(10)

Offprint from "Archive for Rational Mechanics and Analysis",
Volume 55, Number 3, 1974, P. 214–224

Un Principe de Maximum pour les Solutions d'une Classe d'Inéquations Paraboliques Quasi-Linéaires

HUGO BEIRÃO DA VEIGA

Communicated by J. SERRIN

Summary

In this paper we consider weak solutions of a class of *variational inequalities* associated with parabolic operators

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} D_j B_j(x, t, u, \nabla u) + B_0(x, t, u, \nabla u),$$

and we prove for them some L^∞ estimates in terms of the data and of the coefficients (cf. Theorem I and Theorem II). It will be shown as a particular case that the pointwise behavior of the solutions when $t \to \infty$ is of exponential type.

Introduction

Dans ce travail on considère les solutions faibles d'une classe d'inéquations paraboliques associées à des opérateurs du type

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{N} D_j B_j(x, t, u, \nabla u) + B_0(x, t, u, \nabla u),$$

avec $\sum_{j=1}^{N} D_j B_j$ opérateur elliptique et les fonctions B_k, $0 \leqq k \leqq N$, «non réguliers». En suivant des techniques analogues à celles de [6], [7], [3] et [4] on démontre des majorations pour la norme dans L^∞ des solutions en fonction des données du problème (cf. Théorème I et Théorème II); en particulier on démontre que le comportement ponctuel des solutions lorsque $t \to \infty$ est de type exponentiel.

Ce travail a aussi quelques points de contact avec les articles [1] et [2] (cf. en particulier le Théorème 1 de [2]).

La mèthode qu'on utilise dans ce travail nous permettra de démontrer dans un article à paraître (cf. [5]) des résultats de régularité dans les espaces $L^q(0, T; L^p(\Omega))$.

1. Résultats

On se donne un sous-ensemble ouvert connexe et borné Ω de R^N de frontière Γ, Ω étant localement d'un seul coté de Γ; on suppose Γ lipschitzienne. Nous représentons la mesure d'un ensemble mesurable $A\subset R^N$ par $|A|$, le point générique de R^N par $x=(x_1, \dots, x_N)$ et nous posons $|x|=(x_1^2+\dots+x_N^2)^{1/2}$. Étant donné $T>0$ on pose

$$\Lambda_t=\Omega\times]0,t[,\qquad \Lambda_{t,t_1}=\Omega\times]t,t_1[,\qquad \Lambda=\Lambda_T.$$

On introduit les espaces $V=H^{1,2}(\Omega)$, $\mathscr{V}=L^2(0,T;V)$, $L^{p,s}(\Lambda)=L^s(0,T;L^p(\Omega))$ avec $1\leqq p, s\leqq+\infty$, $\mathscr{E}=L^{2,\infty}(\Lambda)\cap\mathscr{V}$; ces espaces sont munis de leurs normes naturelles. On indique par commodité $\||\nabla u|\|$ avec $\|\nabla u\|$ et on définit

$$|u|_{\Lambda_t}^2=\sup_{]0,t[}\operatorname{ess}\|u\|_{2,\Omega}^2+\|\nabla u\|_{2,\Lambda_t}^2. \tag{1.1}$$

Finalement on pose

$$\mathscr{W}_1=\left\{u\in\mathscr{V}:\frac{du}{dt}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))\right\}\equiv H^{1,2}(\Lambda).$$

On supposera par commodité $N>2$; les cas $N=1$ et $N=2$ s'étudient d'une façon analogue.

On se donne aussi des fonctions réelles $B_k(x,t,y,z)$, $k=0,1,\dots,N$, définies dans $\Lambda\times\mathrm{R}\times\mathrm{R}^N$, mesurables en (x,t) pour tout $(y,z)\in\mathrm{R}\times\mathrm{R}^N$ et continues en (y,z) pour presque tout $(x,t)\in\Lambda$. On suppose qu'il existe des constantes positives a et $\bar{a}$ et des fonctions non negatives b, f, d, m, g, e, h mesurables dans Λ telles que pour tout $(y,z)\in\mathrm{R}\times\mathrm{R}^N$ et pour presque tout $(x,t)\in\Lambda$ on a

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^N B_j(x,t,y,z)\cdot z_j\geqq a|z|^2-b(x,t)\,y^2-f(x,t),\\ &|B_0(x,t,y,z)|\leqq d(x,t)|z|+m(x,t)|y|+g(x,y),\\ &|B_j(x,t,y,z)|\leqq\bar{a}|z|+e(x,t)|y|+h(x,t),\qquad j=1,\dots,N.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Soient p et s, $1\leqq p, s\leqq+\infty$, tels que

$$0\leqq\frac{N}{2p}+\frac{1}{s}<1 \tag{1.3}$$

et définissons χ_0, p_0, s_0 par

$$\begin{aligned}&\frac{N}{2p}+\frac{1}{s}=1-\chi_0,\qquad \frac{1}{p_0}=\frac{1}{p}+\frac{\chi_0}{N+2\chi_0}\cdot\frac{1}{p'},\\ &\frac{1}{s_0}=\frac{1}{s}+\frac{\chi_0}{N+2\chi_0}\cdot\frac{1}{s'},\end{aligned}\tag{1.4}$$

où en général $\dfrac{1}{r'}=1-\dfrac{1}{r}$, $1\leqq r\leqq+\infty$. Nous supposerons que

$$\begin{aligned}&b,f,m,d^2\in L^{p,s}(\Lambda),\qquad g\in L^{p_0,s_0}(\Lambda),\\ &h\in L^{2,2}(\Lambda),\qquad e^2\in L^{p_1,s_1}(\Lambda)\end{aligned}\tag{1.5}$$

avec $\dfrac{N}{2p_1}+\dfrac{1}{s_1}=1$.

Posons

$$\chi = \frac{2\chi_0}{N}, \quad q = 2p'(1+\chi), \quad r = 2s'(1+\chi); \tag{1.6}$$

on a alors

$$\frac{N}{2q} + \frac{1}{r} = \frac{N}{4}, \quad q \in]2, 2^*[, \quad r \in]2, \infty[\tag{1.7}$$

avec $2^* = \frac{2N}{N-2}$; on sait (cf. par exemple [6], chap. II, §3, ou [2], §1) que si q, r verifient (1.7) alors

$$\mathscr{E} \subset L^{q,r}(\Lambda).^1 \tag{1.8}$$

Pour presque tous les $t \in]0, T[$ on peut définir $A(t)\colon V \to V'$ par

$$(A(t)u, v) = \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega B_j(x, t, u, \nabla u) \cdot D_j v \, dx + \int_\Omega B_0(x, t, u, \nabla u) v \, dx, \qquad \forall u, v \in V,$$

et aussi $A\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ par

$$[Au, v] = \int_0^T (A(t)u(t), v(t)) \, dt, \qquad \forall u, v \in \mathscr{E}.$$

Soit maintenant K un convexe fermé et non vide de V et $\mathscr{K} = \{v \in \mathscr{V}\colon v(t) \in \mathrm{K}$ p.p. en $]0, T[\}$; $\mathscr{K}$ est un convexe fermé non vide de $\mathscr{V}$. On suppose en outre que

(1.9) il existe $k_0 \geqq 0$ tel que $\{u\}^k \equiv \min(u, k) \in \mathrm{K}$, $\quad \forall u \in \mathrm{K}, \quad \forall k \geqq k_0$.

On considérera aussi le cas particulier des convexes K telles que[2]

$$\|u^{(k)}\|_{2^*, \Omega} \leqq \gamma \|\nabla u^{(k)}\|_{2, \Omega}, \qquad \forall k \geqq k_0, \ \forall u \in \mathrm{K}, \tag{1.10}$$

où $u^{(k)} = u - \{u\}^k$ et γ est une constante.

Si le convexe K vérifie (1.10) alors

$$\|u^{(k)}\|_{q, r, \Lambda_t} \leqq \beta_0 |u^{(k)}|_{\Lambda_t}, \qquad \forall k \geqq k_0, \ \forall u \in \mathscr{E} \cap \mathscr{K}, \tag{1.11}$$

pour tout couple q, r verifiant (1.7)[1]; en outre $\beta_0 = \gamma^{\frac{N}{2} - \frac{N}{q}} \sqrt{2}$. La majoration (1.11) se démontre comme la (3.1) de [6], en utilisant (1.10) à la place de la majoration (2.13) de [6].

En général on a (cf. [6], chap. II, eq. (3.8); cf. aussi [2], Lemme 3).

$$\|u\|_{q, r, \Lambda_t} \leqq \beta(t) |u|_{\Lambda_t}, \qquad \forall u \in \mathscr{E} \tag{1.12}$$

avec

$$\beta(t) = \beta_0 + |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} t^{1/r} \sqrt{2} \tag{1.13}$$

où $\beta_0 = \beta_0(N, q, r, \Omega)$.

---

[1] Le résultat reste vrai si l'on prend $q \in [2, 2^*]$, $r \in [2, \infty]$ dans (1.7).

[2] D'aprés le théorème d'immersion de Sobolev (1.10) reste equivalent si l'on pose $\| \ \|_{2,\Omega}$ à la place de $\| \ \|_{2^*,\Omega}$.

On désignera par c, c_1, c_2, etc., des constantes qui dépendent au plus de a, N, p, s, Ω et γ. En outre on peut changer ces constantes au cours d'une démonstration sans que nous changions la notation.

Soit finalement u une solution du problème[3]

$$u \in C^0([0,T]; L^2(\Omega)) \cap \mathscr{K}, \qquad u(0)=u_0 \in \mathrm{K},$$

$$\int_0^T (v'(t)+A(t)u(t), v(t)-u(t))\,dt \tag{1.14}$$

$$\geqq \tfrac{1}{2}\|v(T)-u(T)\|_{2,\Omega}^2 - \|v(0)-u_0\|_{2,\Omega}^2, \qquad \forall v \in \mathscr{W}_1 \cap \mathscr{K}.$$

On démontrera les résultats suivants (par commodité on pose $\|\theta\|_{p,s,A} = \|\theta\|_{p,s}$, etc.).

Théorème I. *Soit u une solution de* (1.14), *et supposons que*

$$\sup_\Omega \operatorname{ess} u_0(x) \leqq k_0. \tag{1.15}$$

Alors $\sup_A \operatorname{ess} u(x,t) < +\infty$, *et en plus*

$$\sup_A \operatorname{ess} u(x,t) \leqq e^{c\mathscr{H}T}\{2k_0 + c_1(H_1\|g\|_{p_0,s_0} + \|f\|_{p,s}^{\frac{1}{2}})H_2\} \tag{1.16}$$

avec

$$\mathscr{H} = \|\theta\|_{p,s}^{\frac{r}{2\chi}} + \|\theta\|_{p,s}^{\frac{r}{2(1+\chi)}}, \qquad \theta = b+m+a^{-1}d^2,$$

$$H_1 = 2\beta_0 + c_2 \min(\|\theta\|_{p,s}^{-\frac{1}{2(1+\chi)}}, T^{1/r}), \tag{1.16'}$$

$$H_2 = \min(\|\theta\|_{p,s}^{-\frac{1}{2}}, \beta(T)\,T^{\chi/r}).$$

Si en particulier K *vérifie* (1.10), *alors*

$$\sup_A \operatorname{ess} u(x,t)$$

$$\leqq e^{cT\|\theta\|_{p,s}^{r/2\chi}} \cdot \{2k_0 + c_1(\|g\|_{p_0,s_0} + \|f\|_{p,s}^{1/2})\min(\|\theta\|_{p,s}^{-1/2}, T^{\chi/r})\}. \tag{1.17}$$

Les majorations (1.16) *et* (1.17) *restent valables si* $\theta \equiv 0$.

Remarque 1. La fonction $-u(x,t)$ est solution de (1.14) avec u_0 remplacé par $-u_0$, K et $\mathscr{K}$ remplacés respectivement par $-$K et $-\mathscr{K}$, et l'opérateur $A(t)$ remplacé par l'opérateur $\bar{A}(t)$ relatif aux fonctions $\bar{B}_k(x,t,y,z) = -B_k(x,t,-y,-z)$, $k=0,1,\dots,N$. Par conséquence l'étude des «inf ess» dans A se ramène à celui des «sup ess».

Remarque 2. L'hypothèse (1.10) est valable par exemple pour les convexes K tels que si $u \in$ K alors $u \leqq k_0$ dans un sous-ensemble de $\bar{\Omega}$ de mesure $(N-1)$-dimensionelle non nulle.

Remarque 3. Comme d'habitude les majorations

$$|B_j(x,t,y,z)| \leqq \bar{a}|z| + e(x,t)|y| + h(x,t), \qquad j=1,\dots N,$$

---

[3] Pour des résultats d'existence, étroitement lié à ce problème sous les conditions imposées dans ce travail, cf. [4] et [5].

ne sont pas essentielles et on ne trouve pas $\bar{a}$, $e(x, t)$ et $h(x, t)$ dans les estimations finales.

Théorème II. *Soit u une solution de* (1.14), *et supposons vérifiée la condition* (1.15). *Supposons en outre que* $b, f, d, m, g \in L^\infty(A)$. *Alors*

(1.18) $$\sup_A \operatorname{ess} u(x, t) \leqq e^{c\mathscr{H}T}\{2k_0 + c_1 H_2(H_2\|g\|_\infty + \|f\|_\infty^{1/2})\}$$

avec

(1.18′) $$\mathscr{H} = \|\theta\|_\infty^{(N+2)/2} + \|\theta\|_\infty, \qquad \theta = b + m + a^{-1}d^2,$$
$$H_2 = \min(\|\theta\|_\infty^{-1/2}, T^{1/(N+2)} + T^{1/2}).$$

Si en particulier K *vérifie* (1.10) *alors on a* (1.18) *avec*

(1.18″) $$\mathscr{H} = \|\theta\|_\infty^{(N+2)/2}, \qquad H_2 = \min(\|\theta\|_\infty^{-1/2}, T^{1/(N+2)}).$$

L'estimation (1.18) *reste valable dans le cas* $\theta \equiv 0$.

Remarque 4. Remarquons que les estimations du sup ess $u(x, t)$ données dans les Théorèmes I et II restent valables pour les sous-cylindres A_{τ_1, τ_2}, $0 \leqq \tau_1 < \tau_2 \leqq T$, porvu que k_0, que vérifie (1.9) par hypothèse, soit tel que $k_0 \geqq \sup_\Omega \operatorname{ess} u(x, \tau_1)$. Evidemment dans ce cas T est remplacé par $\tau_2 - \tau_1$ est les normes sont prises dans le cylindre A_{τ_1, τ_2}. Ce résultat découle des démonstrations (cf. la Remarque 5).

Remarquons finalement que si $\theta \not\equiv 0$ (le cas $\theta \equiv 0$ est le cas trivial) on a $H_1, H_2 \leqq A$ et, par conséquence, les solutions ont un comportement ponctuel du type

$$\sup_{A_t} \operatorname{ess} u(x, \tau) \leqq A e^{Bt}$$

avec A et B indépendantes de t.

Considérons maintenant quelques exemples. Soit E un sousensemble fermé de $\bar{\Omega}$ de mesure $(N-1)$-dimensionelle non nulle, Γ_1 un morceau de Γ, et posons

$$\mathsf{K}_1 = \{u : u \geqq 0 \text{ sur } \Gamma\}, \qquad \mathsf{K}_2 = \{u : u \geqq 0 \text{ sur } E\},$$
$$\mathsf{K}_3 = \{u : u \leqq 0 \text{ sur } E\} \quad \text{avec } E \subset \Omega,$$
$$\mathsf{K}_4 = \{u : u = 0 \text{ sur } \Gamma\}, \qquad \mathsf{K}_5 = V, \qquad \mathsf{K}_6 = \{u : u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Le convexe K_1 correspond au problème de Signorini (cas de évolution); c'est un problème à contraintes unilatérales sur la frontière latérale du cylindre A. Les convexes K_2 et K_3 correspondent respectivement à des contraintes inferieures et supérieures sur E, ces contraintes étant à l'interieur dans le cas de K_3. Finalement K_4, K_5 et K_6 correspondent à des problèmes classiques.

On voit aisément que tous ces convexes vérifient la condition (1.9) (avec $k_0 = 0$) et que les convexes K_3, K_4 et K_6 vérifient (1.10). On remarque aussi que seulement les solutions du quatrième problème vérifient à priori la condition $u \leqq$const. sur la surface latérale du cylindre A (condition imposée dans le Théorème 1 de [2] et dans le Théorème 2.1 du chapitre 5 de [6]).

2. Démonstration du Théorème I

On considère les solutions des problèmes

$$\frac{1}{n}u_n'+u_n=u,\qquad u_n(0)=u_0,\qquad n=1,2,\ldots,\tag{2.1}$$

avec u dans les conditions du Théorème I. On voit aisément que $u_n\in\mathscr{W}_1\cap\mathscr{K}$, $u_n\to u$ dans $C^0([0,T];L^2(\Omega))$ et dans $\mathscr{V}$, et

$$\frac{1}{n}\int_0^T\|u_n'(t)\|_{2,\Omega}^2\,dt\to 0$$

(cf. (1.4), (1.5) et (1.6) dans [4]). En outre, d'après (1.9) on a $v=u-u^{(k)}\in\mathscr{K}$ pour tout $k\geqq k_0$. Alors on démontre, avec la technique employée dans [4], la majoration (1.8) de [4] avec $\zeta(x,t)\equiv 1$, à savoir

$$\tfrac12\|u^{(k)}(t_1)\|_{2,\Omega}^2-\tfrac12\|u^{(k)}(t_0)\|_{2,\Omega}^2+\int_{t_0}^{t_1}(Au,u^{(k)})\,dt\leqq 0,\tag{2.2}$$

$$\forall k\geqq k_0,\qquad 0\leqq t_0<t_1\leqq T.$$

En posant $t_0=0$, et puisque $\sup\operatorname{ess}_{\Omega} u_0(x)\leqq k_0\leqq k$, on obtient

$$\begin{aligned}&\tfrac12\|u^{(k)}(t)\|_{2,\Omega}^2+\sum_{j=1}^N\int_0^t\int_\Omega B_j(x,\tau,u,\nabla u)\,D_i u^{(k)}\,dx\,d\tau\\&+\int_0^t\int_\Omega B_0(x,\tau,u,\nabla u)\,u^{(k)}\,dx\,d\tau\leqq 0,\qquad\forall k\geqq k_0.\ 0<t\leqq T,\end{aligned}\tag{2.3}$$

ce qui équivaut aux relations (1.1) et (1.2) de [3] et permettait de démontrer, comme dans [3], que (cf. (1.4) de [3])

$$\begin{aligned}|u^{(k)}|_{A_t}^2\leqq\max(1,a^{-1})\Big[&\int_{Q_k(t)}8\theta(u^{(k)})^2\,dx\,d\tau\\&+8k^2\int_{Q_k(t)}\theta_1\,dx\,d\tau+4\int_{Q_k(t)}g u^{(k)}\,dx\,d\tau+4\int_{Q_k(t)}f\,dx\,d\tau\Big],\end{aligned}\tag{2.4}$$

où $Q_k(t)=\{(x,\tau)\in A_t\colon u(x,\tau)>k\}$ et

$$\theta=b+m+a^{-1}d^2,\qquad\theta_1=b+m.\tag{2.5}$$

Alors, en posant $A_k(\xi)=\{x\in\Omega\colon u(x,\xi)>k\}$, on démontre comme dans [3] qu'il existe des constantes $\bar c=\bar c(a)$ et $\hat c=\hat c(a,N,p,s,|\Omega|)$ telles que

$$\begin{aligned}|u^{(k)}|_{A_t}^2\leqq\bar c^2&[k^2\|\theta_1\|_{p,s,A_t}+\beta^2\|g\|_{p_0,s_0,A_t}^2+\|f\|_{p,s,A_t}]\\&\cdot\Big(\int_0^t|A_k(\xi)|^{r/q}\,d\xi\Big)^{2\frac{1+\chi}{r}}\end{aligned}\tag{2.6}$$

pour tout t vérifiant

$$t\leqq\hat c\,\beta(t)^{-\frac{r}{\chi}}\,\|\theta\|_{p,s,A_t}^{-\frac{r}{2\chi}},\tag{2.7}$$

β étant défini dans le cas général par (1.13) et $\beta=\beta_0$ si K vérifie (1.10). On fixe en outre la constante $\hat c$ de façon que

$$2^{\frac{1+\chi}{\chi}}\,|\Omega|^{\chi/q}\,\bar c\,\hat c^{\chi/r}\leqq\tfrac12.\tag{2.8}$$

Remarque 5. D'après (2.2) on obtient une expression analogue à (2.3) avec $[t_0, t_1]$ à la place de $[0, t]$. On doit seulement imposer la condition

$$\sup_{x\in\Omega} \text{ess}\, u(x, t_0) \leqq k. \tag{2.9}$$

En particulier, les démonstrations qu'on fera relatives au cylindre Λ_t se répètent mutatis mutandis pour un cylindre arbitraire Λ_{t_0, t_1} dès que (2.9) soit valable.

En utilisant (1.11) ou (1.12) on établit d'après (2.6) le

Lemme 2.1. *Soit u dans les conditions du Théorème I. Alors si t vérifie* (2.7) *on a pour tout* $k \geqq k_0$

$$\|u^{(k)}\|_{q, r, \Lambda_t} \leqq \bar{c}\beta\left[k\|\theta_1\|^{1/2}_{p, s, \Lambda_t} + \beta\|g\|_{p_0, s_0, \Lambda_t} + \|f\|^{1/2}_{p, s, \Lambda_t}\right]\mu(k, t)^{1+\chi} \tag{2.10}$$

avec

$$\mu(k, t) = \left(\int_0^t |A_k(\xi)|^{r/q}\, d\xi\right)^{1/r} \tag{2.11}$$

et $\beta = \beta_0$ *si* K *vérifie* (1.10) *et*

$$\beta = \beta_0 + \sqrt{2}\,|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\, t^{1/r}$$

dans le cas général.

Posons par commodité

$$\gamma_1 = \bar{c}\|\theta_1\|^{1/2}_{p, s, \Lambda_t}, \qquad \gamma_2 = \bar{c}(\beta\|g\|_{p_0, s_0, \Lambda_t} + \|f\|^{1/2}_{p, s, \Lambda_t}); \tag{2.12}$$

d'après (2.10) et d'après la majoration

$$\|u^{(k)}\|_{q, r, \Lambda_t} \geqq \left[\int_0^t \left(\int_{A_h(\xi)} (u-k)^q\, dx\right)^{r/q} d\xi\right]^{1/r} \geqq (h-k)\,\mu(h, t),$$

pour $h > k \geqq k_0$, on obtient (en posant $\mu(h) = \mu(h, t)$),

$$(h-k)\,\mu(h) \leqq \beta\gamma_1\, k\,\mu(k)^{1+\chi} + \beta\gamma_2\,\mu(k)^{1+\chi}, \qquad \forall h > k \geqq k_0, \tag{2.13}$$

et pour tout t vérifiant (2.7). Soient $\mu_0 = \mu(k_0)$ et

$$d = \frac{(2\beta\gamma_1 k_0 + 2\beta\gamma_2)\, 2^{\frac{1+\chi}{\chi}}\, \mu_0^{\chi}}{1 - \beta\gamma_1\, 2^{\frac{1+\chi}{\chi}}\, \mu_0^{\chi}} \tag{2.14}$$

et posons pour chaque entier $m \geqq 0$

$$k_m = k_0 + \frac{d}{2} - \frac{d}{2^{m+1}}, \qquad \mu_m = \mu(k_m).$$

Alors, en posant $h = k_{m+1}$ et $k = k_m$ dans (2.13), on obtient

$$\frac{d}{2^{m+2}}\,\mu_{m+1} \leqq \beta\gamma_1\left(k_0 + \frac{d}{2} - \frac{d}{2^{m+1}}\right)\mu_m^{1+\chi} + \beta\gamma_2\,\mu_m^{1+\chi}$$

$$\leqq \beta\gamma_1\left(k_0 + \frac{d}{2}\right)\mu_m^{1+\chi} + \beta\gamma_2\,\mu_m^{1+\chi}$$

c'est à dire

$$\mu_{m+1} \leqq \frac{2\beta\gamma_1 k_0 + \beta\gamma_1 d + 2\beta\gamma_2}{d} 2^{m+1} \mu_m^{1+\chi}$$

(2.15)

$$= \mu_0^{-\chi} 2^{-\frac{1+\chi}{\chi}} 2^{m+1} \mu_m^{1+\chi}$$

car

$$d = (2\beta\gamma_1 k_0 + 2\beta\gamma_2 + \beta\gamma_1 d)\mu_0^{\chi} 2^{\frac{1+\chi}{\chi}}.$$

Démontrons maintenant que pour tout entier $m \geqq 0$ on a

(2.16) $$\mu_m \leqq \frac{\mu_0}{2^{m/\chi}}.$$

Pour $m=0$, (2.16) est évident; admettons qu'elle est vraie pour m et démontrons qu'elle est vraie pour $m+1$: on a

$$\mu_{m+1} \leqq \mu_0^{-\chi} 2^{-\frac{1+\chi}{\chi}} \cdot 2^{m+1} \mu_0^{1+\chi} 2^{-m\frac{1+\chi}{\chi}} = \mu_0 2^{-\frac{m+1}{\chi}}.$$

D'après (2.16) il s'ensuit que $\lim_{m\to\infty} \mu_m = 0$, et par conséquence $\mu\left(k_0 + \frac{d}{2}\right) = 0$, c'est à dire

(2.17) $$\sup_{A_t} \operatorname{ess} u(x, \xi) \leqq k_0 + \frac{d}{2}.$$

Théorème 2.2. *Soit u dans les conditions du Théorème I. Alors si t vérifie* (2.7) *on a*

(2.18) $$\sup_{A_t} \operatorname{ess} u(x, \xi) \leqq 2k_0 + c\beta(\beta \|g\|_{p_0, s_0, A_t} + \|f\|_{p, s, A_t}^{1/2}) t^{\chi/r}$$

avec $\beta = \beta_0$ si K *vérifie* (1.10), *et $\beta = \beta_0 + \sqrt{2}\,|\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} t^{1/r}$ dans le cas général.*

Démonstration. D'après (2.17) et (2.12) il suffit de démontrer que

(2.19) $$d \leqq 2k_0 + 2c\beta\gamma_2 t^{\chi/r}.$$

D'après (2.7) et la définition de μ_0 on a

$$1 - \beta\gamma_1 2^{\frac{1+\chi}{\chi}} \mu_0^{\chi} \geqq 1 - \gamma_1 2^{\frac{1+\chi}{\chi}} |\Omega|^{\chi/q} \hat{c}^{\chi/r} \|\theta\|_{p, s, A_t}^{-\frac{1}{2}}$$

et en utilisant (2.12), (2.5) et (2.8) on obtient

(2.20) $$1 - \beta\gamma_1 2^{\frac{1+\chi}{\chi}} \mu_0^{\chi} \geqq \tfrac{1}{2}.$$

D'après (2.14) et (2.20) il s'ensuit aisément (2.19) avec

$$c = 2^{\frac{1+2\chi}{\chi}} |\Omega|^{\chi/q}.$$

On démontre facilement le résultat suivant:

Lemme 2.3. *Supposons qu'on a des nombres non négatifs $k_0, k_1, \ldots, k_{n+1}$ et ϕ tels que*

(2.21) $$k_j \leqq 2\max(k_0, k_{j-1}) + \phi, \quad \forall j \in [1, n+1].$$

Alors

$$k_j \leqq 2^j(k_0+\phi), \qquad \forall j\in[1, n+1]. \tag{2.22}$$

Soit maintenant t_1 la solution (unique) de l'équation[4]

$$t_1=\hat{c}\beta(t_1)^{-\frac{r}{\chi}}\|\theta\|_{p,s}^{-\frac{r}{2\chi}}; \tag{2.23}$$

On a les deux cas possibles:

(*i*) $T\leqq t_1 \Leftrightarrow T\leqq \hat{c}\beta(T)^{-r/\chi}\|\theta\|_{p,s}^{-\frac{r}{2\chi}}$,

(*ii*) $T>t_1 \Leftrightarrow T>\hat{c}\beta(T)^{-r/\chi}\|\theta\|_{p,s}^{-\frac{r}{2\chi}}$,

où $\beta=\beta_0$ si K vérifie (1.10) et β est donné par (1.13) dans le cas général.

Démonstration de (1.17). Supposons vérifié (*ii*); alors il existe un entier $n\geqq 1$ tel que

$$n t_1 < T \leqq (n+1)t_1. \tag{2.24}$$

Posons $t_0=0$, $t_j=jt_1$ pour $j\in[1, n]$, $t_{n+1}=T$,

$$A_j=A_{t_{j-1},t_j} \quad \text{pour } j\in[1, n+1], \qquad k_j=\operatorname*{sup\,ess}_{A_j} u(x,\xi).$$

En appliquant le Théorème 2.2 dans chaque cylindre A_j (cf. Remarque 5) on obtient

$$k_j\leqq 2\max(k_0, k_{j-1})+\phi, \qquad j\in[1, n+1], \tag{2.25}$$

car la valeur initielle $u(x, t_{j-1})$ dans le cylindre A_j vérifie évidemment la majoration $\operatorname*{sup\,ess}_{\Omega} u(x, t_{j-1})\leqq k_{j-1}$; on a posé

$$\phi=c\beta(t_1)\left(\beta(t_1)\|g\|_{p_0,s_0}+\|f\|_{p,s}^{1/2}\right)t_1^{\chi/r} \tag{2.26}$$

avec $\beta(t_1)=\beta_0$ car K vérifie (1.10). D'après le Lemme 2.3 on obtient

$$\operatorname*{sup\,ess}_{A} u(x,\xi)\leqq \max k_j \leqq 2^{n+1}(k_0+\phi),$$

c'est à dire

$$\operatorname*{sup\,ess}_{A} u(x,\xi)\leqq 2^{Tt_1^{-1}+1}(k_0+\phi). \tag{2.27}$$

Puisque $t_1=c\|\theta\|_{p,s}^{-\frac{r}{2\chi}}$ et $T>t_1$, on obtient (1.17) d'après (2.27) et (2.26).

Si, par contre, l'hypothèse (*i*) est vérifie, alors T vérifie (2.7) et d'après le Théorème 2.2 on obtient (1.17) car $T^{\chi/r}\leqq c\|\theta\|_{p,s}^{-1/2}$.

Démonstration de (1.16). On a d'après (1.13) et (2.23)

$$t_1^{-1}\leqq c\|\theta\|^{r/2\chi}+c t_1^{1/\chi}\|\theta\|^{r/2\chi}$$

[4] On suppose $\theta\neq 0$. Autrement les démonstrations se simplifient.

et ça entraîne

(2.28) $$t_1^{-1} \leqq c\left(\|\theta\|_{p,s}^{\frac{r}{2\chi}} + \|\theta\|_{p,s}^{\frac{r}{2(1+\chi)}}\right) = c\mathscr{H};$$

on peut aussi démontrer que $\mathscr{H} \leqq c t_1^{-1}$.

Supposons maintenant vérifiée l'hypothèse (*ii*). Alors $\beta(t_1) \leqq \beta_0 + \sqrt{2}\,|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \cdot$ $\cdot\, T^{1/r}$ et en outre, d'après (1.13) et (2.23),

$$\beta(t_1) = \beta_0 + \sqrt{2}\,|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\,\hat{c}^{\frac{1}{r}}\,\beta(t_1)^{-\frac{1}{\chi}} \cdot \|\theta\|^{-\frac{1}{2\chi}}$$

d'où $\beta(t_1) \leqq 2\beta_0 + c\,\|\theta\|^{-\frac{1}{2(1+\chi)}}$. Par conséquence

(2.29) $$\beta(t_1) \leqq H_1.$$

Finalement, d'après (*ii*) on a $\beta(t_1)\,t_1^{\chi/r} \leqq \beta(T)\,T^{\chi/r}$ et d'après (2.23) on a $\beta(t_1) \cdot$ $\cdot\, t_1^{\chi/r} = \hat{c}^{\chi/r}\,\|\theta\|^{-\frac{1}{2}}$; il s'ensuit

(2.30) $$\beta(t_1)\,t_1^{\chi/r} \leqq cH_2.$$

D'après (2.27) et (2.26) et en utilisant (2.28), (2.29) et (2.30) on démontre (1.16).

Si, par contre, (*i*) est vérifiée on démontre (1.16) comme conséquence directe du Théorème 2.2 car $\beta(T)\,T^{\chi/r} \leqq \beta(t_1)\,t_1^{\chi/r} = \hat{c}^{\chi/r}\,\|\theta\|^{-\frac{1}{2}}$,

$$T < \hat{c}\left(\sqrt{2}\,|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\,T^{\frac{1}{r}}\right)^{-\frac{r}{\chi}} \|\theta\|^{-r/2\chi} \qquad \left(\text{i.e. } T^{1/r} < c\,\|\theta\|^{-\frac{1}{2(1+\chi)}}\right),$$

et l'exponentiel dans (1.16) est $\geqq 1$.[5]

Remarquons que dans la démonstration du Théorème I on a employé des cylindres Λ_j de «hauteur» t_1 donné par (2.23). Mais on pourrait définir t_1 par

$$t_1 = \hat{c}\,\beta(t_1)^{-\frac{r}{\chi}}\,\|\theta\|_{p,s,\Lambda_{t_1}}^{-\frac{r}{2\chi}}$$

(avec Λ_{t_1} à la place de Λ) et en général définir t_j par

$$t_j - t_{j-1} = \hat{c}\left[\beta(t_j - t_{j-1})\right]^{-\frac{r}{2\chi}}\,\|\theta\|_{p,s,\Lambda_{t_{j-1},t_j}}^{-\frac{r}{2\chi}}.$$

De la même façon à la place de ϕ donné par (2.26) on pourrait employer des ϕ_j dépendantes des cylindres Λ_j en remplaçant dans (2.26) $\|g\|_{p_0,s_0,\Lambda}$ et $\|f\|_{p,s,\Lambda}$ respectivement par $\|g\|_{p_0,s_0,\Lambda_j}$ et $\|f\|_{p,s,\Lambda_j}$, et en remplaçant t_1 par $t_j - t_{j-1}$.

Un exemple: supposons que K vérifie (1.10) et que s et p sont tels que $r/2\chi = s$. Alors

$$t_1 = \hat{c}\,\beta_0^{-2s}\,\|\theta\|_{p,s,\Lambda_{t_1}}^{-\frac{r}{2\chi}} = c\left(\int_0^{t_1} \|\theta(t)\|_{p,\Omega}^{s}\,dt\right)^{-1}$$

et en général

$$t_j - t_{j-1} = c\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\theta(t)\|_{p,\Omega}^{s}\,dt\right)^{-1}, \qquad \text{si } t_j \leqq T.$$

[5] Elle est aussi $\leqq c$ car, comme on a déjà remarquée, $\mathscr{H} \leqq c t_1^{-1}$.

En désignant avec t_n le plus grand des t_j tels que $t_j < T$ et en posant $t_0 = 0$ et $t_{n+1} = T$ on obtient

$$T = \sum_{j=1}^{n+1} (t_j - t_{j-1}) \geqq \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) \geqq n^2 \left[\sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})^{-1} \right]^{-1}$$
$$\geqq c n^2 \left(\int_0^T \|\theta(t)\|_{p,\Omega}^s \, dt \right)^{-1}$$

et par conséquent $n \leqq c\sqrt{T} \|\theta\|_{p,s}^{s/2}$. Donc on peut remplacer dans (1.17) l'exposant $c \|\theta\|_{p,s}^{r/2\chi} \cdot T$ par l'exposant $c \|\theta\|_{p,s}^{s/2} \sqrt{T} = c(\|\theta\|_{p,s}^{r/2\chi} T)^{1/2}$.

3. Démonstration du Théorème II

Un autre exemple est donné par la *démonstration du Théorème II.* On a dans ce cas

$$p = s = +\infty, \quad \chi_0 = 1, \quad p_0 = s_0 = N+2, \quad \chi = 2/N, \quad q = r = 2(N+2)/N.$$

Vérifions par exemple (1.18), (1.18'); la démonstration est presque celle donnée pour obtenir (1.16).

Supposons vérifié le cas (*ii*), page 222. On a (2.25) avec Φ remplacé par

$$\Phi_j = c\beta(t_1)\big(\beta(t_1) \|g\|_{p_0, s_0, A_j} + \|f\|_{p,s}^{1/2}\big) t_1^{\chi/r}$$

car $t_1 \geqq t_j - t_{j-1}$ (« = » si $j < n+1$); mais puisque

$$\|g\|_{p_0, s_0, A_j} \leqq |\Omega|^{1/p_0} \|g\|_\infty t_1^{1/s_0} = |\Omega|^{1/p_0} \|g\|_\infty t_1^{\chi/r}$$

on a (2.25) avec

$$\Phi = c\beta(t_1)\big(\beta(t_1) t_1^{\chi/r} \|g\|_\infty + \|f\|_\infty^{1/2}\big) t_1^{\chi/r}. \tag{3.1}$$

D'après (2.27), (3.1), (2.28) et (2.30) on obtient (1.18) et (1.18').

On a de cette façon amélioré le coeficient de $\|g\|_\infty$ car on n'obtient pas (1.18) directement d'après la formule (1.16).

Bibliographie

1. ARONSON, D. G., & J. SERRIN, A maximum principle for nonlinear parabolic equations. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **21**, 291–305 (1967).
2. ARONSON, D. G., & J. SERRIN, Local behavior of solutions of quasi-linear parabolic equations. Arch. Rational Mech. Analysis **25**, 81–122 (1967).
3. BEIRÃO DA VEIGA, H., & J. P. DIAS, Regularité des solutions d'une équation parabolique non linéaire avec des contraintes unilatérales sur la frontière. Ann. Inst. Fourier **22**, 161–192 (1972).
4. BEIRÃO DA VEIGA, H., & J. P. DIAS, Sur l'existence et la regularité des solutions faibles d'une inéquation parabolique non linéaire. J. reine angew. Mathematik **260**, 181–199 (1973).
5. BEIRÃO DA VEIGA, H., Sur quelques inéquations paraboliques. J. Math. Analysis Appl. **45**, 324–347 (1974).
6. LADYZENSKAJA, O. A., V. A. SOLONNIKOV, & N. N. URAL'CEVA, Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Transl. Math. Monographs, Am. Math. Soc. (1968).
7. STAMPACCHIA, G., Régularisation des solutions de problèmes aux limites elliptiques à données discontinues. Intern. Symp. Linear Spaces, Jerusalem, 399–408 (1960).

Instituto de Física e Matemática,
Av. Gama Pinto 2
Lisboa, Portugal

(Manuscrit reçu le 7 mars, 1974)