24

Bollettino U. M. I.
(5) **15**-B (1978), 566-575

Esistenza e calcolo del primo punto di biforcazione asintotica per una coppia di operatori potenziali non differenziabili all'infinito.

HUGO BEIRÃO DA VEIGA (Trento)

Summary. – *In this paper we characterize the largest positive asymptotic bifurcation point for the equation $\Gamma(u) = \lambda A(u)$, when Γ and A are potential operators defined on a reflexive Banach space V. We don't assume that Γ and A are differentiables at the infinity.*

1. – In questo lavoro vogliamo dimostrare per la biforcazione asintotica dei risultati analoghi a quelli dimostrati per la biforcazione ordinaria in [3]. Per brevità lo faremo in ipotesi di minore generalità. Inoltre alle diverse osservazioni fatte in [3] ne corrispondono di analoghe nel caso asintotico, che tralasceremo (vedi in particolare le osservazioni 1.2 ed il corollario 1.3 di [3]).

Sia V uno spazio di Banach reale e riflessivo di duale V'. Indicheremo con $\| \ \|$ la norma in V e con $\langle \, , \rangle$ la dualità tra V' e V. Il simbolo « $\rightharpoonup$ » indica convergenza debole in V.

Nel seguito φ e ψ sono funzionali reali definiti e differenziabili in V nel senso di Gateaux. Porremo per comodità $\nabla\varphi \equiv \Gamma$, $\nabla\psi \equiv A$ e diremo che Γ e A sono *operatori potenziali* in V a valori in V'. Naturalmente Γ e A determinano φ e ψ a meno di una costante additiva. Nel seguito supporremo che ψ è debolmente semi-continuo inferiormente (d.s.c.i.), ossia,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad V \Rightarrow \psi(u) \leqslant \liminf \psi(u_n) \,,$$

e che φ è debolmente semi-continuo superiormente (d.s.c.s.), ossia,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad V \Rightarrow \varphi(u) \geqslant \limsup \varphi(u_n) \,.$$

Supporremo anche che

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \psi(u) = +\infty \,, \tag{1.1}$$

che

$$(1.2) \qquad \psi \text{ è limitata su ogni sottoinsieme limitato di } V$$

e che per ogni fissato $\varrho > 0$ si abbia

$$(1.3) \qquad \sup_{\|v\|=\varrho} \left| \varphi(v) - \frac{1}{1+\alpha} \langle B(v), v \rangle \right| < +\infty$$

ove la costante α e l'operatore B sono definiti nell'enunciato del Teorema 1.1.

Porremo per definizione ($r \geqslant 0$)

$$M_r = \{u \in V : \psi(u) \leqslant r\}$$

e

$$\partial_0 M_r = \{u \in \partial M_r : \psi(u) = r\}$$

ove ∂M_r è la frontiera di M_r in V. Naturalmente gli insiemi M_r sono limitati e debolmente sequenzialmente compatti. Si ha anche $M_r \neq \emptyset$ se $r \geqslant \psi(0)$.

DEFINIZIONE 1.1. – Diremo che λ_0 è un *punto di biforcazione asintotico* per l'equazione

$$(1.4) \qquad \Gamma(u) = \lambda \Lambda(u)$$

se ad ogni $\mu > 0$ corrisponde una coppia $u, \lambda \in V \times \boldsymbol{R}$, soluzione di (1.4), tale che $\|u\| > 1/\mu$ e $|\lambda - \lambda_0| < \mu$.

Nel seguito indicheremo con lo stesso simbolo c delle diverse costanti *positive*. Si ha in particolare il risultato seguente (vedi anche il Teorema 2.2):

TEOREMA 1.1. – *Siano ψ d.s.c.i., φ d.s.c.s., ψ verificante* (1.1) *e* (1.2) *e φ verificante* (1.3) *con α e B come segue. Supponiamo che esistano operatori A, B, ν, ω e una costante positiva α tali che si abbia $\Lambda = A + \nu$ e $\Gamma = B + \omega$ con A, B, ν e ω verificanti le seguenti condizioni*:

$$(1.5) \qquad \langle A(u), u \rangle \geqslant c\|u\|^{1+\alpha}, \qquad \forall u \in V$$

$$(1.6) \qquad \langle A(tu), u \rangle = t^\alpha \langle A(u), u \rangle, \qquad \forall t \geqslant 0, \ \forall u \in V,$$

$$(1.7) \qquad \langle B(tu), u \rangle = t^\alpha \langle B(u), u \rangle, \qquad \forall t \geqslant 0, \ \forall u \in V,$$

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle \nu(u), u\rangle}{\langle A(u), u\rangle} = 0\,, \tag{1.8}$$

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle \omega(u), u\rangle}{\langle A(u), u\rangle} = 0\,. \tag{1.9}$$

Poniamo

$$M \equiv M(B, A) = \sup_{\substack{u\in V\\ u\neq 0}} \frac{\langle B(u), u\rangle}{\langle A(u), u\rangle}\,. \tag{1.10}$$

Allora, se $M > 0$, M *è un punto di biforcazione (il più grande) per l'equazione* (1.4).

Evidentemente segue da (1.5) che in (1.8) e (1.9) possiamo sostituire

$$\langle A(u), u\rangle \quad \text{con } \|u\|^{1+\alpha}\,.$$

OSSERVAZIONE 1.1. – Poniamo

$$P(\varphi) = \sup_{v\in V} \varphi(v)\,.$$

Se $P(\varphi) < +\infty$ supponiamo che esista una costante positiva γ tale che

$$\varphi(u) > P(\varphi) - \gamma \Rightarrow \Gamma(u) \neq 0\,.$$

Se $P(\varphi) = +\infty$ supponiamo invece che esista una costante N tale che

$$\varphi(u) > N \Rightarrow \Gamma(u) \neq 0\,.$$

Allora il teorema 1.1 vale anche se $M = 0$.

OSSERVAZIONE 1.2. – Sotto ipotesi convenienti il valore $M(B, A)$ è il più grande $\lambda \in \boldsymbol{R}$ per il quale l'equazione

$$B(u) = \lambda A(u)$$

ammette una soluzione $u \neq 0$. Vedi [3], corollario 1.1.

Dal Teorema 1.1 possiamo ottenere diversi casi particolari interessanti. Uno di essi è senz'altro il caso in cui $\alpha = 1$ e gli operatori A e B sono lineari. Un caso particolare di quest'ultimo è il seguente:

TEOREMA 1.2. – *Sia* ψ *d.s.c.i. e verificante* (1.1) *e* (1.2) *e sia* φ *d.s.c.s. e limitato inferiormente sugli insiemi limitati di* V. *Supponiamo che* $\Lambda = A + \nu$ *e* $\Gamma = B + \omega$ *con* A *e* B *lineari continui e auto-aggiunti* (i.e. $\langle A(u), v\rangle = \langle A(v), u\rangle$, $\forall u, v \in V$, *ed analogamente per* B), B *compatto e* $\langle A(u), u\rangle \geqslant c\|u\|^2$, $\forall u \in V$.

Supponiamo inoltre che

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle \nu(u), u\rangle}{\|u\|^2} = 0 , \tag{1.11}$$

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle \omega(u), u\rangle}{\|u\|^2} = 0 . \tag{1.12}$$

Allora se il più grande autovalore per l'equazione lineare

$$B(u) = \lambda A(u)$$

è positivo, esso è un punto di biforcazione asintotico (*il più grande*) *per l'equazione non-lineare* (1.4).

La condizione (1.12) è verificata in particolare se

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\|\omega(u)\|_{V'}}{\|u\|} = 0 , \tag{1.13}$$

ossia se B è la derivata nel senso di Fréchet di Γ all'infinito (la stessa osservazione vale per (1.11), A e Λ).

Rinviamo il lettore all'introduzione dell'articolo [1] ove si presentano degli esempi di operatori potenziali in $\boldsymbol{R}^2$ per i quali la condizione (1.12) è verificata ma (1.13) è falsa, al n. 4 ove si danno degli esempi relativi ai sistemi di Hammerstein ed anche al n. 3 dello stesso articolo ove si discute la condizione (1.12).

Se $V = H$ è uno spazio di Hilbert (che identifichiamo col suo duale), se $\alpha = 1$ e se $\Lambda = I$ è l'operatore identità allora il Teorema 1.1 è contenuto nel Teorema 1.3 di [1].

2. – In questo numero dimostreremo in particolare i risultati enunciati nel numero precedente.

LEMMA 2.1. – *Sia* $r \geqslant \psi(0)$. *Allora esiste almeno un punto di massimo di* φ *in* M_r. *Inoltre se* u_0 *è un tale punto di massimo e se* $\Gamma(u_0) \neq 0$ *allora* $u_0 \in \partial_0 M_r$ *e* $\mu\Gamma(u_0) = \Lambda(u_0)$ *per un certo* $\mu \geqslant 0$.

Per la dimostrazione vedi [3], lemmi 2.1 e 2.2.

LEMMA 2.2. – *Supponiamo verificate le ipotesi del Teorema* 1.1. - *Allora dato* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\varrho = \varrho(\varepsilon) > 0$ *tale che*

$$\left|\psi(u) - \frac{1}{1+\alpha}\langle A(u), u\rangle\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\alpha}\langle A(u), u\rangle \tag{2.1}$$

e

$$\left|\varphi(u) - \frac{1}{1+\alpha}\langle B(u), u\rangle\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\alpha}\langle A(u), u\rangle \tag{2.2}$$

per ogni $u \in V$ *tale che* $\|u\| \geqslant \varrho(\varepsilon)$.

DIMOSTRAZIONE. – Dato $\varepsilon > 0$ sia $\varrho'(\varepsilon) > 0$ tale che

$$|\langle \nu(u), u\rangle| \leqslant \varepsilon\langle A(u), u\rangle \tag{2.3}$$

e

$$|\langle \omega(u), u\rangle| \leqslant \varepsilon\langle A(u), u\rangle \tag{2.4}$$

per ogni u tale che $\|u\| \geqslant \varrho'(\varepsilon)$. Un tale $\varrho'(\varepsilon)$ esiste come conseguenza di (1.8) e (1.9).

D'altra parte se $u \in V$ e $\tau \in]0, 1]$ si ha

$$\varphi(u) - \varphi(\tau u) = \int_\tau^1 \langle \Gamma(tu), u\rangle\, dt$$

e ne segue con qualche calcolo che

$$\varphi(u) - \frac{1}{1+\alpha}\langle B(u), u\rangle = \varphi(\tau u) - \frac{1}{1+\alpha}\langle B(\tau u), \tau u\rangle + \int_\tau^1 \langle \omega(\tau u), u\rangle\, dt\,. \tag{2.5}$$

Sia ora (vedi (1.3))

$$S_\varepsilon = \sup_{\|v\| = \varrho_\varepsilon} \left|\varphi(v) - \frac{1}{1+\alpha}\langle B(v), v\rangle\right|$$

e definiamo

$$\varrho(\varepsilon) = \max\left(\varrho'(\varepsilon), \left[\frac{(1+\alpha)S_\varepsilon}{\alpha c\varepsilon}\right]^{1/1+\alpha}\right)$$

ove c è la costante che compare in (1.5). Se $\|u\| \geqslant \varrho(\varepsilon)$ segue da (2.5), posto $\tau = \varrho'(\varepsilon)/\|u\|$, che

$$\left| \varphi(u) - \frac{1}{1+\alpha} \langle B(u), u\rangle \right| \leqslant S_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{1+\alpha} \langle A(u), u\rangle \tag{2.6}$$

e con qualche calcolo si verifica che il primo membro di (2.5) è maggiorato da

$$\varepsilon \langle A(u), u\rangle \quad \text{se} \quad \|u\| \geqslant \varrho(\varepsilon)\,.$$

Invece per dimostrare la (2.1) scriviamo la (2.5) con ψ, A e ν al posto di φ, B e ω rispettivamente. Posto $\tau = \varrho'(\varepsilon)/\|u\|$ segue che se $\|u\| > \varrho'(\varepsilon)$ si ha

$$\left| \psi(u) - \frac{1}{1+\alpha} \langle A(u), u\rangle \right| \leqslant S'_\varepsilon + \tag{2.7}$$
$$+ \frac{1}{1+\alpha} \tau^{1+\alpha} \langle A(u), u\rangle + \frac{\varepsilon}{1+\alpha} \langle A(u), u\rangle$$

ove

$$S'_\varepsilon = \sup_{\|v\| \leqslant \varrho'(\varepsilon)} |\psi(v)|\,.$$

Posto ora

$$\varrho(\varepsilon) = \left[\frac{(1+\alpha) S'_\varepsilon + c\varrho'(\varepsilon)^{1+\alpha}}{\alpha c \varepsilon} \right]^{1/1+\alpha}$$

ove c è la costante che compare in (1.5), si verifica con qualche calcolo che se $\|u\| \geqslant \varrho(\varepsilon)$ allora il primo membro di (2.1) è maggiorato da $\varepsilon \langle A(u), u\rangle$.

LEMMA 2.3. – *Supponiamo verificate le ipotesi del Teorema* 1.1. *Allora dato* $\varepsilon > 0$ *esiste* $R(\varepsilon)$ *tale che*

$$\sup_{u \in \partial_0 M_r} \varphi(u) \geqslant \frac{M-\varepsilon}{1+\varepsilon}\, r\,, \qquad \forall r \geqslant R(\varepsilon)\,. \tag{2.8}$$

In particolare

$$M(B, A) < +\infty\,.$$

DIMOSTRAZIONE. – Innanzitutto, utilizzando (1.1), si verifica senza difficoltà che

$$M(B, A) = \sup_{u \in \partial_0 M_r} \frac{\langle B(u), u \rangle}{\langle A(u), u \rangle} \tag{2.9}$$

per ogni $r > \psi(0)$.

Sia ora

$$R(\varepsilon) = \varepsilon + \sup_{\|u\| \leqslant \varrho(\varepsilon)} \psi(u) \tag{2.10}$$

e sia $r \geqslant R(\varepsilon)$. Da (2.9) segue che esiste una successione $u_n \in \partial_0 M_r$ tale che

$$\langle B(u_n), u_n \rangle \geqslant \left(M - \frac{1}{n} \right) \langle A(u), u \rangle . \tag{2.11}$$

Utilizzando (2.10) segue anche che

$$\|u_n\| > \varrho(\varepsilon) , \qquad \forall n . \tag{2.12}$$

Si ha

$$\varphi(u_n) \geqslant \frac{1}{1+\alpha} \langle B(u_n), u_n \rangle - \left| \varphi(u_n) - \frac{1}{1+\alpha} \langle B(u_n), u_n \rangle \right|$$

ed adoperando (2.2) e (2.11) riesce

$$\varphi(u_n) \geqslant \frac{M - 1/n - \varepsilon}{1+\alpha} \langle A(u_n), u_n \rangle .$$

Tenendo ora conto di (2.1) la tesi segue facilmente poichè

$$\varphi(u_n) \geqslant \frac{M - 1/n - \varepsilon}{1+\varepsilon} r . \tag{2.13}$$

Finalmente se fosse $M = +\infty$ si avrebbe (2.13) con n al posto di $1/n$ e questo porta a una contraddizione dato che φ è d.s.c.s.

TEOREMA 2.1. – *Supponiamo che le ipotesi del Teorema 1.1 siano verificate ed inoltre che $M \geqslant 0$. Se $M = 0$ si assume anche la condizione supplementare descritta nella osservazione 1.1. Allora esistono $\varepsilon_0 > 0$ ed una funzione reale $\bar{R}(\varepsilon)$ definita in $]0, \varepsilon_0]$ tali che il risultato seguente è verificato:*

Sia $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, *sia* $r \geqslant \bar{R}(\varepsilon)$ *e sia* u_0 *un punto di massimo di* φ *in* M_r *(esiste almeno uno). Allora* $u_0 \in \partial_0 M_r$ *e*

$$\Gamma(u_0) = \lambda \Lambda(u_0) \tag{2.14}$$

con $\lambda > 0$ *e*

$$|\lambda - M| \leqslant c\varepsilon \, . \tag{2.15}$$

DIMOSTRAZIONE. - Sia $M > 0$ e fissiamo

$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{2} \min \left(M, [(M+3)^2 + 4M]^{\frac{1}{2}} - (M+3)\right) . \tag{2.16}$$

Dato $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ sia $\varrho(\varepsilon)$ definito come nella dimostrazione del lemma 2.2. Se $\|u\| \geqslant \varrho(\varepsilon)$ le maggiorazioni (2.1), (2.2) e (2.4) sono verificate. Poniamo

$$S''_\varepsilon = \sup_{\|v\| \leqslant \varrho(\varepsilon)} \varphi(v) \, .$$

Siccome φ è d.s.c.s. segue che $S''_\varepsilon < +\infty$. Poniamo anche

$$\bar{R}(\varepsilon) = \max\left(R(\varepsilon), \frac{1+\varepsilon_0}{M-\varepsilon_0} S''_\varepsilon\right) + \varepsilon \, .$$

Dato che u_0 è un punto di massimo in M_r e che $r \geqslant R(\varepsilon)$ segue dal lemma 2.3 che

$$\varphi(u_0) \geqslant \frac{M-\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0} \bar{R}(\varepsilon) > S''_\varepsilon \tag{2.17}$$

e quindi $\|u_0\| > \varrho(\varepsilon)$. Da (2.17), (2.2) e (2.4) segue che

$$\frac{1}{1+\alpha} \langle \Gamma(u_0), u_0 \rangle \geqslant \frac{M-\varepsilon}{1+\varepsilon} r - \frac{2\varepsilon}{1+\alpha} \langle A(u_0), u_0 \rangle$$

ed utilizzando (2.1) si ricava

$$\frac{1}{1+\alpha} \langle \Gamma(u_0), u_0 \rangle \geqslant \left[\frac{M}{1+\varepsilon} - \left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{2}{1-\varepsilon}\right)\varepsilon\right] r \, . \tag{2.18}$$

Tenendo ora presente la (2.16) si vede facilmente che il secondo membro di (2.18) è positivo e in particolare che $\Gamma(u_0) \neq 0$. Se invece si ha $M = 0$ fissiamo $\varepsilon_0 \in]0, 1[$ e poniamo $\bar{R}(\varepsilon) = \max(R(\varepsilon), r_1)$ ove r_1

è scelto in modo tale che se $P(\varphi) < +\infty$ si abbia

$$\sup_{u \in M_{r_1}} \varphi(u) > P(\varphi) - \gamma$$

e se $P(\varphi) = +\infty$ si abbia

$$\sup_{u \in M_{r_1}} \varphi(u) > N .$$

Allora se $r \geqslant \bar{R}(\varepsilon)$ si ha $r \geqslant r_1$ e quindi $\varphi(u_0) > P(\varphi) - \gamma$ (oppure $\varphi(u_0) > N$) e di conseguenza $\Gamma(u_0) \neq 0$. L'esistenza di r_1 segue dalla definizione di $P(\varphi)$ e da (2.2).

Si ha quindi in ambedue i casi $\Gamma(u_0) \neq 0$ e dal lemma 2.1 segue che $u_0 \in \partial_0 M_r$ e che $\mu\Gamma(u_0) = A(u_0)$ con $\mu \geqslant 0$.

Siccome $\psi(u_0) = r \geqslant R(\varepsilon)$ segue da (2.10) che $\|u_0\| > \varrho(\varepsilon)$. Utilizzando (2.3) si ha $\langle A(u_0), u_0 \rangle \geqslant (1-\varepsilon) \langle A(u_0), u_0 \rangle$ ossia $\mu \neq 0$. Ne segue che la (2.14) è verificata con $\lambda > 0$.

Dimostriamo finalmente (2.15). Da (2.3), (2.4) e (2.14) segue che $(1-\varepsilon)\lambda \leqslant M + \varepsilon$. Quindi

$$\lambda \leqslant M + \varepsilon \frac{1+M}{1-\varepsilon} . \tag{2.19}$$

Se $M = 0$ la tesi è dimostrata con $c = 1/(1-\varepsilon_0)$. Se $M > 0$ si verifica come nella dimostrazione del Teorema 3.1 di [3] che

$$\lambda \geqslant M - \varepsilon \frac{(3+\varepsilon)(1+M)}{(1+\varepsilon)^2} . \tag{2.20}$$

Da (2.19) e (2.20) segue la (2.15).

Da questo Teorema e da (1.2) segue immediatamente il risultato seguente:

TEOREMA 2.2. – *Supponiamo verificate le ipotesi del Teorema 1.1 e supponiamo che $M \geqslant 0$. Se $M = 0$ supponiamo verificata la condizione supplementare descritta nella osservazione 1.1. Allora ad ogni $\mu > 0$ corrisponde un valore $r(\mu)$ tale che il risultato seguente è verificato:*

Dato $r \geqslant r(\mu)$ esistono $u \in \partial_0 M_r$ e $\lambda > 0$, soluzioni di (1.4), tali che $|\lambda - M| < \mu$ e $\|u\| > 1/\mu$. Inoltre $\varphi(u)$ è il massimo di φ in M_r.

Il Teorema 1.1 segue dal Teorema 2.2 e dal seguente risultato, la cui dimostrazione è analoga alla dimostrazione del Teorema 3.3 di [3]:

TEOREMA 2.3. – *Nelle ipotesi del Teorema anteriore, M è il più grande punto di biforcazione per l'equazione* (1.4).

Finalmente il Teorema 1.2 segue facilmente dal Teorema 1.1 di questo stesso articolo e dal corollario 1.1 di [3] (cfr. anche il Teorema 1.2 di [3]).

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BEIRÃO DA VEIGA, *On bifurcation and asymptotic bifurcation for non-differentiable potential operators and for systems of Hammerstein type*, Studies in Analysis (G.-C. Rota, editore), Academic Press, Inc. (in corso di stampa (preprint I.F.M., Lisbona 1976, edizione rivista).

[2] H. BEIRÃO DA VEIGA, *Bifurcation dans des espaces de Banach pour un couple d'opérateurs non differentiables à l'origine*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **283** (1976), pp. 329-331.

[3] H. BEIRÃO DA VEIGA, *Existence et détermination du premier point de bifurcation pour des couples d'opérateurs potentials non différentiables à l'origine*, in corso di stampa sugli Ann. Mat. Pura Appl..

[4] M. A. KRASNOSEL'SKII, *Eigenfunctions of nonlinear operators which approximate asymptotically to linear ones*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **74**, 2 (1950), pp. 177-179.

[5] M. A. KRASNOSEL'SKII, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, (english edition) Pergamon Press Ltd., 1963.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 23 ottobre 1977

Monograf" - Bologna - Via Collamarini 5