HBV-12

SUL PROBLEMA MISTO PER LE EQUAZIONI LINEARI ELLITTICHE DEL SECONDO ORDINE.*

By Hugo Beirão-Da-Veiga.**

Summary. In this paper we give a method to prove regularity properties of $\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$ where u is a solution of the mixed problem for a second order elliptic equation. With the aid of this method we can apply the translation method (cf. [4]) to show the following result: Suppose that the domain Ω and the data are regular and that u is Lipschitz continuous, then u belongs to $W^{2,2}(\Omega)$. Using a similar method we prove in a forthcoming paper (cf. [1]) that if the data are regular all $W^{1,s}$ solution ($s > 4/3$) belongs to $W^{2,p}(\Omega)$ for all $p < 4/3$. This result is the best possible since it fails for $p = 4/3$.

Introduzione. In questo lavoro presentiamo un metodo per lo studio della regolarità delle *derivate seconde* delle soluzioni del problema misto (le somme rispetto agli indici ripetuti sono sottointese)

$$\begin{aligned} &Lu \equiv -D_j(a_{ij}D_i u) + b_i D_i u + cu = f \qquad \text{in } \Omega, \\ &u = \phi \text{ su } D, \qquad D_\nu u + \sigma u = \psi \text{ su } N, \end{aligned} \tag{0.1}$$

ove D_ν è la derivata conormale, Ω è un aperto limitato di R^n di frontiera Γ e $D \cup N = \Gamma$, $D \cap N = \varnothing$. Il metodo usato si applica ugualmente se D_ν è una derivata obliqua conveniente.

Imposteremo il problema nella formulazione variazionale:

$$u \in W^1_{\phi,D}(\Omega), \qquad \int_\Omega \{a_{ij}D_i u D_j v + b_i D_i u v + cuv\}\, dx$$
$$= \int_\Omega fv\, dx + \int_N (\psi - \sigma u) v\, d\Gamma, \qquad \forall v \in W^1_D(\Omega), \tag{0.2}$$

Manuscript received April 10, 1973.

*Lavoro eseguito mentre l'autore era invitato dal Consiglio Nazionale delle Ricerche in qualità di professore visitatore presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.

**Ricercatore dello "Instituto di Fisica e Matematica" (Lisbona).

American Journal of Mathematics, Vol. 97, No. 4, pp. 973–981

ove $W^1_{\phi,D}(\Omega)$ è definito nel numero 2 e $W^1_D(\Omega)=W^1_{0,D}(\Omega)$. Supporremo nella introduzione che i coefficienti e i dati geometrici abbiano una certa regolarità che sarà precisata più tardi.

Il problema (0.1) è stato studiato da un gran numero di autori. Per una vasta bibliografia rimandiamo a E. Magenes [2], C. Miranda [3] ed ai lavori ivi citati; vogliamo ricordare in modo particolare i lavori di G. Stampacchia [6] e di E. Shamir [5] apparsi piu recentemente.

È noto che se f, ϕ e ψ sono regolari non è vero in generale che u appartiene à $W^{2,2}(\Omega)$. Noi vogliamo però dimostrare che *se la soluzione u è lipschitziana, essa ha derivate seconde che sono funzioni di quadrato sommabile.*

Il metodo introdotto in questo lavoro pùo essere usato (e ciò sarà fatto in un prossimo articolo; cf. [1]) per dimostrare che se u è una soluzione di (0.1) con $f \in L^p(\Omega)$ $(1<p<2)$, $\phi \in W^{2-1/p,p}(D)$, $\psi \in W^{1-1/p,p}(N)$ e se inoltre $u \in W^{1,q}(\Omega) \cap C^{0,\lambda}(\Omega)$ con $q=2p/(2-p)$ e $\lambda=2(p-1)/p$ allora le derivate seconde di u appartengono a $L^p(\Omega)$. Da questo risultato discende in particolare, tenendo presenti i teoremi di regolarità $C^{0,\lambda}$ e $W^{1,q}$ ottenuti in [5], che, se f, ϕ e ψ sono regolari, allora $u \in W^{2,p}(\Omega)$ per ogni $p<4/3$; questo risultato è ottimale poichè il controesempio di E. Shamir in [5] dimostra che in generale $u \in W^{2,4/3}(\Omega)$ è falso.

Cenno sul metodo usato: Supponiamo che $\phi=0$, che f e ψ siano regolari e indichiamo con S la frontiera comune di D e N in Γ. Vogliamo dimostrare che $u \in W^{2,2}$ in un intorno U di ogni punto $x_0 \in S$ e possiamo supporre che (localmente) Γ e S siano varietà lineari e che u abbia supporto contenuto in $\bar{\Omega} \cap U$. È ben noto che il metodo delle traslazioni non è applicabile nello studio del problema misto poichè le traslazioni della soluzione u nella direzione ortogonale a S e tangente a Γ non sono funzioni ammissibili (i.e. non sono nulle su $D \cap U$); cambiando però in modo adeguato la soluzione u in un intorno 2ϵ di S otteremo delle funzioni u_ϵ verificanti $Lu_\epsilon = f_\epsilon$, con le f_ϵ equilimitate in L^2, le cui traslate nelle direzioni tangenti a Γ sono ancora funzioni ammissibili nella equazione variazionale da loro risolta. Ne segue che le u_ϵ sono equilimitate in $W^{2,2}(\Omega)$ (usando appunto il metodo delle traslazioni di Nirenberg; cf. [4]) e siccome $u_\epsilon \to u$ in L^2 si ha la tesi.

1. *Regolarità Locale.* Dato $B \subset R^n$ supporremo nota la definizione degli spazi $W^s(B)=W^{s,2}(B)$. Con $W^{1,\infty}(B)$ indichiamo lo spazio delle funzioni apartenenti con le loro derivate prime (nel senso delle distribuzioni) a $L^\infty(B)$. La norma in $W^s(B)$, $s \neq 0$, verrà indicata con $\| \quad \|_{s,B}$, quella in $L^2(B)$ con $\| \quad \|_B$ e quella in $W^{1,\infty}(B)$ con $\| \quad \|_{1,\infty,B}$; con $\| \quad \|_{\infty,B}$ indicheremo la norma in $L^\infty(B)$.

Indicheremo con $\mathrm{Lip}(B)$ lo spazio delle funzioni lipschitziane in B con la norma $\|\phi\|_{\mathrm{Lip}(B)} = \sup(|\phi(x)-\phi(y)|/|x-y|) + \sup|\phi(x)|$; $W^{1,\infty}(\Omega) = \mathrm{Lip}(\Omega)$ se Ω è un aperto regolare di R^n. Per comodità indicheremo $\| |\nabla v| \|$ con $\|\nabla v\|$ ove $\| \quad \|$ è una norma in uno spazio di funzioni. Poniamo $x=(x', x_{n-1}, x_n)$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-2})$ e

$$
\begin{aligned}
&Q = \{x \in R^n : |x_j| < 1,\ j=1,\dots,n-1,\ 0 < x_n < 1\},\\
&\Lambda = \{x \in R^n : |x_j| < 1,\ j=1,\dots,n-1,\ x_n = 0\},\\
&\hat{Q} = Q \cup \Lambda, \qquad \gamma = \{x \in \Lambda : x_{n-1} = 0\}\\
&\Lambda_\delta^- = \{x \in \Lambda : x_{n-1} \leqslant \delta\}, \qquad \Lambda_\delta = \Lambda - \Lambda_\delta^-, \qquad \delta \in]-1, 1[.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Definiamo ancora $V = W^1(Q)$, $V_\delta = \{v \in V : v = 0 \text{ su } \Lambda_\delta^-\}$ e $\hat{V}_\delta = \{v \in V_\delta : \operatorname{supp} v \subset \hat{Q}\}$. Sia u una soluzione di: $u \in \hat{V}_0$,

$$\int_Q a_{ij} D_i u D_j v\, dx = \int_Q f v\, dx + \int_{\Lambda_0} \psi v\, d\Lambda, \qquad \forall v \in \hat{V}_0 \tag{1.2}$$

ove $d\Lambda = dx' dx_{n-1}$. Si osservi che dist $(\operatorname{supp}\psi, \partial\Lambda) \geqslant$ dist $(\operatorname{supp} u, \partial Q - \Lambda) \equiv 3\eta$ ove $\partial\Lambda$ (resp. ∂Q) è la frontiera di Λ (resp. Q) in R^{n-1} (resp. R^n).

Supporremo che

$$a_{ij} \in C^1(\overline{Q}), \qquad a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in R^n \quad (\nu > 0), \tag{1.3}$$

e che

$$f \in L^2(Q), \qquad \psi \in L^2(\Lambda_0). \tag{1.4}$$

Sia $\Phi : R^+ \to R^+$ una funzione crescente e di classe C^∞ e tale che $\Phi(r) = 0$ se $r \in [0,1]$, $\Phi(r) = 1$ se $r \in [2, \infty[$. Poniamo $\Phi_\epsilon(r) = \Phi(r/\epsilon)$, ove $0 < \epsilon < 1$, e definiamo $\phi_\epsilon : Q \to R^+$ come segue:

$$\phi_\epsilon(x) = \Phi_\epsilon(\rho) \qquad \text{ove } \rho^2 = x_{n-1}^2 + x_n^2. \tag{1.5}$$

LEMMA 1.1. *Posto*

$$u_\epsilon = u\phi_\epsilon$$

si ha

$$\int_Q a_{ij} D_i u_\epsilon D_j v\, dx = \int_Q f_\epsilon v\, dx + \int_\Lambda \psi_\epsilon v\, d\Lambda, \qquad \forall v \in \hat{V}_{-\epsilon}, \tag{1.6}$$

ove

$$f_\epsilon = f\phi_\epsilon - a_{ij}uD^2_{ij}\phi_\epsilon - a_{ij}(D_juD_i\phi_\epsilon + D_iuD_j\phi_\epsilon) - D_ja_{ij}D_i\phi_\epsilon u, \tag{1.7}$$
$$\psi_\epsilon = \tilde{\psi}\phi_\epsilon - a_{n-1,n}D_{n-1}\phi_\epsilon u,$$

ove $\tilde{\psi} \in L^2(\Lambda)$ *è un prolungamento (per il momento arbitràrio) di* ψ *a tutto* Λ.

La dimostrazione è un semplice esercízio.

LEMMA 1.2. *Se* $u \in W^{1,\infty}(Q)$ *allora* $f_\epsilon \in L^2(Q)$ *ed inoltre*

$$\|f_\epsilon\|_Q \leqslant \|f\|_Q + c\|\nabla u\|_{\infty,Q} \tag{1.8}$$

con c indipendente da ϵ.

Dimostrazione. Da (1.5) segue che

$$\begin{aligned} &|D_i\phi_\epsilon| \leqslant c\epsilon^{-1} \quad \text{se } \epsilon<\rho<2\epsilon, \quad |D_i\phi_\epsilon| = 0 \quad \text{altrimenti;} \\ &|D^2_{ij}\phi_\epsilon| \leqslant c\epsilon^{-2} \quad \text{se } \epsilon<\rho<2\epsilon, \quad |D^2_{ij}\phi_\epsilon| = 0 \quad \text{altrimenti.} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dato che $u(x',0,0)=0$ si ha, per ogni $x \in Q$, $|u(x)| \leqslant \rho\|\nabla u\|_{\infty,Q}$ e quindi dalle (1.9) segue che

$$\int_Q |u|^2|D^2_{ij}\phi_\epsilon|^2\,dx \leqslant c\epsilon^{-4}\|\nabla u\|^2_{\infty,Q}\int dx' \iint_{\{\rho<2\epsilon\}} \rho^2\,dx_{n-1}\,dx_n \leqslant c\|\nabla u\|^2_{\infty,Q}. \tag{1.10}$$

Analogamente, facendo uso delle (1.9), otteniamo

$$\int_Q |D_i\phi_\epsilon|^2|u|^2\,dx \leqslant c\|\nabla u\|^2_{\infty,Q}. \tag{1.11}$$

Finalmente

$$\int_Q |D_ju|^2|D_i\phi_\epsilon|^2\,dx \leqslant c\|\nabla u\|^2_{\infty,Q}. \tag{1.12}$$

Da (1.7), (1.10), (1.11) e (1.12) segue la (1.8).

LEMMA 1.3. *Supponiamo che* $u \in W^{1,\infty}(Q)$ *e che*

$$\psi \in W^{1/2}(\Lambda_0) \cap L^\infty(\Lambda_0). \tag{1.13}$$

Allora $\psi_\epsilon \in W^{1/2}(\Lambda)$ *ed inoltre*

$$\|\psi_\epsilon\|_{1/2,\Lambda} \leqslant c\left(\|\nabla u\|_{\infty,Q} + \|\psi\|_{1/2,\Lambda_0} + \|\psi\|_{\infty,\Lambda_0}\right) \tag{1.14}$$

con c indipendente da ϵ e $\tilde{\psi}$ in (1.7) *scelta come segue nella dimostrazione.*

Dimostrazione. In primo luogo, come in (1.11), si ha

$$\|D_{n-1}\phi_\epsilon u\|_Q \leqslant c\|\nabla u\|_{\infty,Q}. \tag{1.15}$$

Inoltre $D_i(D_{n-1}\phi_\epsilon u) = D^2_{i,n-1}\phi_\epsilon u + D_{n-1}\phi_\epsilon D_i u$ in Q e da (1.10) e (1.12) segue

$$\|D_i(D_{n-1}\phi_\epsilon u)\|_Q \leqslant c\|\nabla u\|_{\infty,Q}, \qquad i=1,\dots,n. \tag{1.16}$$

Quindi da (1.15) e (1.16) si ricava

$$\|a_{n-1,n}D_{n-1}\phi_\epsilon u\|_{1,Q} \leqslant c\|\nabla u\|_{\infty,Q}. \tag{1.17}$$

D'altra parte esiste una applicazione lineare continua $\psi \to \tilde{\psi}$ di $W^{1/2}(\Lambda_0)$ in $W^1(Q)$ tale che la traccia di $\tilde{\psi}$ su Λ_0 coincide con ψ. Possiamo suppore che se ψ verifica dist $(\operatorname{supp}\psi, \partial\Lambda) \geqslant 3\eta$ allora la traccia di $\tilde{\psi}$ su Λ verifica dist $(\operatorname{supp}\tilde{\psi}, \partial\Lambda) \geqslant 2\eta$. In più se $\psi \in L^\infty(\Lambda_0)$ allora $\tilde{\psi} \in L^\infty(Q)$ e $\|\tilde{\psi}\|_{\infty,Q} \leqslant c\|\psi\|_{\infty,\Lambda_0}$. Si ha quindi

$$\|\tilde{\psi}\|_{1,Q} \leqslant c\|\psi\|_{1/2,\Lambda_0}, \qquad \|\tilde{\psi}\|_{\infty,Q} \leqslant c\|\psi\|_{\infty,\Lambda_0}. \tag{1.18}$$

Consideriamo ora in Q la funzione $\tilde{\psi}\phi_\epsilon$. Si vede facilmente che $\|\tilde{\psi}\phi_\epsilon\|_{1,Q} \leqslant c(\|\tilde{\psi}\|_{\infty,Q} + \|\nabla\tilde{\psi}\|_Q)$ e quindi da (1.18) riesce

$$\|\tilde{\psi}\phi_\epsilon\|_{1/2,\Lambda} \leqslant c\big(\|\psi\|_{1/2,\Lambda_0} + \|\psi\|_{\infty,\Lambda_0}\big). \tag{1.19}$$

Da (1.17) e (1.19) segue la (1.14).

TEOREMA 1.1. *Sia $u \in W^{1,\infty}(Q)$ una soluzione di* (1.2). *Supponiamo inoltre verificata la condizione* (1.13). *Allora le funzioni u_ϵ verificano*

$$u_\epsilon \in W^2(Q), \qquad \|u_\epsilon\|_{2,Q} \leqslant c\big(\|u\|_{1,\infty,Q} + \|f\|_Q + \|\psi\|_{1/2,\Lambda_0} + \|\psi\|_{\infty,\Lambda_0}\big) \tag{1.20}$$

con c indipendente da ϵ. Quindi u verifica $u \in W^2(Q)$ e

$$\|u\|_{2,Q} \leqslant c\big(\|u\|_{1,\infty,Q} + \|f\|_Q + \|\psi\|_{1/2,\Lambda_0} + \|\psi\|_{\infty,\Lambda_0}\big). \tag{1.21}$$

Dimostrazione. Esiste una applicazione lineare continua $\theta \to \theta^*$ di $W^{1/2}(\Lambda)$ nel sottospazio di $W^2(Q)$ delle funzioni aventi traccia nulla su Λ tale che $D_n\theta^* = \theta$. Esiste quindi una applicazione lineare continua del sottospazio di $W^{1/2}(\Lambda)$ delle θ verificanti dist $(\operatorname{supp}\theta, \partial\Lambda) \geqslant 2\eta$ nel sottospazio di $W^2(Q)$ delle θ^* aventi traccia nulla su Λ e verificanti $D_n\theta^* = \theta$ e dist $(\operatorname{supp}\theta^*, \partial Q - \Lambda) \geqslant \eta$.

Adoperando (1.3) si ha $\|\psi_\epsilon a_{nn}^{-1}\|_{1/2,\Lambda} \leqslant c\|\psi_\epsilon\|_{1/2,\Lambda}$ e da quanto detto prima segue che esiste $v_\epsilon \in W^2(Q)$ verificante $v_\epsilon = 0$ su $\Lambda, D_n v_\epsilon = \psi_\epsilon a_{nn}^{-1}$ su Λ, $\|v_\epsilon\|_{2,Q} \leqslant c\|\psi_\epsilon\|_{1/2,\Lambda}$ e dist $(\operatorname{supp} v_\epsilon, \partial Q - \Lambda) \geqslant \eta$.

Posto $\tilde{u}_\epsilon = u_\epsilon + v_\epsilon$ da (1.6) segue con qualche calcolo

$$\int_Q a_{ij} D_i \tilde{u}_\epsilon D_j v \, dx = \int_Q \tilde{f}_\epsilon v \, dx \qquad \forall v \in \hat{V}_{-\epsilon}, \quad \text{ove } \tilde{f}_\epsilon = f_\epsilon - D_j(a_{ij} D_i v_\epsilon).$$

Si osservi che $\tilde{u}_\epsilon \in \hat{V}_\epsilon$ e che dist $(\operatorname{supp} \tilde{u}_\epsilon, \partial Q - \Lambda) \geqslant \eta$. Applicando il metodo delle traslazioni (cf. [4]) segue che $\|D_{ij}^2 \tilde{u}_\epsilon\|_Q \leqslant c(\|\nabla \tilde{u}_\epsilon\|_Q + \|\tilde{f}_\epsilon\|_Q)$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, e quindi $\|D_{ij}^2 u_\epsilon\|_Q \leqslant c(\|\nabla u_\epsilon\|_Q + \|f_\epsilon\|_Q + \|\psi_\epsilon\|_{1/2,\Lambda})$.

Finalmente adoperando (1.8), (1.14) e la maggiorazione $\|\nabla u_\epsilon\|_Q \leqslant \|\nabla u\|_Q + c\|u\|_{\infty,Q}$ ne segue la (1.20). La (1.21) è verificata dato che $W^2(Q)$ è riflessivo e $u_\epsilon \to u$ in $L^2(Q)$.

2. Regolarità Globale. Dati Ω, D, N e S come nella introduzione supporremo che per ogni punto $x_0 \in \Gamma$ esista un intorno aperto U di x_0 e una trasformazione bijettiva T di $\overline{U}$ su $C = \{ y \in R^n : |y_j| < 1, j = 1, \ldots, n. \}$ di classe C^2 assieme alla sua inversa T^{-1} e tale che $T(\Omega \cap U) = Q$, $T(\Gamma \cap U) = \Lambda$. Se $x_0 \in S$ supporremo inoltre che $T(D \cap U) = \Lambda_0^-$ e quindi $T(N \cap U) = \Lambda_0$, $T(S \cap U) = \gamma$.

Dato $x_0 \in S$ *fissiamo* una funzione $\phi \in C_0^\infty(U)$, $0 \leqslant \phi \leqslant 1$, tale che $\phi \equiv 1$ su U' ove U' è un intorno di x_0 la cui chiusura è contenuta in U. Sia $W_D^1(\Omega)$ lo sottospazio di $W^1(\Omega)$ delle funzioni aventi traccia nulla su D e sia u una soluzione del problema:

$$u \in W_D^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \{ a_{ij} D_i u D_j v + b_i D_i u v + c u v \} \, dx$$
$$= \int_\Omega f v \, dx + \int_N (\psi - \sigma u) v \, d\Gamma, \qquad \forall v \in W_D^1(\Omega), \quad (2.1)$$

ove

$$a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2 \quad \forall \xi \in R^n \ (\nu > 0), \quad b_i, c \in C^0(\overline{\Omega}), \quad \sigma \in \operatorname{Lip}(N), \qquad (2.2)$$

e

$$f \in L^2(\Omega), \quad \psi \in L^2(N). \qquad (2.3)$$

Lemma 2.1. *Posto $u_1 = u\phi$ si ha*

$$\int_{\Omega \cap U} a_{ij} D_i u_1 D_j v \, dx = \int_{\Omega \cap U} g v \, dx + \int_{N \cap U} (\psi\phi - \sigma' u) v \, d\Gamma, \qquad \forall v \in W_D^1(\Omega) \qquad (2.4)$$

ove

$$g = f\phi - D_j(a_{ij}D_i\phi)u - a_{ij}(D_j\phi D_i u + D_i\phi D_j u) - b_i\phi D_i u - c\phi u \tag{2.5}$$

e

$$\sigma' = \sigma\phi - D_\nu\phi, \qquad D_\nu\phi = a_{ij}D_i\phi n_j, \tag{2.6}$$

essendo n la normale esterna (unitaria) alla frontiera Γ.

La dimostrazione è un semplice esercizio.

Definiamo per ogni funzione v con dominio contenuto in $\overline{\Omega} \cap U$, la funzione $\bar{v} = v \circ T^{-1}$. Porremo $y = Tx$,

$$B = \text{modulo} \det \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)},$$

$$A_i = \det \frac{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})}, \qquad A = \left(\sum_{i=1}^n A_i^2\right)^{1/2}.$$

Eseguendo il cambiamento di variabili $x \to y$ si ottiene da (2.4), con qualche calcolo,

$$\int_Q \alpha_{kl} D_k \bar{u}_1 D_l \bar{v}\, dy = \int_Q \bar{g} B \bar{v}\, dy + \int_{\Lambda_0} (\overline{\psi\phi} - \bar{\sigma}'\bar{u}) A \bar{v}\, dy'\, dy_{n-1}, \qquad \forall \bar{v} \in V_0, \tag{2.7}$$

ove $\alpha_{kl}(y)\xi_k\xi_l \geq \nu_1|\xi|^2$ per ogni $\xi \in R^n$ $(\nu_1 > 0)$, $\alpha_{kl} \in C^1(\overline{Q})$. Inoltre $\bar{u}_1 \in \hat{V}_0$.

Supponiamo che la soluzione u di (2.1) appartenga a $W^{1,\infty}(\Omega)$ e che $\psi \in W^{1/2}(N) \cap L^\infty(N)$.

Da (2.7) e dal Teorema 1.1 segue allora che $\bar{u}_1 \in W^2(Q)$ ed inoltre

$$\|\bar{u}_1\|_{2,Q} \leq c\left(\|\bar{u}_1\|_{1,\infty,Q} + \|\bar{g}\|_Q + \|\bar{\psi}\,\bar{\phi} - \bar{\sigma}'\bar{u}\|_{1/2,\Lambda_0} + \|\bar{\psi}\,\bar{\phi} - \bar{\sigma}'\bar{u}\|_{\infty,\Lambda_0}\right).$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\|u_1\|_{2,\Omega\cap U} \leq c\big(&\|u_1\|_{1,\infty,\Omega\cap U} + \|g\|_{\Omega\cap U} + \|\psi\phi - \sigma' u\|_{1/2,N\cap U} \\ &+ \|\psi\phi - \sigma' u\|_{\infty,N\cap U}\big).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Da (2.8), (2.5) e (2.6) segue che $u \in W^2(\Omega \cap U')$ ed inoltre

$$\|u\|_{2,\Omega\cap U'} \leq c\left(\|u\|_{1,\infty,\Omega\cap U} + \|f\|_{\Omega\cap U} + \|\psi\|_{1/2,N\cap U} + \|\psi\|_{\infty,N\cap U}\right). \tag{2.9}$$

Si ha quindi

TEOREMA 2.1. *Sia* $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *soluzione di* (2.1) *sotto le ipotesi* (2.2), (2.3) *e* $\psi \in W^{1/2}(N) \cap L^{\infty}(N)$. *Allora u ha derivate seconde di quadrato sommabile ed inoltre*

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqslant c\left(\|u\|_{1,\infty,\Omega} + \|f\|_{\Omega} + \|\psi\|_{1/2,N} + \|\psi\|_{\infty,N}\right). \tag{2.10}$$

La dimostrazione segue da (2.9), da noti risultati di regolarizzazione locale sulla frontiera per i problemi di Dirichlet e di Neumann e dalla regolarizzazione al interno.

Se $\phi \in W^{1/2}(N)$ poniamo $W^1_{\phi,D}(\Omega) = \{v \in W^1(\Omega) : v = \phi \text{ su } N\}$. Si ha il seguente risultato:

TEOREMA 2.2. *Sia* $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *soluzione di* (0.2) *sotto le ipotesi* (2.2) *e* (2.3); *supponiamo inoltre che* $\psi \in W^{1/2}(N) \cap L^{\infty}(N)$ *e che* $\phi \in W^{3/2}(D) \cap \mathrm{Lip}(D)$. *Allora u ha derivate seconde di quadrato sommabile ed inoltre*

$$\|u\|_{2,\Omega} \leqslant c\left(\|u\|_{1,\infty,\Omega} + \|f\|_{\Omega} + \|\phi\|_{3/2,D} + \|\phi\|_{\mathrm{Lip}(D)} + \|\psi\|_{1/2,N} + \|\psi\|_{\infty,N}\right). \tag{2.11}$$

Dimostrazione. La funzione ϕ è la traccia su D si una funzione $\phi^* \in W^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ tale che $\|\phi^*\|_{2,\Omega} \leqslant c\|\phi\|_{3/2,D}$ e $\|\phi^*\|_{1,\infty,\Omega} \leqslant c\|\phi\|_{\mathrm{Lip}(D)}$, con c indipendente da ϕ. Applicando il Teorema 2.1 alla funzione $\tilde{u} = u - \phi^*$ si ricava con qualche calcolo la tesi.

Osservazione. Si può verificare che le condizioni $\psi \in L^{\infty}(N)$ e $\phi \in \mathrm{Lip}(D)$ sono superflue poichè sono una conseguenza delle altre ipotesi.

INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA.

REFERENCES.

[1] H. Beirão da Veiga, "On the $W^{2,p}$-regularity for solutions of mixed problems," *J. Math. Pures Appl.*, **53** (1974), 279–290.

[2] E. Magenes, "Recenti sviluppi nella teoria dei problemi misti per le equazioni lineari ellittiche," *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **27** (1955–56) 75–95.

[3] C. Miranda, "Su alcuni aspetti della teoria delle equazioni ellittiche," *Bull. Soc. Math. France*, **86** (1958), 331–354.

[4] L. Nirenberg, "Remarks on strongly elliptic partial differential equations," *Comm. Pure Appl. Math.*, **5**, (1955), 648–674.

[5] E. Shamir, "Regularization of mixed second-order elliptic problems," *Israel J. Math.*, **6**, No. 2 (1968), 150–168.

[6] G. Stampacchia, "Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane," *Ann. Mat. Pura. Appl.*, **51** (1959), 1–37.