C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, p. 192-193 (10 janvier 1972) Série A

7

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *Continuité des solutions d'une inéquation parabolique.* Note (*) de MM. **Hugo Beirão da Veiga** et **João-Paulo Dias** (1), présentée par M. Jean Leray.

On énonce des résultats de régularité L^∞ et höldérienne pour les solutions d'une inéquation variationnelle parabolique associée à un problème de contrainte unilatérale sur le bord.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$, de frontière Γ, variété de dimension $N-1$ et de classe C^1 (2), Ω étant localement situé d'un seul côté de Γ.

Soient

$$(1)\quad \begin{cases} 0 < T < \infty, & \Lambda = \Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{K} = \{ u \in H^1(\Omega) \mid u \geqq 0 \text{ sur } \Gamma \}. \end{cases}$$

Soient

$$A_k : \quad \Omega \times]0, T[\times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N,$$

des fonctions mesurables en $(x, t) \in \Lambda$ pour tout $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$, $z = (z_1, \ldots, z_N)$, et continues en $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ pour presque tout $(x, t) \in \Lambda$.

On suppose qu'il existe des constantes positives a et a_1 et des fonctions b, e, d, m, f, g, h non négatives et mesurables en Λ telles que, pour tout $(y, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N$ et pour presque tout $(x, t) \in \Lambda$, on a

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} A_i(x, t, y, z).z_i \geqq a \mid z \mid^2 - b(x, t)\, y^2 - f(x, t), \\ \mid A_0(x, t, y, z) \mid \leqq d(x, t) \mid z \mid + m(x, t) \mid y \mid + g(x, t), \\ \mid A_i(x, t, y, z) \mid \leqq a_1 \mid z \mid + e(x, t) \mid y \mid + h(x, t), \qquad i = 1, \ldots, N, \end{cases}$$

où $\mid z \mid^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} z_i^2$.

De plus, admettons que

$$(3)\quad b, f, m, g, d^2, e^2, h^2 \in L^{p,s}(\Lambda), \quad p \text{ et } s \geqq 1,$$

avec

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{N}{2p} + \dfrac{1}{s} < 1 & \text{si } N \geqq 2, \\ \dfrac{1}{2} < \dfrac{N}{2p} + \dfrac{1}{s} < 1 & \text{si } N = 1. \end{cases}$$

On désigne par $L^{p,s}(\Lambda)$ l'ensemble des fonctions v, réelles et mesurables sur Λ, telles que

$$\left(\int_0^T \left(\int_\Omega \mid v(x, t) \mid^p dx \right)^{\frac{s}{p}} dt \right)^{\frac{1}{s}} < \infty.$$

Ceci étant, soit

$$u(x, t) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \qquad \text{avec} \quad \frac{du}{dt}(x, t) \in L^2(\Lambda) = L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

une solution du problème suivant :

Pour presque tout $t \in]0, T[$ on a

$$u(t) \in \mathbf{K}$$

et (avec $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \ldots, \partial u / \partial x_N)$,

$$\int_\Omega \frac{du}{dt}(x, t)(v(x) - u(x, t))\, dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega A_i(x, t, u, \nabla u) \frac{\partial}{\partial x_i}(v(x) - u(x, t))\, dx$$
$$+ \int_\Omega A_0(x, t, u, \nabla u)(v(x) - u(x, t))\, dx \geqq 0, \quad \forall\, v \in \mathbf{K},$$

$u(x, 0) = u_0(x)$, où u_0 est donné dans $L^2(\Omega)$.

Alors :

Théorème 1. — *Si* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *on a* $u \in L^\infty(\Lambda)$ [3].

Théorème 2. — *Si* $u_0 \in \mathbf{K} \cap C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, $\lambda \in]0, 1]$ [4], on a $u \in C(\overline{\Lambda})$. *De plus, il existe des constantes* $c > 0$, $\alpha \in]0, \lambda]$ *telles que*

$$|u(x, t) - u(x', t')| \leqq c\left(|x - x'|^\alpha + |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}\right), \quad \forall\, (x, t), (x', t') \in \overline{\Lambda}.$$

Dans un article à paraître on donnera en détail les démonstrations des théorèmes 1 et 2. En particulier, des estimations sur les normes de u seront établies.

(*) Séance du 20 décembre 1971.

(1) Chercheurs du « Instituto de Física e Matemática » (Lisbonne).

(2) On peut affaiblir cette condition.

(3) La troisième inégalité de (2) est superflue dans ce cas.

(4) On dit que $v \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ s'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que

$$|v(x) - v(x')| \leqq c_1 |x - x'|^\lambda, \quad \forall\, x, x' \in \overline{\Omega}.$$

Instituto de Física e Matemática,
Av. Gama Pinto, 2,
Lisboa, 4, Portugal.

185169. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e)
Imprimé en France