquer à $u(t)$, $t \in [t_0 - \theta\rho^2, t_0]$ le lemme 2.0, (ii), avec $k = \mu_2 + \frac{\omega}{2^\sigma}$ et $l = \mu_2 + \frac{\omega}{2^{\sigma+1}}$,

$$\sigma = r_1 + 2 \in [3, s_1 + 2].$$

Ainsi avec $\sigma \in [3, s_1 - 1]$ on a (2.48) avec $\mathfrak{D}'_\sigma(t)$ donné par (2.49) et cela pour tout $t \in [t_0 - \theta\rho^2, t_0]$. La démonstration s'achève comme dans la première partie avec obtention de (2.43).

Lemme 2.3'. — *Supposons maintenant* $u_0 \in K \cap C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, $\lambda \in]0, 1]$ *avec* $[u_0]_{\lambda,\Omega} \leqslant 1$ *et soit* $\gamma = \min\left(\lambda, \frac{N\chi}{2}\right)$. *Alors il existe un entier positif* s'_1, *dépendant aussi de* λ, *tel que* *pour tout* $x_0 \in \overline{\Omega}$ *et pour tout* ρ *tel que* $0 < \rho \leqslant \frac{\rho_0(x_0)}{2}$, *on ait ou*

$$\text{(2.65)} \qquad \text{osc.}\,(u;\, \Lambda(x_0,\, \rho/2;\, 0,\, \theta(\rho/2)^2)) \leqslant 2^{s_1'+1}\rho^\lambda$$

ou alors

$$\text{(2.66)} \qquad \text{osc.}(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho/2;\ 0,\ \theta(\rho/2)^2)) \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^{s_1'+1}}\right) \text{osc}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ 2\rho;\ 0,\ \theta(2\rho)^2)).$$

Démonstration. — Posons

$$\mu_1 = \sup_{\Lambda(x_0,\, 2\rho;\, 0,\, \theta(2\rho)^2)} u(x,\ t), \quad \mu_2 = \inf_{\Lambda(x_0,\, 2\rho;\, 0,\, \theta(2\rho)^2)} u(x,\ t),$$

$$\omega = \mu_1 - \mu_2, \qquad \bar{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \mu_1 - \frac{\omega}{2} = \mu_2 + \frac{\omega}{2}$$

Choisissons s_1' entier vérifiant

$$\text{(2.67)} \qquad 2^{s_1'} \geqslant 4^{\lambda+1}$$

$$\text{(2.68)} \qquad s_1' \geqslant 4 + \frac{\bar{c}'}{\theta_1'^2}$$

où θ_1' est défini dans le lemme 2.2′ et $\bar{c}'$ est une constante à préciser ultérieurement et ne dépendant que des paramètres habituels.

Supposons que (2.65) n'est pas vérifié. On aura alors, pour $x,\ x' \in \Omega(x_0,\ 2\rho)$,

$$|u(x,\, 0) - u(x',\, 0)| \leqslant 4^\lambda\rho^\lambda \leqslant 4^\lambda\rho^\gamma \leqslant \frac{2^{s_1'}}{4}\,\rho^\lambda < \frac{\omega}{4}$$

compte tenu qu'on a

$$\text{(2.69)} \qquad \omega > 2^{s_1'+1}\rho^\gamma \geqslant 2^{s'+1}\rho^{\frac{N\chi}{2}}$$

On peut donc conclure

$$\text{(2.70)} \qquad \text{osc.}\,(u(x,\, 0);\ \Omega(x_0,\ 2\rho)) < \frac{\omega}{4}$$

ce qui entraîne ou

$$\text{(2.71)} \qquad \sup_{\Omega(x_0,\, 2\rho)} u(x,\ 0) \leqslant \mu_1 - \frac{\omega}{4}$$

ou alors

$$\text{(2.72)} \qquad \inf_{\Omega(x_0,\, 2\rho)} u(x,\ 0) \geqslant \mu_2 + \frac{\omega}{4}$$

Supposons (2.71) vérifié. On a alors

$$\left|A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^2}}(x_0,\ \rho;\ 0)\right| = 0$$

Posons $$\mu_1' = \sup_{\Lambda(x_0,\ \rho;\ 0,\ \theta\rho^2)} u(x,\ t)$$

Si $$\mu_1' \leqslant \mu_1 - \frac{\omega}{2^{s_1'+1}}$$

alors il vient

$$\text{osc.}\ (u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ 0,\ \theta\rho^2)) \leqslant \mu_1' - \mu_2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^{s_1'+1}}\right)\omega$$

ce qui entraîne (2.66).

Supposons alors $\mu_1' > \mu_1 - \frac{\omega}{2^{s_1'+1}}$ et posons

$$H = \mu_1' - \left(\mu_1 - \frac{\omega}{2^{r_1}}\right), \qquad r_1 \in [2,\ s_1']$$

On a

$$H \geqslant \frac{\omega}{2^{r_1}} - \frac{\omega}{2^{s_1'+1}} \geqslant \frac{\omega}{2^{s_1'+1}} > \rho^{\frac{N\chi}{2}} \quad \text{par (2.69)}$$

Alors par le lemme 2.1 (i) on a, avec $k = \mu_1 - \frac{\omega}{2^{r_1}}$,

$$\left|\Omega(x_0,\ \rho) - A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^{r_1}}+\frac{3}{4}H}(x_0,\ \rho\ ;\ t)\right| \geqslant b|\Omega(x_0,\ \rho)|,\ \forall t \in [0,\ \theta\rho^2]$$

(Remarquons que (2.71) et $u(x,\ 0) \in \mathbf{K}$ entraînent $k \geqslant 0$).

Étant donné que

$$\mu_1 - \frac{\omega}{2^{r_1}} + \frac{3}{4}H \leqslant \mu_1 - \frac{\omega}{2^{r_1}} + \frac{3}{4}\frac{\omega}{2^{r_1}} = \mu_1 - \frac{\omega}{2^{r_1+2}}$$

on en déduit, pour $r_1 \in [2,\ s_1']$,

$$\text{(2.73)} \quad \left|A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^{r_1+2}}}(x_0,\ \rho\ ;\ t)\right| \leqslant (1-b)|\Omega(x_0,\ \rho)|,\ \forall t \in [0,\ \theta\rho^2]$$

Alors, avec $k = \mu_1 - \frac{\omega}{2^\sigma}$, $l = \mu_1 - \frac{\omega}{2^{\sigma+1}}$,

$$\sigma = r_1 + 2 \in [4,\ s_1' + 2],$$

on peut appliquer à $u(t)$, $t \in [0,\ \theta\rho^2]$, le lemme 2.0 (i).

Ainsi, avec $\sigma \in [4, s_1' - 1]$ on a

$$\text{(2.74)} \quad \frac{\omega}{2^{\sigma+1}}\left|A_{\mu_1-\frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0,\ \rho;\ t)\right| \leqslant \beta_0\rho \int_{\mathfrak{D}_\sigma(t)} |\nabla u(x,\ t)|\, dx$$

où

$$\mathfrak{D}_\sigma(t) = A_{\mu_1 - \frac{\omega}{2^\sigma}}(x_0, \rho ; t) - A_{\mu_1 - \frac{\omega}{2^{\sigma+1}}}(x_0, \rho ; t), \quad \forall t \in [0, \theta\rho^2]$$

D'autre part, on a par (2.29), avec $R = 2\rho$ et $k = \mu_1 - \dfrac{\omega}{2^\sigma}$,

$$\int_0^{\theta\rho^2} \int_{\mathfrak{D}_\sigma(t)} |\nabla u|^2 \, dx \, dt \leqslant \left| u^{\left(\mu_1 - \frac{\omega}{2^\sigma}\right)} \right|^2_{\Lambda(x_0, \rho ; 0, \theta\rho^2)}$$
$$\leqslant c \left\{ \rho^{-2} \left(\mu_1 - \mu_1 + \frac{\omega}{2^\sigma} \right)^2 \chi_N (2\rho)^N \theta \rho^2 + [[\chi_N (2\rho)^N]^{r/q} \theta \rho^2]^{2/r(1+\chi)} \right\}$$

(puisque $u^{(k)}(x, 0) =$ en $\Omega(x_0, 2\rho)$ par (2.71)).

En raisonnant comme dans la première partie de la démonstration du lemme 2.3 on arrive à

$$(2.75) \quad (s_1' - 4) \left| Q_{\mu_1 - \frac{\omega}{2^{s_1'}}}(x_0, \rho ; \; 0, \theta\rho^2) \right|^2 \leqslant \bar{c}' \rho^{2(N+2)}$$

ce qui donne, par (2.68)

$$(2.76) \qquad \left| Q_{\mu_1 - \frac{\omega}{2^{s_1'}}}(x_0, \rho ; \; 0, \theta\rho^2) \right| \leqslant \theta_1' \rho^{N+2}.$$

La démonstration suit comme dans le cas cité avec application du lemme 2.2′, (i), pour $k = \mu_1 - \dfrac{\omega}{2^{s_1'}}$ à la place du lemme 2.2, (ii).

Donc on a (2.66).

Finalement si (2.72) est vérifié la démonstration se fait d'une matière analogue et nous nous dispensons de l'indiquer.

Revenons maintenant au cas $N = 1$. D'une façon parallèle à celle employée dans le § 7 du chapitre II de [6] on peut adapter à ce cas la théorie développée dans cette sous-section. Ainsi, en choisissant, par exemple, $\rho_0' = \min\left(1, \dfrac{|\Omega|}{2}\right)$, on obtient encore les lemmes 2.3 et 2.3′ pour $N = 1$.

Dans la suite on supposera donc $N \geqslant 1$.

2.3. Démonstration du théorème II.

Soit $(x_0, t_0) \in \bar{\Lambda}$. Posons

$$(2.77) \quad \rho_1(x_0, t_0) = \min\left(\rho_0(x_0), \sqrt{\frac{t_0}{\theta}}\right), \qquad \text{si} \quad t_0 > 0.$$

Les lemmes 2.3 et 2.3′ entraînent, compte tenu du lemme 5.8 du chapitre II de [6], les deux lemmes suivants :

LEMME 2.4. — *Soit* $(x_0, t_0) \in \overline{\Lambda}$ *avec* $t_0 > 0$ *et soit*

$$\rho \leqslant \rho_1(x_0, t_0).$$

Alors on a

$$\text{osc.}\ (u;\ \Lambda(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)) \leqslant c\rho_1^{-\delta}\rho^{\delta}$$

où

$$\delta = \min\left(-\log_4\left(1 - \frac{1}{2^{s_1+1}}\right), \frac{N\chi}{2}\right).$$

$$c = 4^{\delta} \max\left(\omega_0,\ 2^{s_1+1+\frac{N\chi}{2}}\ \rho_1^{\frac{N\chi}{2}}\right)$$

$$\omega_0 = \text{osc.}\ (u;\ \Lambda(x_0, \rho_1; t_0 - \theta\rho_1^2, t_0)).$$

LEMME 2.4′. — *Supposons* $u_0 \in \mathbf{K} \cap C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, $\lambda \in]0, 1]$ *avec* $[u_0]_{\lambda,\Omega} \leqslant 1$. *Soient* $x_0 \in \overline{\Omega}$ *et* $\rho \leqslant \rho_0(x_0)$. *Alors on a*

$$\text{osc.}\ (u;\ \Lambda(x_0, \rho; 0, \theta\rho^2)) \leqslant c'\rho_0^{-\beta}\rho^{\beta}$$

où

$$\beta = \min\left(-\log_4\left(1 - \frac{1}{2^{s'_1+1}}\right), \gamma\right), \quad \gamma = \min\left(\lambda, \frac{N\chi}{2}\right),$$

$$c' = 4^{\beta} \max\left(\overline{\omega}_0,\ 2^{s'_1+1+\gamma}\rho_0^{\gamma}\right),$$

$$\overline{\omega}_0 = \text{osc.}\ (u;\ \Lambda(x_0, \rho; 0, \theta\rho_0^2)).$$

Donc, avec

$$c = c(N, \Omega, T, a, \bar{a}, p, s, \lambda)$$

$$\alpha = \min(\delta, \beta) = \alpha(N, \Omega, T, a, \bar{a}, p, s, \lambda) \quad \text{on a :}$$

THÉORÈME 2.5. — *Supposons* $u_0 \in \mathbf{K} \cap C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, $\lambda \in]0, 1]$ *avec* $[u_0]_{\lambda,\Omega} \leqslant 1$. Alors

$$(2.78) \quad \text{osc.}\ (u;\ \Lambda(x_0, \rho; t_0 - \theta\rho^2, t_0)) \leqslant c \max\left(\frac{\omega_0}{\rho_1^{\alpha}}, 1\right)\rho^{\alpha}$$

$$\forall \rho \leqslant \rho_1(x_0, t_0) \qquad si \qquad (x_0, t_0) \in \overline{\Lambda} \quad et \quad t_0 > 0,$$

$$(2.79) \quad \text{osc.}\ (u;\ \Lambda(x_0, \rho; 0, \theta\rho^2)) \leqslant c \max\left(\frac{\overline{\omega}_0}{\rho_0^{\alpha}}, 1\right)\rho^{\alpha}$$

$$\forall \rho \leqslant \rho_0(x_0) \qquad si \qquad x_0 \in \overline{\Omega}.$$

Sous les hypothèses du théorème 2.5 on a alors

COROLLAIRE 2.6. — *Si* $(x_0, t_0) \in \overline{\Lambda}$ *et* $t_0 \geqslant \theta\rho_0'^2$ *on a*

$$(2.80)\quad \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ t_0 - \theta\rho^2,\ t_0)) \leqslant c\rho^\alpha, \qquad \forall\rho \leqslant \rho_0'$$

Si $x_0 \in \overline{\Omega}$ *on a*

$$(2.81)\quad \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ 0,\ \theta\rho^2)) \leqslant c\rho^\alpha, \qquad \forall\rho \leqslant \rho_0'.$$

Démonstration. — Commençons par établir (2.80).

Si $x_0 \in \Gamma$ ou dist $(x_0, \Gamma) \geqslant \rho_0'$, (2.80) est une conséquence immédiate de (2.76). Supposons donc $x_0 \in \Omega$ et

$$\text{dist.}(x_0,\ \Gamma) = \rho_0(x_0) < \rho_0'.$$

Soit $y \in \Gamma$ tel que $\rho_0(x_0) = \text{dist.}(x_0,\ y)$. Alors ou

(i) $\qquad \rho_0(x_0) < \rho_0'/2$

ou

(ii) $\qquad \rho_0(x_0) \geqslant \rho_0'/2$

Dans l'hypothèse (i) distinguons les trois cas :

(i.1) $\qquad 0 < \rho < \rho_0(x_0) < \rho_0'/2$

(i.2) $\qquad 0 < \rho_0(x_0) \leqslant \rho < \rho_0'/2$

(i.3) $\qquad \rho_0'/2 \leqslant \rho < \rho_0'$

Cas (i.1) :

On a, par (2.78),

$$\begin{aligned}(2.82)\quad & \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho_0;\ t_0 - \theta\rho_0^2,\ t_0)) \\ & \leqslant \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(y,\ 2\rho_0;\ t_0 - \theta(2\rho_0)^2,\ t_0)) \\ & \leqslant c \max\left(\frac{\text{osc.}\,(u;\ \Lambda(y,\ \rho_0';\ t_0 - \theta\rho_0'^2,\ t_0))}{\rho_0'^\alpha},\ 1\right)(2\rho_0)^\alpha \\ & \leqslant c\rho_0^\alpha\end{aligned}$$

(où c désigne une constante du type cité dans le théorème 2.5).

D'autre part, il vient aussi de (2.78),

$$\begin{aligned}(2.83)\quad & \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ t_0 - \theta\rho^2,\ t_0)) \\ & \leqslant c \max\left(\frac{\text{osc.}\,(u;\Lambda(x_0, \rho_0; t_0 - \theta\rho_0^2, t_0)}{\rho_0^\alpha},\ 1\right)\rho^\alpha\end{aligned}$$

De (2.82) et (2.83) on en déduit (2.80).

Cas (i.2) :

Par (2.78) il vient

$$\begin{aligned}\text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho\,;\ t_0 - \theta\rho^2,\ t_0)) & \\ \leqslant \operatorname{osc}(u;\ \Lambda(y,\ 2\rho\,;\ t_0 - \theta(2\rho)^2,\ t_0)) & \\ \leqslant c(2\rho)^\alpha, \qquad \text{ce qui entraîne} & \qquad (2.80).\end{aligned}$$

Cas (i.3) :

(2.80) est immédiatement vérifiée, puisque, dans ce cas,

$$\operatorname{osc}(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho\,;\ t_0 - \theta\rho^2,\ t_0)) \leqslant 2 \leqslant 2\left(\frac{\rho}{\rho_0'/2}\right)^\alpha \leqslant c\rho^\alpha$$

Dans l'hypothèse (ii) distinguons deux cas :

(ii.1) $\rho \geqslant \rho_0(x_0)$

(ii.2) $\rho < \rho_0(x_0)$

Dans le cas (ii.1) il vient $\rho \geqslant \rho_0'/2$ et donc (2.8) est immédiate. Dans le cas (ii.2) il vient de (2.78)

$$\operatorname{osc}(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho\,;\ t_0 - \theta\rho^2,\ t_0)) \leqslant c\max\left(\frac{2}{\rho_0^\alpha},\ 1\right)\rho^\alpha$$

ce qui entraîne (2.80), puisque $\rho_0(x_0) \geqslant \dfrac{\rho_0'}{2}$.

La démonstration de (2.81) se fait d'une façon analogue en utilisant (2.79) à la place de (2.78).

Corollaire 2.7. — *Si* $(x_0,\ t_0) \in \overline{\Lambda}$ *et* $0 < t_0 \leqslant \theta\rho_0^2(x_0)$ *alors on a* (2.80).

Démonstration. — L'hypothèse de l'énoncé entraîne

$$\rho_1(x_0,\ t_0) = \sqrt{\frac{t_0}{\theta}}, \quad \text{i.e.,} \qquad t_0 = \theta\rho_1^2.$$

Distinguons les deux cas

(i) $0 < \rho < \rho_1 \leqslant \rho_0'$

(ii) $0 < \rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_0'$

Voyons le cas (i) :
Par (2.81) il vient

$$(2.84)\quad \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho_1;\ t_0 - \theta\rho_1^2,\ t_0)) \\ = \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho_1;\ 0,\ \theta\rho_1^2)) \leqslant c\rho_1^\alpha$$

Mais, de (2.78) il vient

$$(2.85)\quad \text{osc.}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ t_0 - \theta\rho^2,\ t_0)) \\ \leqslant c \max\left(\frac{\text{osc}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho_1;\ t_0 - \theta\rho_1^2,\ t_0))}{\rho_1^\alpha},\ 1\right)\rho^\alpha$$

De (2.84) et (2.85) on obtient (2.80).
Voyons maintenant le cas (ii) :
Par (2.81) il vient

$$\text{osc}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ t_0 - \theta\rho^2,\ t_0)) \leqslant \text{osc}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ 0,\ \theta\rho^2)) \leqslant c\rho^\alpha.$$

Corollaire 2.8. — *Si* $(x_0, t_0) \in \overline{\Lambda}$ *et* $\theta\rho_0^2(x_0) < t_0 < \theta\rho_0'^2$ *alors on a* (2.80).

La démonstration du corollaire 2.8 est analogue à celle du corollaire 2.6 pourvu qu'on utilise le corollaire 2.7 pour majorer l'oscillation dans les cylindres dont l'axe passe par le point $y (y \in \Gamma,\ \text{dist}\,(x_0,\ y) = \rho_0(x_0))$.

Ainsi sous les hypothèses du théorème 2.5 on a

$$(2.86)\quad \text{osc}\,(u;\ \Lambda(x_0,\ \rho;\ t_0 - \theta\rho^2,\ t_0)) \leqslant c\rho^\alpha, \\ \forall (x_0,\ t_0) \in \overline{\Lambda}, \qquad \forall \rho \leqslant \rho_0'$$

Soient $(x,\ t),\ (x',\ t') \in \Lambda$. Supposons d'abord

$$\max\left[|x - x'|,\ \left(\frac{|t - t'|}{\theta}\right)^{1/2}\right] < \rho_0'.$$

Il vient de (2.86)

$$|u(x,\ t) - u(x',\ t')| \leqslant c \max\left[|x - x'|,\ \left(\frac{|t - t'|}{\theta}\right)^{1/2}\right]^\alpha \\ \leqslant c\,(|x - x'|^\alpha + |t - t'|^{\alpha/2}).$$

Supposons maintenant

$$\max\left[|x - x'|,\ \left(\frac{|t - t'|}{\theta}\right)^{1/2}\right] \geqslant \rho_0'.$$

Il vient

$$|u(x,\ t) - u(x',\ t')| \leqslant 2\rho_0'^{-\alpha} \max\left[|x - x'|,\ \left(\frac{|t - t'|}{\theta}\right)^{1/2}\right]^\alpha \\ \leqslant c\,(|x - x'|^\alpha + |t - t'|^{\alpha/2}).$$

Donc, on a

$$u \in C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda}), \qquad \alpha \in]0, \lambda]$$

et, de plus,

$$[u]_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} \leqslant c,$$

où c et α ne dépendent que de N, Ω, T, a, $\bar{a}$, p, s et λ.

Pour achever la démonstration du théorème II nous allons maintenant nous débarrasser des hypothèses (2.20) et

$$[u_0]_{\lambda,\Omega} \leqslant 1.$$

Soit alors

$$\omega = [u_0]_{\lambda,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Lambda} + \|\Phi\|^{1/2}_{p,s,\Lambda} > 0$$

et posons

$$\tilde{u} = \omega^{-1}u, \quad \tilde{B}_k(x, t, y, z) = \omega^{-1}B_k(x, t, \omega y, \omega z), \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Puisque $\mathbf{K} = \omega\, \mathbf{K}$ il est aisé de voir que $\tilde{u}$ vérifie (0.13), (i) avec les B_k remplacés par les $\tilde{B}_k$.

De plus, on a, compte tenu de (2.4), et avec

$$\tilde{f}_1 = \omega^{-2}f_1, \qquad \tilde{g}_1 = \omega^{-1}g_1, \qquad \tilde{h}_1 = \omega^{-1}h_1 :$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \tilde{B}_i(x, t, \tilde{u}, \nabla\tilde{u}).D_i\tilde{u}(x, t) \geqslant a|\nabla\tilde{u}(x, t)|^2 - \tilde{f}_1(x, t) \\ |\tilde{B}_0(x, t, \tilde{u}, \nabla\tilde{u})| \leqslant d(x, t)|\nabla\tilde{u}(x, t)| + \tilde{g}_1(x, t) \\ |\tilde{B}_i(x, t, \tilde{u}, \nabla\tilde{u})| \leqslant \bar{a}|\nabla\tilde{u}(x, t)| + \tilde{h}_1(x, t), \qquad i = 1, \dots, N, \\ \qquad\qquad \text{pour presque tout} \quad (x, t) \in \Lambda. \end{cases}$$

Soit $\quad \tilde{\Phi} = \tilde{f}_1 + \|\tilde{u}\|_{\infty,\Lambda}\tilde{g}_1 + \|\tilde{u}\|^2_{\infty,\Lambda}d^2 + \tilde{h}_1^2 = \omega^{-2}\Phi$

Il vient

$$\tilde{u}_0(x) = \tilde{u}(x, 0) \in \mathbf{K} \cap C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) \text{ et } \max([\tilde{u}_0]_{\lambda,\Omega}, \|\tilde{u}\|_{\infty,\Lambda}, \|\tilde{\Phi}\|_{p,s,\Lambda}) \leqslant 1.$$

On en déduit, appliquant à $\tilde{u}$ la théorie antérieure :

$$\begin{cases} \tilde{u} \in C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda}), \ \alpha \in]0, \lambda] \qquad \text{et} \qquad [\tilde{u}]_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} \leqslant c, \\ \text{où } \alpha \text{ et } c \text{ dépendent de } N, \Omega, T, a, \bar{a}, p, s \text{ et } \lambda. \end{cases}$$

Donc, on a $u \in C^{0,\alpha,\alpha/2}(\overline{\Lambda})$ et

$$[u]_{\alpha,\alpha/2,\Lambda} \leqslant c.\omega = c([u_0]_{\lambda,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Lambda} + \|\Phi\|^{1/2}_{p,s,\Lambda})$$

ce qui entraîne (0.14), compte tenu de (2.2) et (0.7).

La démonstration du théorème II est ainsi complètement achevée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Beirão da Veiga, Sur la régularité des solutions de l'équation div $A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u)$ avec des conditions aux limites unilatérales et mêlées, à paraître dans les Annali Mat. Pura Appl.

[2] H. Beirão da Veiga et J. P. Dias, Continuité des solutions d'une inéquation parabolique, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 274 (1972), 192-193.

[3] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, à paraître dans le J. Math. Pures Appl.

[4] E. de Giorgi, Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multiple regolari, *Mem. Acc. Sci. Torino*, 3 (1957), 25-43.

[5] J. P. Dias, Une classe de problèmes variationnels non linéaires de type elliptique ou parabolique, à paraître dans les Annali. Mat. Pura Appl.

[6] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, « Linear and quasi-linear equations of parabolic type », *Transl. Math. Monographs, Am. Math. Soc.*, 1968.

[7] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[8] J. L. Lions and G. Stampacchia, Variational inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 (1967), 493-519.

[9] J. Nash, Continuity of the solutions of parabolic and elliptic equations, *Am. J. Math.*, 80 (1958), 931-954.

Manuscrit reçu le 22 février 1972
accepté par M. Brelot

Hugo Beirão da Veiga
et João-Paulo Dias,

Instituto de Física e Matemática,
Av. Gama Pinto, 2,
Lisboa, 4 (Portugal).