HBV-31

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Un théorème d'existence dans la dynamique des fluides compressibles*. Note (*) de **Hugo Beirão-da-Veiga,** présentée par Jacques-Louis Lions.

On donne un théorème d'existence locale pour le mouvement d'un fluide non-visqueux, compressible et barotropique dans un ouvert borné du plan ou de l'espace.

We considers the flow in a bounded domain of $\mathbb{R}^2$ or of $\mathbb{R}^3$ of a non-viscous, compressible and barotropic fluid; a local existence theorem is given.

Dans cette Note on considère les équations du mouvement d'un fluide non visqueux, compressible et barotropique dans un ouvert connexe et borné Ω de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$) localement situé d'un seul côté de sa frontière Γ, variété différentiable de classe C^3. On indique par n le vecteur normal unitaire (extérieur) à la frontière Γ, et on suppose ce champ de vecteurs prolongé dans un voisinage de Γ. On désigne par $u^{(l)}(x)$, $l=1, 2, \ldots, N$, une base de l'espace des solutions du problème $\operatorname{div} u=0$, $\operatorname{rot} u=0$ dans Ω, $u.n=0$ sur Γ.

On désigne par $v(t, x)$, $\rho(t, x)$ et $p(t, x)$ la vitesse, la densité et la pression du fluide au point x à l'instant t, et par $f(t, x)$ la densité des forces massiques. Les équations du mouvement du fluide sont alors :

$$(1)\qquad \begin{cases} \rho[\dot{v}+(v.\nabla)v-f]=-\nabla p(\rho) & \text{dans } Q_T\equiv[0, T]\times\Omega, \\ \dot{\rho}+\operatorname{div}(\rho v)=0 & \text{dans } Q_T, \\ v(0)=a & \text{dans } \Omega, \\ \rho(0)=\rho_0 & \text{dans } \Omega, \\ v.n=0 & \text{sur } \textstyle\sum_T\equiv[0, T]\times\Gamma, \end{cases}$$

où

$$\dot{v}=\frac{\partial v}{\partial t},\qquad D_i v=\frac{\partial v}{\partial x_i}\qquad \text{et}\qquad (v.\nabla)w=\sum_i v D_i w.$$

On suppose que la vitesse initiale $a(x)$ et la densité initiale $\rho_0(x)$ sont connues. De plus (fluide barotropique) la pression $p=p(\rho)$ est une fonction (connue) de ρ vérifiant la condition $p'(\xi)>0$. En outre $p\in C^4(]0, +\infty[; \mathbb{R})$. On suppose aussi que

$$(2)\qquad \rho_0(x)\geqq m_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

où m_0 est une constante positive, que

$$(3)\qquad a(x).n=0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

et que les conditions de compatibilité suivantes sont vérifiées :

$$(4)\qquad \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}.\frac{\partial\rho_0}{\partial n}=\sum_{i,j}(D_i n_j)a_i a_j+f(0).n, \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$(5)\qquad \sum_{i,j}(D_i n_j)(\dot{a}_i a_j+a_i\dot{a}_j)+\dot{f}(0).n+p'(\rho_0)\frac{\partial}{\partial n}\left(a.\frac{\nabla\rho_0}{\rho_0}+\operatorname{div} a\right)$$
$$+p''(\rho_0)\frac{\partial\rho_0}{\partial n}\left(a\,\frac{\nabla\rho_0}{\rho_0}+\operatorname{div} a\right)=0, \quad \text{sur } \Gamma,$$

où par définition

$$\dot{a} \equiv -(a.\nabla)a + f(0) - p'(\rho_0)\frac{\nabla\rho_0}{\rho_0}. \tag{6}$$

On remarque que d'après $(1.1)_1$, $\dot{a} = \dot{v}(0)$.

Par la suite $(.,.)$ indique le produit scalaire dans $(L^2(\Omega))^3$. On désigne par H^k, k entier non négatif, l'espace de Sobolev d'ordre k dans Ω. Si $v=(v_1, v_2, v_3)$ est un champ de vecteurs on écrira $v \in H^k$ pour indiquer que $v_i \in H^k$, $k=1, 2, 3$. Les normes usuelles dans H^k seront indiquées par $\| \ \|_k$. De plus on pose $L^\infty(0, T; H^k)=\{v : v$ mesurable et essentiellement borné dans $[0, T]$ à valeurs dans $H^k\}$ avec la norme usuelle indiquée par $\| \ \|_{k,T}$.

Par la suite on suppose que $a \in H^3$, $\rho_0 \in H^3$, $f \in L^\infty(0, T_0; H^3)$, $\dot{f} \in L^\infty(0, T_0; H^2)$, $\ddot{f} \in L^\infty(0, T_0; H^1)$. On a démontré [1] le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Il existe $T_1 \in]0, T_0]$, dépendant seulement de Ω, de la fonction $p(\xi)$ et des normes de a, ρ_0, f, $\dot{f}$, $\ddot{f}$, fonction non décroissante de ces normes, tel que le problème* (1) *admet une solution unique v, ρ dans Q_{T_1}. De plus $v \in L^\infty(0, T_1; H^3)$, $\dot{v} \in L^\infty(0, T_1; H^2)$, $\ddot{v} \in L^\infty(0, T_1; H^1)$ et de même pour ρ, $\dot{\rho}$, $\ddot{\rho}$.*

Le schéma de la démonstration est le suivant : on pose

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha = \operatorname{rot} a & \text{dans } \Omega, \\ \gamma = \operatorname{div} a & \text{dans } \Omega, \\ g_0 = \log \rho_0 & \text{dans } \Omega, \\ f_1 = \operatorname{div} f & \text{dans } Q_{T_0}, \\ f_2 = \operatorname{rot} f & \text{dans } Q_{T_0}, \end{array}\right. \tag{7}$$

et

$$\left\{\begin{array}{ll} g = \log \rho & \text{dans } Q_{T_0}, \\ h(g) = p'(e^g) & \text{dans } Q_{T_0}. \end{array}\right. \tag{8}$$

Le système (1) équivaut aux deux systèmes d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{div} v = \delta \quad \text{dans } Q_{T_0}, \\ \operatorname{rot} v = \zeta \quad \text{dans } Q_{T_0}, \\ v.n = 0 \quad \text{dans } \Sigma_{T_0}, \\ \dot{\zeta} + (v.\nabla)\zeta - (\zeta.\nabla)v + \delta\zeta = f_2 \quad \text{dans } Q_{T_0}, \\ \zeta(0) = \alpha \quad \text{dans } \Omega, \\ (v(0) - a, u^{(l)}) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, N, \\ (\dot{v} - (v.\nabla)v - f, u^{(l)}) = 0, \qquad \forall t \in [0, T_0], \quad l = 1, \ldots, N, \end{array}\right. \tag*{$(9)_\delta$}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\delta} + v.\nabla\delta + \operatorname{div}[h(g)\nabla g] = f_1 - \sum_{i,j} (D_i v_j)(D_j v_i) \quad \text{dans } Q_{T_0}, \\ \dot{g} + v.\nabla g + \delta = 0 \quad \text{dans } Q_{T_0}, \\ \delta(0) = \gamma \quad \text{dans } \Omega, \\ g(0) = g_0 \quad \text{dans } \Omega, \\ h(g)\dfrac{\partial g}{\partial n} = \sum_{i,j} (D_i n_j) v_i v_j + f.n \quad \text{sur } \Sigma_{T_0}. \end{array}\right. \tag*{$(10)_g$}$$

Par commodité on désigne par $(9)_\theta$ le système $(9)_\delta$ avec δ remplacé par θ. De même $(10)_q$ désigne le système $(10)_g$ avec $h(g)$ remplacé par $h(q)$.

Le problème $(9)_\theta$ avec θ donné (vérifiant naturellement des conditions de compatibilité) a été résolu précédemment par l'auteur [2]; ce problème équivaut à la résolution des équations d'Euler usuelles avec la condition d'incompressibilité $\operatorname{div} v=0$ remplacée par $\operatorname{div} v=\theta$. De plus [2] l'application « $\theta \rightarrow v$ » est continue dans des espaces convenables. Dans [1] on considère le système $(10)_q$ [avec v solution de $(9)_\theta$] et on démontre l'existence d'une solution δ, g pour ce système. De plus si T_1 est suffisamment petit on démontre l'existence d'un point fixe pour l'application « $(\theta, q) \rightarrow (\delta, g)$ ». Ce point fixe étant une solution de $(9)_\delta+(10)_g$, v et $\rho \equiv e^g$ sont une solution de (1).

L'unicité de la solution de (1) a été démontrée par D. Graffi [3].

Le système (1) a été considéré par T. Kato [4] dans l'espace entier et par D. G. Ebin [5] dans le cas de petites vitesses initiales $a(x)$ et de densités initiales $\rho_0(x)$ voisines d'une constante (et avec $f \equiv 0$).

Finalement on remarque qu'avec des démonstrations tout à fait analogues on peut obtenir des résultats correspondants à ceux du théorème 1 mais dans des espaces de Sobolev d'ordre plus élevé. Naturellement on doit ajouter des conditions de compatibilité supplémentaires. On remarque aussi que l'on peut remplacer L^∞ par L^1 en ce qui concerne la force f.

(*) Remise le 29 octobre 1979.

[1] article à paraître.
[2] preprint, Univ. di Trento, avril 1979; *Ann. Mat. Pura Appl.* (à paraître).
[3] *J. Rat. Mech. Anal.*, 2, 1953, p. 99-106.
[4] *Springer Lecture Notes in Math.*, n° 448, 1975.
[5] *Comm. Pure Appl. Math.*, 32, 1979, p. 1-19.

Università di Trento, Facoltà di Scienze, 38050 *Povo* (*Trento*), *Italia*.