

PROPRIETÀ DI SOMMABILITÀ E DI LIMITATEZZA
PER SOLUZIONI
DI DISEQUAZIONI VARIAZIONALI ELLITTICHE

HUGO BEIRÃO DA VEIGA *)

Introduzione.

Dati $x, y \in \mathbf{R}^N$ indicheremo con $|x|$ e $x \cdot y$ rispettivamente il modulo di x ed il prodotto scalare di x e y ; rappresenteremo con (x_i) il vettore di \mathbf{R}^N di componenti x_i . Se $f(x) = (f_i(x))$ e se $f_i(x) \in X$, ove X è uno spazio di funzioni, porremo per comodità $\|f\|_X = \sum \|f_i\|_X$.

Indicheremo con Ω un aperto limitato di \mathbf{R}^N di frontiera $\partial\Omega$ e supporremo nota la definizione dello spazio $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Porremo $p' = p/(p-1)$ e, se $1 \leq p < N$, $p^* = pN/(N-p)$, $\bar{p} = (p^*)'$.

Sia $V = H^{1,\alpha}(\Omega)$ lo spazio di Sobolev¹⁾ relativo all'esponente α , $1 < \alpha < N$, V' il duale di V e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il pairing fra V' e V . Indicheremo con $A: V \rightarrow V'$ l'operatore variazionale ellittico non lineare definito da (1.18), ossia

$$(1) \quad \langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \{A(x, \nabla u) \cdot \nabla v + \lambda(x) |u|^{\alpha-2} uv\} dx, \quad \forall v \in V,$$

con $A(x, p)$ soddisfacente (1.16), (1.17).

Siano $\Phi_i: V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, $1 \leq i \leq n$, funzionali convessi s.c.i. (semi continui inferiormente) e propri ($\neq +\infty$) definiti da (1.14)²⁾ ossia

*) Indirizzo dell'A.: Instituto de Física e Matemática, Av. Gama Pinto, 2 Lisboa - 4 Portogallo.

1) Per definizioni precise vedi i numeri seguenti.

2) Per alcuni esempi semplici di tali funzioni cf. l'appendice I.

$$(2) \quad \Phi_i(v) = \int_{B_i} \varphi_i(x, \gamma_i v(x)) d\mu_i(x)$$

con B_i , μ_i , φ_i e γ_i (ed anche ξ_i) soddisfacenti l'ipotesi 1.4 scritta per $p = \alpha$; inoltre siano $\Psi_j: V \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, $1 \leq j \leq m$, m funzionali convessi, s.c.i. e propri del tipo (1.15) i.e.

$$(3) \quad \Psi_j(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v \geq \theta_j \text{ [opp. se } v \leq \theta_j] \text{ su } E_j, \\ +\infty & \text{altrove,} \end{cases}$$

ove $E_j \subset \bar{\Omega}$ è chiuso e $\theta_j \in V$. Supponiamo finalmente che esista $u_0 \in V$ per cui $\Phi_i(u_0) < +\infty$ e $\Psi_j(u_0) < +\infty$ per tutti gli indici i e j .

Dato che l'operatore A è monotono, emicontinuo, limitato e coercitivo su V la disequazione variazionale

$$(4) \quad \langle Au, v-u \rangle + \sum_{i=1}^n [\Phi_i(v) - \Phi_i(u)] + \\ + \sum_{j=1}^m [\Psi_j(v) - \Psi_j(u)] \geq \langle F, v-u \rangle, \quad \forall v \in V,$$

ammette una ed una sola soluzione $u \in V$ per ogni $F \in V'$ (cf. ad esempio [10] teor. 8.5).

Supposto F scritto sotto la forma (1.22) dimostreremo in questo lavoro risultati di regolarità del seguente tipo³⁾:

Se $f_0 \in L_s^p(\Omega)$, $f \in [L_s^q(\Omega)]^N$ e le funzioni ξ_i e θ_j relative ai funzionali Φ_i e Ψ_j (cf. (1.12)) appartengono a spazi $H^{1,s}(\Omega)$, [resp. $L^\infty(\Omega)$], con p, q e s convenienti, allora la soluzione u del problema (4) appartiene a $L_s^\beta(\Omega)$, con $\beta = \beta(p, q, s)$ [resp. a $L^\infty(\Omega)$]. Inoltre saranno dimostrate maggiorazioni per le corrispondenti norme delle soluzioni (cf. (2.39'), (2.40'), (2.42'), (2.43), p. 20). Per i dettagli rimandiamo il lettore al teorema 2.9 (cf. anche i teoremi 2.8 e 2.10).

Risultati di questo tipo si generalizzano ad operatori della forma

³⁾ Per la definizione di $L_s^p(\Omega)$ cf. la def. 1.1.

$$(5) \quad \langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \{A(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + B(x, u, \nabla u)v\} dx$$

ove $A : \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ e $B : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$, misurabili nella prima variabile e continue nelle altre due soddisfano le maggiorazioni (gli esponenti di $|y|$ possono essere aumentati. Cf. [16] teorema IV)

$$(6) \quad \begin{cases} A(x, y, p) \cdot p \geq a |p|^{\alpha} - b(x) |y|^{\alpha} - l(x), \\ |B(x, y, p)| \leq d(x) |p|^{\alpha-1} + e(x) |y|^{\alpha-1} + f(x), \\ |A(x, y, p)| \leq a^{-1} |p|^{\alpha-1} + g(x) |y|^{\alpha-1} + h(x), \end{cases}$$

con a costante positiva; la regolarità delle soluzioni u della disequazione (4) dipenderà allora dagli spazi L^p cui si suppongono appartenere le funzioni al secondo membro delle relazioni (6).

Per particolari funzionali convessi Φ tali risultati (relativi all'operatore A definito in (5)) sono stati dimostrati in [16], teor. I, II e IV⁴); cfr. anche [17]. Essendo lo scopo di questo lavoro generalizzare la forma del funzionale convesso Φ tralascieremo di considerare l'operatore più generale A per semplificare l'esposizione; A sarà dato da (1.18), (1.16), (1.17).

Il metodo seguito per dimostrare il teorema 2.9 si ricollega ad un noto metodo introdotto da G. Stampacchia (cf. ad esempio [14]).

Con la tecnica usata nel presente lavoro si possono ottenere, per le soluzioni di (4), risultati di regolarità negli spazi capacitari (introdotti in [4]).

Si osservi che in ipotesi di maggiore regolarità sui dati si possono dimostrare, in corrispondenza a particolari funzionali convessi Φ , dei risultati di regolarità più forti per le soluzioni di (1.21); cf. ad esempio [9], [3], [15], [16], [8], [6], [2], [5]. In particolare i risultati di hölderiana contenuti in [16] (teor. III e IV) si estendono facilmente e con lo stesso metodo ad una classe più ampia di disequazioni variazionali, sempre del tipo (4) (cf. anche [5]).

L'impostazione dei diversi problemi ai limiti nella forma (4) si tro-

⁴) In [16] si cercano soluzioni in particolari convessi chiusi $K \subset V$; tali problemi si possono esprimere tramite la disequazione (4) introducendo funzionali convenienti.

hölderiana

va anche in [2] ove per $\alpha=2$, A operatore lineare a coefficienti regolari, $j=0$, $i=1$, $\varphi_1(x, y)$ indipendente da x , $B_1=\partial\Omega$ e $\mu_1=\text{area su } \partial\Omega$, si dimostra che se $f \in L^p(\Omega)$, $2 \leq p < N$, allora $u \in H^{1,p^*}(\Omega)$ e quindi $u \in L^\beta(\Omega)$ con $\beta=Np/(N-2p)$. Noi invece otteniamo, in questo caso, che se $f \in L_*^p(\Omega)$ allora $u \in L_*^\beta(\Omega)$ per lo stesso β .

Infine rimandiamo il lettore all'appendice I per qualche semplice esempio e qualche considerazione su una classe di problemi caratterizzati dalla disequazione variazionale (4).

1. Definizioni e risultati noti.

Sia Ω un aperto limitato e connesso di \mathbf{R}^N di frontiera $\partial\Omega$.

DEFINIZIONE 1.1. Dato $p > 1$, indicheremo con $L_*^p(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $f(x)$ misurabili in Ω e tali che

$$(1.1) \quad |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}| \leq (A/t)^p, \quad \forall t > 0,$$

con A costante positiva; la più piccola costante A che verifica (1.1) verrà indicata con $|f|_p$.

Si vede facilmente che lo spazio vettoriale $L_*^p(\Omega)$ è completo rispetto alla quasi-norma $| \cdot |_p$. Inoltre per $1 \leq \beta < p$ si ha

$$L^p(\Omega) \subset L_*^p(\Omega) \subset L^\beta(\Omega)$$

con immersioni continue.

È ben noto il seguente risultato:

(1.2) Se $1/p + 1/q < 1$, $f \in L_*^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ allora per ogni $E \subset \Omega$ misurabile si ha

$$\int_E |fg| dx \leq c(p, q) |E|^{1-1/q-1/p} \|g\|_q |f|_p.$$

Nel seguito supporremo che Ω sia localmente dalla stessa parte di $\partial\Omega$, e che $\partial\Omega$ sia lipschitziana, i.e.:

(1.3) Dato un punto $x_0 \in \partial\Omega$ esista un sistema ortogonale di coordinate (y_1, \dots, y_N) e una funzione lipschitziana $f(y_1, \dots, y_{N-1}) = f(y')$ definita

sul cubo chiuso $N-1$ dimensionale $C = \{ |y_i| \leq 1 : 1 \leq i \leq N-1 \}$, e tale che $x_0 = (y'_0, f(y'_0))$ per un $y'_0 \in C$; inoltre esista $\beta > 0$ tale che i punti (y', y_N) per cui $y' \in C$ e $f(y') < y_N < f(y') + \beta$ appartengono a Ω ed i punti (y', y_N) per cui $y' \in C$ e $f(y') - \beta < y_N < f(y')$ appartengono al complementare di $\bar{\Omega}$.

Inoltre si suppone che con un numero finito di tali carte si ricopra tutta la frontiera $\partial\Omega$.

In queste condizioni (cf. ad esempio [11]) si hanno le seguenti proprietà:

- a) l'immersione di $H^{1,p}(\Omega)$ in $L^{p^*}(\Omega)$ è continua, $1 \leq p < N$.
- b) l'applicazione di traccia è continua di $H^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\partial\Omega)^5$.

Con $H^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, abbiamo indicato il completamento di $C^1(\bar{\Omega})$, spazio delle funzioni con prime derivate continue in $\bar{\Omega}$, rispetto alla norma

$$\|v\|_{1,p} = \|v\|_p + \|\nabla v\|_p;$$

data la regolarità di Ω segue che $H^{1,p}(\Omega) \equiv W^{1,p}(\Omega)$, spazio delle distribuzioni appartenenti con le sue derivate prime a $L^p(\Omega)$.

Dato un sottoinsieme chiuso E di Ω ed una funzione $u \in H^{1,p}(\Omega)$ diremo (cf. [14]) che $u \geq 0$ su E se esiste una successione di funzioni u_n appartenenti a $C^1(\bar{\Omega})$, $u_n \rightarrow u$ in $H^{1,p}$ e $u_n(x) \geq 0$ per ogni $x \in E$. Se $u, \theta \in H^{1,p}(\Omega)$ diremo che $u \geq \theta$ su E se $u - \theta \geq 0$ su E , ecc.

Sia μ una misura ~~su $\bar{\Omega}$~~ ^{su $\bar{\Omega}$} a supporto compatto (positiva ed a variazione limitata) in $\bar{\Omega}$ e $B \subset \bar{\Omega}$ tale che $\mu(B) = 0$. Si ha il seguente

LEMMA 1.2. *Sia γ una applicazione lineare e continua di $H^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, in $L^1_\mu(B)$, tale che*

$$(1.4) \quad \gamma v = v|_B \quad \forall v \in \text{Lip}(\bar{\Omega})^6.$$

Allora se u e ψ appartengono a $H^{1,p}(\Omega)$ si ha

$$(1.5) \quad \gamma \max(u, \psi) = \max(\gamma u, \gamma \psi).$$

⁵ Più precisamente l'applicazione di traccia è continua a valori in $H^{1/p', p}(\partial\Omega)$.

⁶ $v|_B =$ restrizione di v a B . $\text{Lip}(\bar{\Omega}) =$ spazio delle funzioni lipschitziane su $\bar{\Omega}$.

La (1.5) si estende ovviamente ad un numero finito qualunque di funzioni.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo supporre senza ledere la generalità che $\psi=0$; sia inoltre $Tz = \max(z, 0)$. Dalla (1.4) segue

$$(1.6) \quad T\gamma v = \gamma T v \quad \forall v \in \text{Lip}(\bar{\Omega}).$$

Sia $\{u_n\}$ una successione di $\text{Lip}(\bar{\Omega})$ convergente verso u in $H^{1,p}(\Omega)$; $Tu_n \rightarrow Tu$ debolmente in $H^{1,p}$ (cf. [16]) ed il teorema di Banach e Saks garantisce l'esistenza di una sottosuccessione di $\{u_n\}$, che indicheremo ancora con $\{u_n\}$, tale che

$$(1.7) \quad M_m(\{Tu_n\}) \rightarrow Tu \quad \text{in } H^{1,p}(\Omega)$$

quando $m \rightarrow +\infty$; $M_m(\{\alpha_n\})$ indica la media aritmetica $m^{-1} \sum_1^m \alpha_n$ (cf [1]). Da (1.7) segue

$$(1.8) \quad \gamma M_m(\{Tu_n\}) \rightarrow \gamma Tu \quad \text{in } L_{\mu}^1(B);$$

inoltre da (1.6) discende

$$\gamma M_m(\{Tu_n\}) = M_m(\{\gamma Tu_n\}) = M_m(\{T\gamma u_n\}),$$

relazione che assieme alla (1.8) implica

$$(1.9) \quad M_m(\{T\gamma u_n\}) \rightarrow \gamma Tu \quad \text{in } L_{\mu}^1(B)$$

D'altra parte $T\gamma u_n \rightarrow T\gamma u$ in $L_{\mu}^1(B)$ e pertanto

$$(1.10) \quad M_m(\{T\gamma u_n\}) \rightarrow T\gamma u \quad \text{in } L_{\mu}^1(B);$$

finalmente da (1.9) e (1.10) segue la tesi.

COROLLARIO 1.3. Sia $1 < p < +\infty$ e sia Γ una ipersuperficie con tenuta in $\bar{\Omega}$; se l'applicazione di traccia

$$(1.11) \quad \gamma : H^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma) \quad (\text{oppure } H^{1/p',p}(\Gamma))$$

è continua allora la (1.5) è verificata per ogni coppia $u, \psi \in H^{1,p}(\Omega)$ in particolare le operazioni di traccia e di troncatura commutano.

IPOTESI 1.4. Sia μ una misura di Borel positiva ed a variazione limitata con supporto in $\bar{\Omega}$ e sia $B \subseteq \bar{\Omega}$ tale che $\mu(\mathbf{C} B) = 0$. Sia $\varphi(x, y)$ una funzione definita su $B \times \mathbf{R}$ a valori in $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, μ -misurabile in x per tutti gli $y \in \mathbf{R}$ e convessa, s.c.i. e propria in y per μ -quasi tutti gli $x \in B$. Sia inoltre $\gamma: H^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^1_\mu(B)$ lineare e continua e supponiamo che esista $\xi(x) \in H^{1,p}(\Omega)$ per cui

$$(1.12) \quad 0 \in \partial_y \varphi(x, \gamma \xi(x))$$

per μ -quasi tutti gli $x \in B$, ove $\partial_y \varphi(x, z)$ è il subdifferenziale della funzione $\varphi(x, \cdot)$ nel punto z . Supporremo ancora che

$$(1.13) \quad \varphi(x, \gamma \xi(x)) \in L^1_\mu(B).$$

Si ha il seguente risultato

LEMMA 1.5. Nelle ipotesi 1.4 il funzionale

$$(1.14) \quad \Phi(v) = \int_B \varphi(x, \gamma v(x)) d\mu(x)$$

definito su $H^{1,p}(\Omega)$ a valori in $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ è convesso, s.c.i. e proprio.

DIMOSTRAZIONE. Per quanto riguarda la misurabilità di $\varphi(x, \gamma v(x))$ rimandiamo il lettore all'appendice II.

Da (1.12) segue $\varphi(x, \gamma v(x)) \geq \varphi(x, \gamma \xi(x))$ per quasi tutti (rispetto s'intende alla misura μ) gli $x \in B$ e perciò $\Phi(v) \geq \text{Cost.} = \Phi(\xi)$ per ogni v . Inoltre da (1.13) segue $\Phi(\xi) < +\infty$, per cui Φ è propria. Essendo evidente la convessità di Φ dimostriamo la s.c.i.: Supponiamo che $u_n \rightarrow u$ in $H^{1,p}(\Omega)$, sia $i = \liminf \Phi(u_n)$, e $i < +\infty$. Poichè $\gamma u_n \rightarrow \gamma u$ in $L^1_\mu(B)$ esiste una sottosuccessione $\{\gamma u_{\beta}\}$ tale che $\lim \Phi(u_{\beta}) = i$ e $\gamma u_{\beta}(x) \rightarrow \gamma u(x)$ quasi ovunque su B . Allora $\varphi(x, \gamma u(x)) \leq \liminf \varphi(x, \gamma u_{\beta}(x))$ q.o. su B e ne segue dal lemma di Fatou⁷⁾ che

$$\Phi(u) = \int_B \varphi(x, \gamma u(x)) d\mu(x) \leq \int_B \liminf \varphi(x, \gamma u_{\beta}(x)) d\mu(x) \leq$$

⁷⁾ Si osserva che per ogni β si ha $\varphi(x, \gamma u_{\beta}(x)) \geq \varphi(x, \gamma \xi(x)) \in L^1_\mu(B)$.

$$\leq \liminf_B \int \varphi(x, \gamma u_\beta(x)) d\mu(x) = i.$$

Siano E un sottoinsieme chiuso di $\bar{\Omega}$ e $\theta \in H^{1,p}(\Omega)$; allora

LEMMA 1.6. *Il funzionale $\Psi(v)$ definito su $H^{1,p}(\Omega)$ da ⁸⁾*

$$(1.15) \quad \Psi(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v \geq \theta \text{ (opp. } v \leq \theta) \text{ su } E, \\ +\infty & \text{altrove,} \end{cases}$$

è un funzionale convesso s.c.i. e proprio.

Infatti l'insieme $\mathbf{K} = \{v \in H^{1,p}(\Omega) : \Psi(v) = 0\}$ è convesso e chiuso.

Introduciamo ora l'operatore \mathcal{A} e la disequazione variazionale associata. Siano $A_i(x, p)$, $i = 1, \dots, N$, N funzioni reali definite su $\Omega \times \mathbf{R}^N$ misurabili in x per tutti i $p \in \mathbf{R}^N$ e continue in p per quasi tutti gli $x \in \Omega$ sia $A = (A_i)$ e supponiamo che esistano costanti positive ν , η e α ($1 < \alpha < N$), tali che per ogni $p \in \mathbf{R}^N$ si abbia

$$(1.16) \quad \begin{cases} A(x, p) \cdot p \geq \nu |p|^\alpha \\ |A(x, p)| \leq \eta |p|^{\alpha-1} \end{cases}$$

per quasi tutti gli $x \in \Omega$. Supponiamo inoltre che per quasi tutti gli $x \in \Omega$ si abbia (in (1.17) basta ≥ 0 data la (1.19))

$$(1.17) \quad (A(x, p) - A(x, q)) \cdot (p - q) > 0, \quad \text{se } p \neq q$$

Posto $V = H^{1,\alpha}(\Omega)$ consideriamo l'operatore $A : V \rightarrow V'$ così definito:

$$(1.18) \quad \langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \{A(x, \nabla u) \cdot \nabla v + \lambda(x) |u|^{\alpha-2} uv\} dx, \quad \forall v \in V$$

⁸⁾ $v \geq \theta$ è inteso nel senso introdotto a p. 8.

⁹⁾ Non consideriamo il caso $\alpha > N$ poichè $H^{1,\alpha}(\Omega) \subset C^{0,1-N/\alpha}(\bar{\Omega})$.

ove

$$(1.19) \quad \lambda(x) \geq \lambda > 0, \quad \lambda(x) \in L^{N/\alpha}(\Omega).$$

Si verifica facilmente che l'operatore A è monotono, emicontinuo, imitato e coercitivo su V . Si tenga presente che $H^{1,\alpha}(\Omega) \subset L^{\alpha^*}(\Omega)$.

All'operatore A viene associato al solito modo l'operatore differenziale in Ω

$$(1.20) \quad \mathcal{A}u = -\operatorname{div} A(x, \nabla u) + \lambda(x) |u|^{\alpha-2}u.$$

Siano dati n funzionali convessi Φ_i su V del tipo (1.14) (con B_i , $\varphi_i(x, y)$ e $\xi_i(x)$ soddisfacenti per ogni i , $1 \leq i \leq n$, l'ipotesi 1.4) e m funzionali convessi Ψ_j del tipo (1.15) (in corrispondenza a m ostacoli, E_j , θ_j). Sia inoltre verificata la seguente ipotesi di compatibilità:

IPOTESI 1.7. *Esiste $u_0 \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ per cui $\Phi_i(u_0) < +\infty$, $i=1, \dots, n$, $\Psi_j(u_0) < +\infty$, $j=1, \dots, m$.*

In queste condizioni è ben noto (cf. ad esempio [10] teor. 8.5) che dato $F \in V'$ esiste ed è unica la funzione $u \in V$ soluzione della disequazione variazionale (4).

Nel seguito rappresenteremo il funzionale $F \in V'$ sotto la forma

$$(1.22) \quad \langle F, v \rangle = \int_{\Omega} (f_0 v + f \cdot \nabla v) dx, \quad \forall v \in V,$$

ove $f = (f_i) \in [L^{\alpha'}(\Omega)]^N$ e $f_0 \in L^{\bar{\alpha}}(\Omega)$ con $\bar{\alpha} = (\alpha^*)'$.

OSSERVAZIONE. Possiamo sostituire (1.19) con « $\lambda(x) \geq 0$ » se (almeno) uno dei funzionali convessi che compaiono in (4) introduce una condizione di Dirichlet (opp. due ostacoli; esempio 6) su una iperficie contenuta in $\bar{\Omega}$ di misura $(N-1)$ -dimensionale non nulla; sotto questa ipotesi la condizione di coercività (cf. ad esempio [10], (1.49)) è ovviamente verificata.

2. Un risultato di regolarità.

LEMMA 2.1. Essendo $A(x, p)$ una funzione soddisfacente (1.16) si ha per quasi tutti gli $x \in \Omega$

$$(2.1) \quad A(x, p+q) \cdot p \geq v_0 |p|^{\alpha} - \eta_0 |q|^{\alpha}, \quad \forall p, q \in \mathbf{R}^n$$

ove $\eta_0 = \eta_0(v, \eta, \alpha)$, $v_0 = 2^{-\alpha}v$. Inoltre

$$(2.2) \quad |y + \zeta|^{\alpha-2} (y + \zeta) \geq 2^{1-\alpha} |y|^{\alpha-2} y - c |\zeta|^{\alpha-1} \quad \forall y, \zeta \in \mathbf{R}^n$$

con $c = c(\alpha)$.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che $A(x, p+q) \cdot p = A(x, p + q) \cdot (p+q) - A(x, p+q) \cdot q$ ed applicare le (1.16).

Siano ξ_i , $1 \leq i \leq n$, le funzioni relative alla proprietà (1.12) de funzionali Φ_i , e θ_j , $1 \leq j \leq m$, le funzioni relative alla definizione de funzionali Ψ_j (cf. (1.15)). Poniamo

$$(2.3) \quad \zeta(x) = \max (\xi_1(x), \dots, \xi_n(x), \theta_1(x), \dots, \theta_m(x));$$

data una funzione $g(x) \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ indicheremo con $\bar{g}(x)$ la funzione

$$(2.4) \quad \bar{g}(x) = g(x) - \zeta(x).$$

Indicheremo nel seguito con c delle costanti dipendenti al più dall costanti $\alpha, N, v, \eta, \lambda$, da Ω e dagli esponenti di sommabilità degli spaz ai quali si suppongono appartenenti le funzioni $\lambda(x), f_0, f, \xi_i$ e θ_j ; a esempio se $f_0 \in L^p(\Omega)$ c può dipendere da p ma non dalla particolare f_0 . Inoltre il valore di una costante c può essere alterato lungo una dimostrazione senza che il simbolo usato venga cambiato.

LEMMA 2.2. Siano soddisfatte le ipotesi 1.4 (per ogni Φ_i), 1.7 (1.16) e sia u la soluzione del problema (4) con F dato da (1.22); allora per ogni reale non negativo k si ha

$$(2.5) \quad \int_{A(k)} |\nabla \bar{u}|^{\alpha} dx + \int_{A(k)} (\bar{u} - k)^{\alpha} dx \leq$$

$$\leq c \left\{ \int_{A(k)} |\nabla \zeta|^\alpha dx + \int_{A(k)} \lambda |\zeta|^{\alpha-1} (\bar{u} - k) dx + \int_{A(k)} f_0(\bar{u} - k) dx + \int_{A(k)} f \cdot \nabla \bar{u} dx \right\}$$

ove

$$(2.6) \quad A(k) = \{x \in \Omega : \bar{u}(x) \geq k\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$(2.7) \quad v = \min(u, \zeta + k);$$

ne segue che

$$(2.8) \quad \begin{cases} \text{se } x \in A(k) : v - u = k - \bar{u} \text{ e } \nabla_i(v - u) = -\nabla_i \bar{u}; \\ \text{se } x \in \complement A(k) : v - u = 0 \text{ e } \nabla_i(v - u) = 0. \end{cases}$$

D'altra parte dal lemma 1.2, (2.3) e (2.7) segue che per μ_i -quasi tutti gli $x \in \Gamma_i$ si ha $\gamma_i \xi_i(x) \leq \gamma_i \zeta(x)$ e $\gamma_i v(x) = \min(\gamma_i u, \gamma_i \zeta + k)$ e pertanto o $\gamma_i v(x) = \gamma_i u(x)$ oppure $\gamma_i \xi_i(x) \leq \gamma_i v(x) \leq \gamma_i u(x)$; allora tenendo presente la convessità di $\varphi_i(x, \cdot)$ e (1.12) segue che $\varphi_i(x, \gamma_i v(x)) - \varphi_i(x, \gamma_i u(x)) \leq 0$; quest'ultima disuguaglianza implica

$$(2.9) \quad \Phi_i(v) - \Phi_i(u) \leq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Inoltre risulta ovviamente

$$(2.10) \quad \Psi_j(v) - \Psi_j(u) = 0, \quad \forall 1 \leq j \leq m.$$

Da (4), (2.8), (2.9) e (2.10) segue

$$- \int_{A(k)} A(x, \nabla \bar{u}(x) + \nabla \zeta(x)) \cdot \nabla \bar{u}(x) dx -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{A(k)} \lambda(x) |\bar{u} + \zeta|^{\alpha-2} (\bar{u} + \zeta)(\bar{u} - k) dx \geq \\
& \geq \int_{A(k)} f_0(k - \bar{u}) dx - \int_{A(k)} f \cdot \nabla \bar{u} dx
\end{aligned}$$

relazione che, insieme al lemma 2.1 e a (1.19), implica

$$\begin{aligned}
(2.11) \quad & \nu_0 \int_{A(k)} |\nabla \bar{u}|^\alpha dx + 2^{1-\alpha} \lambda \int_{A(k)} |\bar{u}|^{\alpha-2} \bar{u}(\bar{u} - k) dx \\
& \leq \eta_0 \int_{A(k)} |\nabla \zeta|^\alpha dx + c \int_{A(k)} \lambda(x) |\zeta|^{\alpha-1} (\bar{u} - k) dx - \\
& \quad - \int_{A(k)} f_0(k - \bar{u}) dx + \int_{A(k)} f \cdot \nabla \bar{u} dx.
\end{aligned}$$

Poichè $0 \leq \bar{u} - k \leq \bar{u}$ su $A(k)$ si ha

$$(2.12) \quad \int_{A(k)} |\bar{u}|^{\alpha-2} \bar{u}(\bar{u} - k) dx \geq \int_{A(k)} (\bar{u} - k)^\alpha dx.$$

Da (2.11) e (2.12) segue la tesi.

LEMMA 2.3. *Supponiamo verificate le ipotesi del lemma 2.2 e supponiamo che $f_0 \in L^p(\Omega)$, $f \in [L^{p^*}(\Omega)]^N$ e $\zeta \in H^{1,s}(\Omega)$, con*

$$(2.13) \quad s = (\alpha - 1)p.$$

Inoltre sia $\lambda \in L^{(N/\alpha)^+}(\Omega)$ se $p = N/\alpha$, e $\lambda \in L^p(\Omega)$ se $p > N/\alpha$. Allora

$$(2.14) \quad |A(h)| \leq c \frac{H^{\alpha^*/\alpha}}{(h-k)^{\alpha^*}} |A(k)|^{\alpha^*(1/\alpha-1/s)}, \quad \forall h > k \geq 0$$

ove

$$2.15) \quad H = \begin{cases} \|\nabla \zeta\|_s^\alpha + \|\lambda\|_{N/\alpha}^{\alpha/(\alpha-1)} \|\zeta\|_{s^*}^\alpha + |f_0|_p^{\alpha/(\alpha-1)} + |f|_{p^*}^{\alpha/(\alpha-1)} \\ \|\nabla \zeta\|_N^\alpha + \|\lambda\|_{(N/\alpha)_+}^{\alpha/(\alpha-1)} \|\zeta\|_{1,N}^\alpha + |f_0|_p^{\alpha/(\alpha-1)} + |f|_{p^*}^{\alpha/(\alpha-1)} \\ \|\nabla \zeta\|_s^\alpha + \|\lambda\|_p^{\alpha/(\alpha-1)} \|\zeta\|_\infty^\alpha + |f_0|_p^{\alpha/(\alpha-1)} + |f|_{p^*}^{\alpha/(\alpha-1)} \end{cases}$$

rispettivamente se $\bar{\alpha} < p < N/\alpha$, $p = N/\alpha$ o $N/\alpha < p < N$. Con $(N/\alpha)_+$ abbiamo indicato un qualunque reale maggiore di N/α .

Saranno utili nel seguito le seguenti relazioni:

$$2.15') \quad \begin{cases} \bar{\alpha} < p < N/\alpha \Leftrightarrow \alpha' < p^* < N/(\alpha-1) \Leftrightarrow \alpha < s < N, \\ p = N/\alpha \Leftrightarrow p^* = N/(\alpha-1) \Leftrightarrow s = N, \\ N/\alpha < p < N \Leftrightarrow N(\alpha-1) < p^* < +\infty \Leftrightarrow N < s < +\infty. \end{cases}$$

Consideriamo dapprima il caso $\bar{\alpha} < p < N/\alpha$; poichè $\alpha/N + 1/\alpha^* + (\alpha-1)/s^* + (\alpha-1)(1/\alpha - 1/s) = 1$, segue dalla disuguaglianza di Hölder dalla immersione di $H^{1,\alpha}(\Omega)$ in $L^{\alpha^*}(\Omega)$ che

$$2.16) \quad \int_{A(k)} \lambda |\zeta|^{\alpha-1} (\bar{u} - k) dx \leq \|\lambda\|_{N/\alpha} \|\zeta\|_{s^*}^{\alpha-1} \left(\int_{A(k)} (\bar{u} - k)^{\alpha^*} dx \right)^{1/\alpha^*} \cdot |A(k)|^{(\alpha-1)(1/\alpha - 1/s)}$$

Da (2.5), (2.16) e (1.2) risulta

$$2.17) \quad \int_{A(k)} |\nabla \bar{u}|^\alpha dx + \int_{A(k)} (\bar{u} - k)^\alpha dx \leq c \left(\|\nabla \zeta\|_s^\alpha |A(k)|^{1-\alpha/s} + \|\lambda\|_{N/\alpha} \|\zeta\|_{s^*}^{\alpha-1} \cdot \left(\int_{A(k)} (\bar{u} - k)^{\alpha^*} dx \right)^{1/\alpha^*} |A(k)|^{(\alpha-1)(1/\alpha - 1/s)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + |f_0|_p \left(\int_{A(k)} (\bar{u} - k)^{\alpha^*} dx \right)^{1/\alpha^*} |A(k)|^{1/\bar{\alpha} - 1/p} + \\
& + |f|_{p^*} \left(\int_{A(k)} |\nabla \bar{u}|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} |A(k)|^{1/\alpha' - 1/p^*};
\end{aligned}$$

da (2.17) si deduce facilmente che

$$\begin{aligned}
(2.18) \quad & \int_{A(k)} |\nabla \bar{u}|^\alpha dx + \int_{A(k)} (\bar{u} - k)^\alpha dx \leq \\
& \leq c \{ \|\nabla \zeta\|_s^\alpha |A(k)|^{1-\alpha/s} + \|\lambda\|_{N/\alpha} \|\zeta\|_{s^*}^{\alpha-1} \cdot \\
& \cdot \left(\int_{A(k)} (\bar{u} - k)^{\alpha^*} dx \right)^{1/\alpha^*} |A(k)|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/s)} + \\
& + |f_0|_p \left(\int_{A(k)} (\bar{u} - k)^{\alpha^*} dx \right)^{1/\alpha^*} |A(k)|^{1/\alpha' - 1/p^*} + \\
& + |f|_{p^*}^{\alpha/(\alpha-1)} |A(k)|^{[\alpha/(\alpha-1)](1/\alpha' - 1/p^*)}.
\end{aligned}$$

Finalmente da (2.18) e dalla maggiorazione di Sobolev $\|w\|_{\alpha^*} \leq c \|w\|_{1,\alpha}$ applicata alla funzione $w = v - u$ (cf. (2.8)) si ricava con qualche calcolo la maggiorazione

$$(2.19) \quad \left(\int_{A(k)} (\bar{u} - k)^{\alpha^*} dx \right)^{\alpha/\alpha^*} \leq cH |A(k)|^{1-\alpha/s}$$

con H dato da (2.15.1). Se $h > k$ dalla (2.19) e dalla maggiorazione

$$|A(h)|^{\alpha/\alpha^*} (h - k)^\alpha \leq \left(\int_{A(k)} (\bar{u} - k)^{\alpha^*} dx \right)^{\alpha/\alpha^*}$$

segue la (2.14).

Gli altri due casi si dimostrano allo stesso modo: se $p = N/\alpha$ si ha che $\lambda \in L^t(\Omega)$ con $1/t = \alpha/N - 1/\delta$, $\delta > 0$. Allora dalla disuguaglianza

Hölder si ricava la maggiorazione

$$(2.20) \quad \int_{A(k)} \lambda |\zeta|^{\alpha-1} (\bar{u}-k) dx \leq \\ \leq \|\lambda\|_t \|\zeta\|_{(\alpha-1)/\delta}^{\alpha-1} \left(\int_{A(k)} (\bar{u}-k)^{\alpha^*} dx \right)^{1/\alpha^*} \cdot \\ \cdot |A(k)|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/N)},$$

poichè $\|\zeta\|_{(\alpha-1)/\delta} \leq c \|\zeta\|_{1,r} \leq c \|\zeta\|_{1/N}$, con r tale che $r^* = (\alpha-1)/\delta$, da (2.20) segue

$$\int_{A(k)} \lambda |\zeta|^{\alpha-1} (\bar{u}-k) dx \leq c \|\lambda\|_t \|\zeta\|_{1/N}^{\alpha-1} \cdot \\ \cdot \left(\int_{A(k)} (\bar{u}-k)^{\alpha^*} dx \right)^{1/\alpha^*} |A(k)|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/N)},$$

questa maggiorazione sostituisce la (2.16); la dimostrazione prosegue come prima.

Se invece $p > N/\alpha$ la (2.16) si sostituisce con

$$\int_{A(k)} \lambda |\zeta|^{\alpha-1} (\bar{u}-k) dx \leq \|\lambda\|_p \|\zeta\|_{\infty}^{\alpha-1} \cdot \\ \cdot \left(\int_{A(k)} (\bar{u}-k)^{\alpha^*} dx \right)^{1/\alpha^*} |A(k)|^{(\alpha-1)(1/\alpha-1/s)}.$$

COROLLARIO 2.4. *Supponiamo verificate le ipotesi del lemma 2.2 e supponiamo inoltre che $f_0 \in L_*^p(\Omega)$, $f \in [L_*^{p^*}(\Omega)]^N$, $\zeta \in H^{1,s}(\Omega)$ con s dato da (2.13). Si hanno i seguenti risultati:*

a) se $\bar{\alpha} < p < N/\alpha$ allora

$$(2.21) \quad |\{u - \zeta \geq t\}| \leq (cH^{1/\alpha} t^{-1})^{s^*}, \quad \forall t > 0$$

con H dato da (2.15.1).

b) se $p=N/\alpha$ e $\lambda \in L^{(N/\alpha)+}(\Omega)$ allora

$$(2.22) \quad | \{u - \zeta \geq t\} | \leq e | \Omega | \exp(-cH^{-1/\alpha}t), \quad \forall t > 0,$$

con H dato da (2.15.2).

c) se $p > N/\alpha$ e $\lambda \in L^p(\Omega)$ allora

$$(2.23) \quad u - \zeta \leq cH^{1/\alpha} \quad \text{q.o. in } \Omega$$

con H dato da (2.15.3).

Il corollario è una semplice conseguenza del lemma 2.3 e del seguente lemma di G. Stampacchia¹⁰⁾ applicato alla funzione $\varphi(t) = |A(t)|$:

LEMMA 2.5. Sia $\varphi(t)$ una funzione reale definita per $t \geq 0$, non negativa e non decrescente, tale che per $h > k \geq 0$ si abbia:

$$\varphi(h) \leq z(h-k)^{\mu} [\varphi(k)]^{\beta}$$

con z, μ e β costanti positive. Allora si ha:

a) se $\beta < 1$:

$$\varphi(t) \leq \frac{z^{\mu/(1-\beta)^2} z^{1/(1-\beta)}}{t^{\mu/(1-\beta)}}.$$

b) se $\beta = 1$:

$$\varphi(t) \leq e\varphi(0) \exp[-(ez)^{-1/\mu}t].$$

c) se $\beta > 1$:

$$\varphi(t_0) = 0$$

per $t_0 \geq z^{1/\mu} 2^{\beta/(\beta-1)} [\varphi(0)]^{(\beta-1)/\mu}$.

Indicheremo ora con ζ' la funzione

$$(2.24) \quad \zeta'(x) = -\min(\xi_1, \dots, \xi_n, \theta_1, \dots, \theta_m);$$

¹⁰⁾ Cf. [12] per i casi a) e c), e [13] per il caso b).

si ha il seguente risultato:

COROLLARIO 2.6. *Supponiamo verificate le ipotesi del lemma 2.2 e supponiamo inoltre che $f_0 \in L^p(\Omega)$, $f \in [L^p_*(\Omega)]^N$, $\zeta' \in L^s(\Omega)$ con s dato da (2.13). Allora:*

a) se $\bar{\alpha} < p < N/\alpha$ si ha

$$(2.25) \quad | \{-u - \zeta' \geq t\} | \leq (cH^{1/\alpha} t^{-1})^{s*}, \quad \forall t > 0,$$

con H^1 dato da (2.15.2) e con ζ' al posto di ζ .

b) se $p = N/\alpha$ e $\lambda \in L^{(N/\alpha)+}$ allora si ha

$$(2.26) \quad | \{-\zeta' - u \geq t\} | \leq e |\Omega| \exp(-cH^{-1/\alpha} t), \quad \forall t > 0,$$

con H^1 dato da (2.15.3) e con ζ' al posto di ζ .

c) se $p > N/\alpha$ e $\lambda \in L^p(\Omega)$ si ha

$$(2.27) \quad -u - \zeta' \leq cH^{1/\alpha}$$

con H^1 dato da (2.15.3) e ζ' al posto di ζ .

DIMOSTRAZIONE. Posto $\tilde{\varphi}_i(x, y) = \varphi_i(x, -y)$ segue da (1.12) che

$$(2.28) \quad 0 \in \partial_y \tilde{\varphi}_i(x, -\gamma \xi_i(x)).$$

Definiamo

$$(2.29) \quad \tilde{\Phi}_i(v) = \int_{\tilde{B}_i} \tilde{\varphi}_i(x, \gamma v(x)) d\mu_i(x) \equiv \Phi_i(-v), \text{ e}$$

$$(2.30) \quad \tilde{\Psi}_j(v) = \Psi_j(-v) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } v \leq -\theta_j \text{ (resp. } \geq) \text{ su } E, \\ +\infty & \text{altrove.} \end{cases}$$

Finalmente poniamo

$$(2.31) \quad \tilde{A}(x, p) = -A(x, -p);$$

la funzione \tilde{A} soddisfa in particolare la proprietà (1.16).

Con la notazione introdotta la (4) si scrive

$$\begin{aligned}
 (2.32) \quad & \int_{\Omega} \tilde{A}(x, \nabla(-u)) \cdot \nabla(w - (-u)) dx + \\
 & + \int_{\Omega} \lambda |-u|^{\alpha-2} (-u)(w - (-u)) dx + \sum_i [\tilde{\Phi}_i(w) - \tilde{\Phi}_i(-u)] + \\
 & + \sum_j [\tilde{\Psi}_j(w) - \tilde{\Psi}_j(-u)] \geq \int_{\Omega} -f_0(w - (-u)) dx + \\
 & + \int_{\Omega} -f \cdot \nabla(w - (-u)) dx, \quad \forall w \in V.
 \end{aligned}$$

Applicando il corollario 2.4 alla soluzione $-u$ di (2.32) si ottengono i risultati descritti nel corollario 2.6. Si tenga presente che le funzioni $-\xi_i$ e $-\theta_j$ svolgono ora il ruolo delle ξ_i e θ_j ; nel caso anteriore, come segue dalle (2.28) e (2.30); inoltre da (2.24) risulta

$$\zeta' = \max(-\xi_1, \dots, -\xi_n, -\theta_1, \dots, -\theta_m);$$

si osservi finalmente che $(\overline{-u}) = -\zeta' - u$.

LEMMA 2.7. *Siano verificate le ipotesi del lemma 2.2, sia u la soluzione di (4), ζ e ζ' le funzioni definite in (2.3) e (2.24) e sia $f_0 \in L^p(\Omega)$, $f \in [L^{p^*}(\Omega)]^N$, $\zeta, \zeta' \in H^{1,s}(\Omega)$ con s dato da (2.13). Allora*

a) se $\bar{\alpha} < p < N/\alpha$, si ha

$$(2.33) \quad | \{ |u| \geq t \} | \leq \left(c \frac{H^{1/\alpha} + H^{1/\alpha} + |\zeta|_{s^*} + |\zeta'|_{s^*}}{t} \right)^{s^*}$$

b) se $p = N/\alpha$ e $\lambda \in L^{(N/\alpha)^+}$ si ha

$$(2.34) \quad | \{ |u| \geq t \} | \leq c \exp \{ -c [H^{1/\alpha} + H^{1/\alpha} + \|\zeta\|_{1,N} + \|\zeta'\|_{1,N}]^{-1} t \}.$$

c) se $N > p > N/\alpha$ e $\lambda \in L^p(\Omega)$ si ha

$$(2.35) \quad \|u\|_{\infty} \leq cH^{1/\alpha} + cH^{1/\alpha} + \|\zeta\|_{\infty} + \|\zeta'\|_{\infty}.$$

DIMOSTRAZIONE. Evidentemente risulta per ogni $t > 0$

$$(2.36) \quad \{|u| \geq t\} = \{u \geq t\} \cup \{-u \geq t\} \subset \\ \subset \{t/2 \leq u - \zeta\} \cup \{t/2 \leq \zeta\} \cup \{-u - \zeta' \geq t/2\} \cup \{\zeta' \geq t/2\}.$$

Da (2.36) e dai casi a) dei corollari 2.4 e 2.6 otteniamo il caso a) del presente lemma

Da (2.36) e dai casi b) dei corollari riferiti segue il caso b) del teorema. Si osservi che se $f \in [H^{1,N}(\Omega)]^N$ allora

$$(2.37) \quad \{|\sigma| \leq |f|\} \subset \exp(-c \|f\|_{L^1, N}^{-1} \sigma), \quad \forall \sigma > 0;$$

per verificare (2.37) basta 'prolungare, con continuità $H^{1,N}(\Omega)$ ad $H_0^{1,N}(\Omega')$, con $\Omega \subset \subset \Omega'$, osservare che $(\tilde{f}_j = \text{prolungata di } f_j) \Delta \tilde{f}_j = \sum_i \nabla_i (\nabla_i \tilde{f}_j)$, con $\tilde{f}_j \in H_0^{1,N}(\Omega')$, ed applicare alla soluzione \tilde{f}_j noti risultati di regolarizzazione (cf. [13]).

Finalmente il caso c) del ~~teorema~~ ^{lemma} segue dai corrispondenti casi dei corollari 2.4 e 2.6. Si osservi che $H^{1,s}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

Poniamo

$$(2.38) \quad \beta = \min \left(\frac{(\alpha-1)Np}{N-\alpha p}, \frac{(\alpha-1)Nq}{N-(\alpha-1)q}, \frac{Nr_i}{N-r_i}, \frac{Nt_j}{N-t_j} \right)^{(11)}.$$

Dal lemma 2.7 e dalle definizioni date segue immediatamente il seguente risultato.

TEOREMA 2.8. Siano soddisfatte le ipotesi 1.4, 1.7 e (1.16), sia u la soluzione di (4), e supponiamo che $f_0 \in L_*^p(\Omega)$, $f \in [L_*^q(\Omega)]^N$, $\xi_i \in H^{1,r_i}(\Omega)$, $\theta_j \in H^{1,t_j}(\Omega)$. Allora:

a) se $p > \bar{\alpha}$, $q > \alpha'$, $r_i, t_j > \alpha$, si ha $u \in L_*^\beta(\Omega)$ con β dato da (2.38), ed inoltre

¹¹⁾ Non sono da considerarsi i termini al secondo membro della (2.38) con denominatore nullo o negativo. Se ciò capita per tutti i termini allora $\beta > 1$ può essere scelto arbitrariamente grande. Di più possiamo applicare uno dei casi b) c) del teorema.

$$(2.39) \quad |u|_{\beta} \leq c \left(|f_0|_p + |f|_q \right)^{1/(\alpha-1)} + \sum_i \|\nabla \xi_i\|_{r_i} + \\ + \sum_j \|\nabla \theta_j\|_{t_j} + (1 + \|\lambda\|_{N/\alpha})^{1/(\alpha-1)} \left(\sum_i \|\xi_i\|_{r_i} + \sum_j \|\theta_j\|_{t_j} \right).$$

b) se $p \geq N/\alpha$, $q \geq N/(\alpha-1)$, $r_i, t_j \geq N$ e $\lambda \in L^{(N/\alpha)+}(\Omega)$, allora

$$(2.40) \quad |\{ |u(x)| \geq t \}| \leq c \exp(-c\mathcal{H}^{-1}t), \quad \forall t > C$$

ove

$$(2.41) \quad \mathcal{H} = (|f_0|_p + |f|_q)^{1/(\alpha-1)} + (1 + \|\lambda\|_{(N/\alpha)+})^{1/(\alpha-1)} \cdot \\ \cdot \left(\sum_i \|\xi_i\|_{1, r_i} + \sum_j \|\theta_j\|_{1, t_j} \right).$$

c) se $N/\alpha < p$, $N/(\alpha-1) < q$, $N < r_i, t_j$, e se $\lambda \in \dot{L}^{\hat{s}}(\Omega)$ con $\hat{s} > N/\alpha$, allora $u \in L^{\infty}(\Omega)$ ed inoltre

$$(2.42) \quad \|u\|_{\infty} \leq c \left((|f_0|_p + |f|_q)^{1/(\alpha-1)} + \sum_i \|\nabla \xi_i\|_{r_i} + \right. \\ \left. + \sum_j \|\nabla \theta_j\|_{t_j} + (1 + \|\lambda\|_{\hat{s}})^{1/(\alpha-1)} \left(\sum_i \|\xi_i\|_{\infty} + \sum_j \|\theta_j\|_{\infty} \right) \right).$$

Come caso particolare del teorema precedente si ottiene la proposizione seguente:

TEOREMA 2.9. Siano soddisfatte le ipotesi 1.4, 1.7 e (1.16), sia la soluzione di (4), e supponiamo che $\lambda(x) \leq c$, $f_0 \in L_*^p(\Omega)$, $f \in [L_*^q(\Omega)]$ (cf. (1.22)) $\xi_i \in H^{1, r_i}(\Omega)$, $\theta_j \in H^{1, t_j}(\Omega)$ (cf. (1.12), (1.15)); poniamo

$$(2.43) \quad \mathcal{H} = (|f_0|_p + |f|_q)^{1/(\alpha-1)} + \sum_i \|\xi_i\|_{1, r_i} + \\ + \sum_j \|\theta_j\|_{1, t_j},$$

e sia β dato da (2.38). Allora:

a) se $p > \bar{\alpha}$, $q > \alpha'$, $r_i, t_j > \alpha$, si ha $u \in L_*^{\beta}(\Omega)$ ed inoltre

$$(2.39') \quad |u|_{\beta} \leq c\mathcal{H}.$$

per p invece di \bar{s}

Proprietà di sommabilità e di limitatezza per soluzioni, ecc.

161

b) se $p \geq N/\alpha$, $q \geq N(\alpha-1)$, r_i , $t_j \geq N$, allora

$$2.40') \quad | \{ | u(x) | \geq t \} | \leq c \exp(-c\mathcal{H}^{-1}t), \quad \forall t > 0.$$

c) se $N/\alpha < p$, $N/(\alpha-1) < q$, $N < r_i$, t_j , allora $u \in L^\infty(\Omega)$ ed inoltre

$$2.42') \quad \| u \|_\infty \leq c\mathcal{H}.$$

Le ipotesi usate per ottenere la limitatezza delle soluzioni possono essere indebolite; infatti il caso c) del teorema 2.8 (analogamente per il teorema 2.9) può sostituirsi con il seguente

TEOREMA 2.10. Siano soddisfatte le ipotesi 1.4, 1.7 e ~~(1.4)~~ e sia u la soluzione di (4); supponiamo che $f_0 \in L_r^p(\Omega)$, $f \in [L_r^q(\Omega)]^N$, $\lambda \in \tilde{L}^{\bar{s}}(\Omega)$ con $p > N/\alpha$, $q > N/(\alpha-1)$, $\bar{s} > N/\alpha$ e supponiamo inoltre che ξ_i , $\theta_j \in L^\infty(\Omega)$. Allora $u \in L^\infty(\Omega)$ e

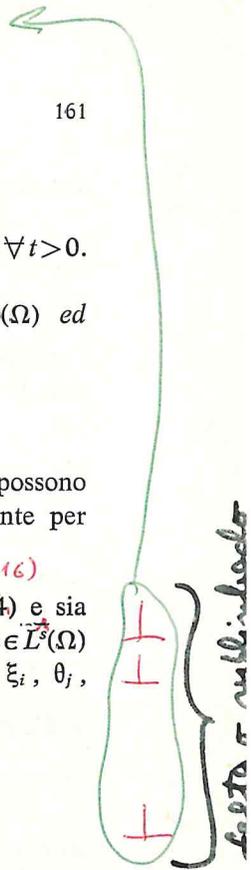
$$2.44) \quad \| u \|_\infty \leq c(|f_0|_p + |f|_q)^{1/(\alpha-1)} + (1 + \| \lambda \|_{\bar{s}})^{1/(\alpha-1)} (\sum_i \| \xi_i \|_\infty + \sum_j \| \theta_j \|_\infty).$$

Per dimostrare il teorema basta sostituire in (2.3) le funzioni $\xi_i(x)$; $\theta_j(x)$ con rispettivamente le funzioni costanti $\tilde{\xi}_i(x) = \text{Sup } \xi_i$ e $\tilde{\theta}_j(x) = \text{Sup } \theta_j(x)$ (di conseguenza si sostituiscono in (2.24) le funzioni $\xi_i(x)$; $\theta_j(x)$ con $\tilde{\xi}_i(x) = \text{Inf } \xi_i$ e $\tilde{\theta}_j(x) = \text{Inf } \theta_j$); essendo ancora verificato il lemma 2.2 la (2.44) discende immediatamente dalla (2.42).

Appendice I.

In quest'appendice daremo alcuni esempi (fra i più semplici) di problemi il cui studio si riduce allo studio di disequazioni del tipo (4).

Sia Γ una ipersuperficie contenuta in $\bar{\Omega}$, di misura d'area $\mu = S$ e supponiamo che l'applicazione di traccia $\gamma: H^{1,\alpha}(\Omega) \rightarrow L_S^\alpha(\Gamma) = L^\alpha(\Gamma)$ sia continua; sia $\varphi(x, y)$ una funzione definita su $\Gamma \times \mathbf{R}$ a valori in $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, misurabile in x e convessa, s.c.i. e propria in y ; supponiamo che esista $\xi(x) \in H^{1,\alpha}(\Omega)$ per cui la (1.12) e la (1.13) siano verifi-



cate (con $B=\Gamma$ e $d\mu=d\mathcal{I}$). Allora il funzionale

$$(1') \quad \Phi(v) = \int_{\Gamma} \varphi(x, v(x)) dS(x)$$

è convesso s.c.i. e proprio (lemma 1.5) su V . La disequazione (4) con F sotto la forma (1.22), $m=0$, $n=1$ e $\Phi_1=\Phi$ si scrive

$$(2') \quad \langle Au, v-u \rangle + \int_{\Gamma} [\varphi(x, v) - \varphi(x, u)] dS \geq \\ \geq \int_{\Omega} f_0(v-u) dx + \int_{\Omega} f \cdot \nabla(v-u) dx, \quad \forall v \in V.$$

Posto $\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^N \nabla_i f_i$, $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, le soluzioni della disequazione (2') verificano, nel senso debole usuale, l'equazione differenziale

$$(3') \quad \mathcal{E}u \equiv -\operatorname{div} A(x, \nabla u) + \lambda |u|^{q-2}u = f_0 - \operatorname{div} f$$

nel dominio $\Omega - \Gamma$; inoltre da (2') e da (3') segue almeno formalmente¹²⁾ per ogni $v \in V$

$$(4') \quad \int_{\Gamma} [\varphi(x, v) - \varphi(x, u)] dS \geq \\ \geq \int_{\partial\Omega} [f - A(x, \nabla u)] \cdot n(v-u) dS + \int_{\Gamma - \partial\Omega} [A^{+\nu}(x, \nabla u) - A^{-\nu}(x, \nabla u)] \cdot \\ \cdot \nu(v-u) dS$$

ove n , vettore unitario normale a $\partial\Omega$, è orientato verso l'esterno di Ω e ν è uno dei due vettori unitari normali nel punto x a $\Gamma - \partial\Omega$; inoltre $A^{\pm\nu}(x, (\nabla u)(x)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(z, (\nabla u)(z))$, ove $z = x \pm \varepsilon\nu$, $\varepsilon > 0$.

¹²⁾ i.e. la (4') è verificata nel senso classico se l'operatore, la soluzione e dati sono regolari.

Se $\Gamma = \partial\Omega$ otteniamo in particolare

$$(5') \quad \mathcal{E}u = f_0 - \operatorname{div} f \quad \text{su } \Omega,$$

$$(6') \quad \int_{\partial\Omega} [\varphi(x, v) - \varphi(x, u)] dS \geq \int_{\partial\Omega} (f - A) \cdot n(v - u) dS$$

per ogni $v \in V$.

OSSERVAZIONE. Siano Ω regolare, $H^{1/\alpha', \alpha}(\partial\Omega)$ lo spazio di tracce delle funzioni di $H^{1, \alpha}(\Omega)$ e $H^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega)$ il suo duale. Dato $g \in H^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega)$ esistono funzioni f_0 e f_i , $1 \leq i \leq N$, appartenenti a $L^{\alpha'}(\Omega)$ tali che

$$(7') \quad \int_{\partial\Omega} g u dS = \int_{\Omega} f_0 u dS + \int_{\Omega} f \cdot \nabla u dx,$$

ove $f = (f_i)$; dati perciò $\ell \in L^{\alpha'}(\Omega)$ e $g \in H^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega)$, posto $f_0 = \ell + f_0$, la disequazione variazionale (2') si scrive

$$(8') \quad \langle Au, v - u \rangle + \Phi(v) - \Phi(u) \geq \int_{\Omega} \ell(v - u) dx + \int_{\partial\Omega} g(v - u) dS;$$

di conseguenza la soluzione u di (2') soddisfa l'equazione

$$(9') \quad \mathcal{E}u = \ell \quad \text{su } \Omega,$$

con ℓ funzione arbitraria di $L^{\alpha'}(\Omega)$, e (formalmente)

$$(10') \quad \int_{\partial\Omega} [\varphi(x, v) - \varphi(x, u)] ds \geq \int_{\partial\Omega} (g - A \cdot n)(v - u) dS, \quad \forall v \in V,$$

con g elemento arbitrario di $H^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega)$.

Se le funzioni $A(x, p)$ sono regolari allora si può dare un senso più preciso alla (10') poichè si dimostra, servendosi della (9'), che si può definire $A(x, \nabla u) \cdot n$ come elemento di $H^{-1/\alpha', \alpha'}(\partial\Omega)$; cf. [10], n. 205.

Diamo ora alcuni esempi, fra i più semplici, di funzionali del tipo (1') e dei problemi loro associati.

ESEMPIO 1. Siano $\Gamma = \partial\Omega$, $\xi(x)$ una funzione definita su $\partial\Omega$ e φ data da

$$\varphi_1(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = \xi(x), \\ +\infty & \text{se } y \neq \xi(x); \end{cases}$$

allora (6') equivale alla condizione di Dirichlet $u(x) = \xi(x)$ su $\partial\Omega$.

ESEMPIO 2. Siano $\Gamma = \partial\Omega$ e $\varphi \equiv \varphi_2(x, y) = 0$; allora (6') equivale alla condizione di Neumann $A(x, \nabla u) \cdot n = g(x)$, $x \in \partial\Omega$, ove

$$(11') \quad g(x) = f \cdot n.$$

ESEMPIO 3. Sia $\Gamma = \partial\Omega$ e

$$\varphi_3(x, y) = \frac{k(x)}{2}(y - \xi(x))^2$$

ove $k(x) \geq 0$ e $\xi(x)$ sono definite su $\partial\Omega$; in questo caso abbiamo il cosiddetto « terzo problema ai limiti »

$$(12') \quad k(x)[u(x) - \xi(x)] + A(x, \nabla u) \cdot n = g(x), \quad x \in \partial\Omega$$

con $g(x)$ data da (11').

Per verificare che (6') implica (12') basta sostituire in (6') la funzione $v = u \pm \varepsilon \psi$ (con $\varepsilon > 0$ e ψ arbitraria su $\partial\Omega$), dividere per ε e passare al limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Per fare la verifica opposta basta osservare che $\varphi_3(x, y) \geq \varphi_3(x, z) + k(x)(z - \xi(x))(y - z)$, $\forall x \in \partial\Omega$, $\forall y, z \in \mathbf{R}$ da questa relazione e da (12') segue che l'integrando al primo membro di (6') migliora quello al secondo membro.

ESEMPIO 4. Sia $\Gamma = \partial\Omega$, $\xi(x)$ definita su $\partial\Omega$ e

$$\varphi_4(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \geq \xi(x), \\ +\infty & \text{se } y < \xi(x). \end{cases}$$

Il problema ai limiti corrispondente generalizza il cosiddetto « problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno » (cf. [7]); infatti si hanno su $\partial\Omega$ le condizioni

$$\begin{cases} u - \xi \geq 0, \\ A \cdot n - g \geq 0, \\ (A \cdot n - g)(u - \xi) \geq 0. \end{cases}$$

ESEMPIO 5 (*problemi misti*). Preso Γ come l'unione di un numero finito di ipersuperfici $\Gamma^{(i)}$ senza punti interni in comune (nella topologia di Γ), e posto

$$\varphi(x, y) = \varphi^{(i)}(x, y) \text{ se } x \in \Gamma^{(i)},$$

si ottengono problemi di tipo misto. La soluzione u soddisfa su ogni $\Gamma^{(i)}$ la condizione ai limiti relativa alla funzione $\varphi^{(i)}$; in particolare se $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}$ e se $\varphi^{(i)}(x, y) = \varphi_i(x, y)$, $i = 1, 2$, sono le funzioni introdotte negli esempi 1 e 2, otteniamo il problema misto di Dirichlet-Neumann.

ESEMPIO 6 (*ostacoli sottili*). Supponiamo che il funzionale convesso Φ sia dato da $\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$ ove $\Phi^{(1)}$ corrisponde ad esempio a un problema di frontiera e

$$\Phi^{(2)}(v) = \int_{\Gamma} \varphi^{(2)}(x, v(x)) dS,$$

con Γ sottoinsieme $N-1$ dimensionale di Ω e

$$\varphi^{(2)}(x, y) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y < \eta(x), \\ 0 & \text{se } \eta(x) \leq y \leq \xi(x), \\ +\infty & \text{se } \xi(x) < y; \end{cases}$$

$\eta(x)$ e $\xi(x)$ sono funzioni definite su $\partial\Omega$ e tali che $\eta(x) \leq \xi(x)$.

L'introduzione del funzionale convesso $\Phi^{(2)}$ nell'inequazione (2') corrisponde ad introdurre in $\Omega \times \mathbf{R}$ i due ostacoli sottili ($N-1$ dimen-

sionali)

$$S_\eta = \{(x, \eta(x)) : x \in \Gamma\}, \quad S_\xi = \{(x, \xi(x)) : x \in \Gamma\}$$

ed a imporre che il grafico $\{(x, u(x))\}$ della soluzione u rimanga fra due ostacoli S_η e S_ξ ; si possono considerare un numero finito qualunque di ostacoli. Il problema degli ostacoli sottili può anche essere affrontato con funzionali del tipo (1.15); cf. [5].

Altri tipi di funzionali Φ_i possono essere considerati, in particolare funzionali del tipo

$$\Phi(v) = \int_E \varphi(x, v(x)) dx,$$

con E sottoinsieme misurabile di Ω di misura N -dimensionale non nulla

OSSERVAZIONE. Si possono considerare dei funzionali convessi di pendenti anche dalle derivate prime; un caso semplice è quello relativo al funzionale Θ definito da

$$\Theta(v) = \int_E \theta(x, \nabla v(x)) dx$$

con $E \subset \Omega$, θ convessa, s.c.i. (nella seconda variabile) e soddisfacente $0 \in \partial_x \theta(x, \nabla \zeta(x))$, con $\zeta(x) \in H^{1, \alpha}(\Omega)$.

Per tali funzionali sono ancora verificati risultati del tipo di quelli che abbiamo dimostrato poichè le relazioni

$$(13') \quad \begin{cases} \Theta(u) \geq \Theta(\min(u, \zeta + k)) \\ \Theta(u) \geq \Theta(\max(u, \zeta + k)) \end{cases}$$

sono verificate per ogni k reale. Si possono considerare dei funzionali $\Theta(v)$, dipendenti dalle derivate prime, di tipo più generale, per cui non essendo verificate maggiorazioni del tipo (13') si riescano a valutare in modo adeguato gli incrementi $\Theta(v) - \Theta(u)$, con v , troncata genericamente della soluzione u , definita in modo conveniente.

Appendice II.

Dimostreremo in questa appendice che la funzione $\varphi(x, \gamma v(x))$ che compare nel lemma 1.5 è μ -misurabile su B per ogni $v \in H^{1,p}(\Omega)$; più precisamente dimostreremo il seguente risultato:

TEOREMA. *Sia μ una misura su B ^{con campo dei numeri} positiva ed a variazione limitata e sia*

(1'')
$$\varphi : B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

una funzione convessa, propria e s.c.i. nella seconda variabile per μ -quasi tutti gli $x \in B$ e μ -misurabile nella prima variabile per tutti gli $y \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che esista almeno una funzione reale $\xi(x)$ μ -misurabile su B per cui

(2'')
$$\varphi(x, \xi(x)) < +\infty$$

μ -q.o. su B .

(3'')
$$\varphi(x, \xi(x))$$

*può essere tirata; segue
dalla convessità
conseguenza.*

sia μ -misurabile.

Allora la funzione $\varphi(x, u(x))$ è μ -misurabile per ogni funzione reale μ -misurabile $u(x)$.

Dimostreremo questo risultato adoperando note tecniche di teoria della misura. Premettiamo il seguente lemma:

LEMMA. *Sia A un insieme μ -misurabile contenuto in B e sia $u(x)$ μ -misurabile; allora esistono funzioni semplici (e μ -misurabili) $u_n(x)$, tutte su $\mathcal{G}A$, e tali che:*

a)
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = u(x) \quad \mu\text{-q.o. in } A.$$

b) dato $x \in A$ esiste un intero positivo $N(x)$ tale che se $n > N(x)$ allora

$$(4'') \quad u_n(x) \leq u_{n+1}(x) \leq u(x)$$

per ~~u~~ quasi tutti gli $x \in A$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo per ogni indice positivo n

$$(5'') \quad \begin{cases} E_{n,i} = A \cap u^{-1}([(i-1)2^{-n}, i2^{-n})) & 1 \leq i \leq n2^n \\ \tilde{E}_{n,i} = A \cap u^{-1}([-i2^{-n}, -(i-1)2^{-n})) & 1 \leq i \leq n2^n \\ F_n = A \cap u^{-1}([n, \infty)), \\ F_n = A \cap u^{-1}((-\infty, -n)); \end{cases}$$

Evidentemente tali insiemi sono misurabili. Poniamo ¹³⁾

$$(6'') \quad u_n = \sum_{i=1}^{n2^n} [(i-1)2^{-n} \chi_{E_{n,i}} - i2^{-n} \chi_{\tilde{E}_{n,i}}] + n \chi_{F_n};$$

le u_n sono funzioni semplici, misurabili e inoltre sono nulle su $\bar{C}A$.

Fissato $x_0 \in A$ poniamo $N(x_0) > |u(x_0)|$; per ogni $n \geq N(x_0)$ il punto x_0 appartiene ad uno e uno solo degli insiemi $E_{n,i}$ o $\tilde{E}_{n,i}$ ($1 \leq i \leq n2^n$) inoltre essendo $u_{n+1}(x_0) \leq u_n(x_0) \leq u(x_0)$ vale b), ed essendo $u(x_0) - 2^{-n} < u_n(x_0) \leq u(x_0)$ vale a).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. Per ogni x per cui $\varphi(x, \cdot)$ è convessa, s.c.i. e propria e per cui $\varphi(x, \xi(x)) < +\infty$, poniamo $Y^-(x) = \{y : y < \xi(x) \text{ e } \varphi(x, y) = +\infty\}$, $Y^+(x) = \{y : \xi(x) < y \text{ e } \varphi(x, y) = +\infty\}$

$$(7'') \quad \begin{cases} a(x) = \begin{cases} \sup_{y \in Y^-} y & \text{se } Y^- \neq \emptyset \\ -\infty & \text{se } Y^- = \emptyset \end{cases} \\ b(x) = \begin{cases} \inf_{y \in Y^+} y & \text{se } Y^+ \neq \emptyset \\ +\infty & \text{se } Y^+ = \emptyset \end{cases} \end{cases}$$

¹³⁾ χ_E funzione caratteristica di E .

Si ha $a(x) \leq \xi(x) \leq b(x)$; inoltre è ben noto che la funzione $\varphi(x, \cdot)$ è continua su $[a(x), b(x)]$ a valori in $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, potendo essere $+\infty$ negli estremi dell'intervallo.

Consideriamo i seguenti insiemi misurabili:

$$(8'') \quad \begin{cases} B_1 = \{x \in B : u(x) < \xi(x)\}, \\ B_2 = \{x \in B : \xi(x) < u(x)\}, \\ B_3 = \{x \in B : \xi(x) = u(x)\}; \end{cases}$$

dal lemma precedente segue l'esistenza di successioni $\{u_n^{(1)}(x)\}$ e $\{u_n^{(2)}(x)\}$ di funzioni semplici e misurabili tali che:

a) $u_n^{(j)}(x) \rightarrow u(x)$ q.o. su B_j , $j=1, 2$.

b) dato $x \in B_1$ [risp. B_2] esiste $N(x)$ tale che $n > N(x)$ implica $u_n^{(1)}(x) \geq u(x)$ [risp. $u_n^{(2)}(x) \leq u(x)$].

Inoltre $u_n^{(j)} = 0$ su B_j , $j=1, 2$.

Consideriamo le funzioni

$$(9'') \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(x, u_n^{(j)}(x)) & \text{se } x \in B_j, j=1, 2, \\ \varphi(x, \xi(x)) & \text{se } x \in B_3, \end{cases}$$

e dimostriamo la loro misurabilità su B , ossia, su B_1 , B_2 , e B_3 separatamente. Su B_3 un tale fatto è ovvio; dimostriamolo su B_1 , ossia, dimostriamo la misurabilità dell'insieme

$$(10'') \quad \{x \in B_1 : \varphi(x, u_n^{(1)}(x)) \in I\}$$

con I aperto qualunque di $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$:

essendo $u_n^{(1)}(x) = \sum_j \beta_j \chi_{E_j}$ su B_1 , con $\cup E_j = B_1$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\beta_j \in \mathbf{R}$ e E_j misurabili segue che l'insieme (10'') è uguale all'unione

$$\cup_j \{x \in E_j : \varphi(x, \beta_j) \in I\}$$

che è misurabile poichè $\varphi(\cdot, \beta_j)$ è misurabile per ipotesi.

Per terminare la dimostrazione è sufficiente verificare che

$$(12'') \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x, u(x)) \quad \text{q.o. su } I$$

Se $x \in B_3$, la (12'') è ovvia. Supponiamo invece che sia $x \in B_2$; in questo caso $\xi(x) < u(x)$, $\lim u_n^{(2)}(x) = u(x)$ e, per $n > N(x)$, $u^{(2)}(x) \leq u(x)$, in particolare riesce

$$(13'') \quad a(x) \leq \xi(x) < u_n^{(2)}(x) \leq u(x), \quad \text{per } n > N(x)$$

Distinguiamo ora i casi $b(x) < u(x)$ e $u(x) \leq b(x)$; nella prima ipotesi si ha, per n sufficientemente grande, $b(x) < u_n^{(2)}(x)$ e pertanto $\varphi(x, u_n^{(2)}(x)) = +\infty = \varphi(x, u(x))$. Se invece $u(x) \leq b(x)$ la (13'') implica $a(x) < u_n^{(2)}(x) \leq u(x) \leq b(x)$; ed essendo $\varphi(x, \cdot)$ continua su $[a(x), b(x)]$ ne segue che $\lim \varphi(x, u_n^{(2)}(x)) = \varphi(x, u(x))$, come volevamo dimostrare.

OSSERVAZIONE. L'ipotesi dell'esistenza di $\xi(x)$ tale che la (3'') si verificata è (nel caso generale) essenziale. Infatti siano $B = (0, 1) \subset \mathbf{R}$, la misura di Lebesgue su B e $\zeta(x) = x^2$, per $x \in B$. Poniamo

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in B, y = \zeta(x), \\ +\infty & \text{se } x \in B, y \neq \zeta(x), \end{cases}$$

→ mais simple pour x

con $g(x)$ funzione reale e non misurabile su B . Tutte le ipotesi del teorema precedente sono soddisfatte tranne la (3''); e per $u(x) = \zeta(x)$ la tesi non è verificata.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BANACH, S. et SAKS, S.: *Sur la convergence forte dans les champs L^p* , Stud Mathematica, 2 (1930), 51-57.
- [2] BREZIS, H.: *Problèmes unilatéraux* (preprint).
- [3] BREZIS, H. et STAMPACCHIA, G.: *Sur la régularité de la solution d'inéquation elliptiques*, Bull. Société Mathématique de France, 96 (1968), 153-180.
- [4] CONTI, F.: *Su alcuni spazi funzionali e loro applicazioni, ecc.*, Boll. Unioi Mat. Italiana, N. 4-5 (1969), 554-596.

- [5] CONTI, F. e VEIGA, H., BEIRÃO DA: *Equazioni ellittiche non lineari con ostacoli sottili. Applicazioni allo studio dei punti regolari* (in corso di stampa sugli Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa).
- [6] DIAS, J. P. CARVALHO: *Une classe de problèmes variationnels non lineaires de type elliptique ou parabolique*, (à paraître).
- [7] FICHERA, C.: *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema, ecc.*, Mem. Accad. Naz. Lincei, s. 8, vol. 7 (1964), 91-140.
- [8] LEWI, H. and STAMPACCHIA, G.: *On existence and smoothness of solutions of some non-coercive variational inequalities*, (preprint).
- [9] LIONS, J. L.: *Equations aux dérivées partielles et calcul des variations*, Cours Fac. Sciences Paris, 2^e semestre (1967), (multigr.).
- [10] LIONS, J. L.: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, ed. Dunod, Paris (1969).
- [11] NEČAS, J.: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et C^{ie} (1967).
- [12] STAMPACCHIA, G.: *Régularisation des solutions de problèmes aux limites, etc.*, Inter. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem (1960), 399-408.
- [13] STAMPACCHIA, G.: *Some limit cases of L^p -estimates for solutions, etc.*, Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), 505-510.
- [14] STAMPACCHIA, G.: *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques, etc.*, Ann. Inst. Fourier, 15 (1965), 189-250.
- [15] VEIGA, H. BEIRÃO DA: *Sulla holderianità delle soluzioni di alcune disequazioni, ecc.*, Ann. Mat. Pura Appl., 83 (1969), 73-112.
- [16] VEIGA, H. BEIRÃO DA: *Sur la régularité des solutions de l'équation $\operatorname{div} A(x, u, \nabla u) = B(x, u, \nabla u)$ avec des conditions aux limites unilatérales et mêlées* (preprint).
- [17] VEIGA, H. BEIRÃO DA: *Régularité pour une classe d'inéquations non linéaires*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271 série A-23 (6 juillet 1970), 23-25.

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 aprile 1971.

