BEIRÃO DA VEIGA, HUGO
1969
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. LXXXIII, pp. 73-112

HBV-1

Sulla hölderianità delle soluzioni di alcune disequazioni variazionali con condizioni unilatere al bordo (*).

HUGO BEIRÃO DA VEIGA (**) (***)

Summary. - *In this paper the Author proves the Holder-continuity of the weak solutions of the problems P_1, P_2, and P_3 (see Introduction) expressed by variational inequalities.*

Introduzione

Sia Ω un aperto limitato e connesso di R^N e sia $\partial\Omega$ la sua frontiera; Sia Γ un sottoinsieme chiuso di $\partial\Omega$ che supporremo sempre di misura $N-1$ dimensionale non nulla. Ipotesi più precise su $\partial\Omega$ e Γ saranno fatte in seguito.

Sia V il sottospazio chiuso di $H^1(\Omega)$ delle funzioni con traccia nulla su Γ. Indicheremo con $\boldsymbol{K}$ il sottoinsieme di $H^1(\Omega)$ delle funzioni non negative su $\partial\Omega$, e con $\boldsymbol{K}_0$ l'intersezione di $\boldsymbol{K}$ con V:

$$\boldsymbol{K} = \{ v \in H^1(\Omega): \quad v \geq 0 \text{ su } \partial\Omega \}$$

$$\boldsymbol{K}_0 = \{ v \in H^1(\Omega): \quad v \geq 0 \text{ su } \partial\Omega; \quad v = 0 \text{ su } \Gamma \}$$

$\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{K}_0$ sono convessi chiusi.
Consideriamo i seguenti problemi:

P_1 - trovare $u \in \boldsymbol{K}$ tale che

$$\int_\Omega u_{x_i}(v-u)_{x_i}dx + \lambda \int_\Omega u(v-u)dx \geq \int_\Omega f_0(v-u)dx \qquad \forall\, v \in \boldsymbol{K} \tag{0.1}$$

dove $\lambda > 0$.

P_2 - trovare $u \in \boldsymbol{K}$ tale che

$$\int_\Omega u_{x_i}(v-u)_{x_i}dx \geq \int_\Omega f_0(v-u)dx \qquad \forall\, v \in \boldsymbol{K} \tag{0.2}$$

(*) Lavoro eseguito per conto dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del C. N. R.
(**) Borsista dell'Instituto de Alta Cultura (Portogallo).
(***) Entrata in Redazione il 2 aprile 1969.

P_3 - trovare $u \in \boldsymbol{K}_0$ tale che

$$\int_\Omega u_{x_i}(v-u)_{x_i}dx \geq \int_\Omega f_0(v-u)dx \qquad \forall\, v \in \boldsymbol{K}_0 \tag{0.3}$$

dove f_0 è una funzione di $L^2(\Omega)$.

La soluzione del problema P_1 soddisfa formalmente le relazioni

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f_0 & \text{in } \Omega \\ \left.\begin{array}{l} u \geq 0 \\ \dfrac{du}{dn} \geq 0 \\ u \cdot \dfrac{du}{dn} = 0 \end{array}\right\} & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.5}$$

mentre quella del problema P_2 soddisfa le condizioni (0.5) con $\lambda = 0$.

La soluzione di P_3 soddisfa formalmente le relazioni

$$\begin{cases} -\Delta u = f_0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \Gamma \\ \left.\begin{array}{l} u \geq 0 \\ \dfrac{du}{dn} \geq 0 \\ u \cdot \dfrac{du}{dn} = 0 \end{array}\right\} & \text{in } \partial\Omega - \Gamma. \end{cases} \tag{0.6}$$

Alcuni problemi di questo tipo sono stati considerati dapprima da FICHERA [2], [3]. Essi rientrano nel quadro della teoria generale delle disequazioni variazionali trattato da LIONS e STAMPACCHIA [7], e sono stati ripresi da A. FRIEDMAN [4].

Secondo la teoria generale, i problemi P_1 e P_3 ammettono soluzione unica, con $f_0 \in L^2(\Omega)$. Invece il problema P_2 ammette almeno una soluzione se

$$\int_\Omega f_0 dx < 0 \tag{0.7}$$

e non ammette soluzione se

$$\int_\Omega f_0 dx > 0. \tag{0.8}$$

Noi dimostreremo che, nella ipotesi (0.7), la soluzione (che esiste) è unica, mentre nell'ipotesi

$$\int_\Omega f_0 dx = 0 \tag{0.9}$$

dimostreremo che il problema P_2 ammette soluzione se e solo se il problema di NEUMANN

$$u \in H^1(\Omega)\,; \qquad \int_\Omega u_{x_i} \cdot v_{x_i} \cdot dx = \int_\Omega f_0 v dx \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega) \tag{0.10}$$

ammette una soluzione limitata inferiormente su $\partial\Omega$. Ed in questo caso le soluzioni di P_2 sono precisamente le soluzioni di (0.10) che appartengono a $\boldsymbol{K}$, così che lo studio della regolarità delle soluzioni del problema P_2 in condizioni (0.9) è ricondotto allo studio della regolarità delle soluzioni del problema (0.10), che è noto. Perciò ci limiteremo, nel caso del problema P_2, a supporre verificata la condizione (0.7).

Osserviamo che l'ipotesi (0.9) esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè il problema (0.10) sia risolubile; ed in questo caso le soluzioni differiscono per una costante arbitraria.

Per il problema P_1 LIONS ha dimostrato che $u \in H^{2,2}(\Omega)$ [6] mentre E. SHAMIR ha mostrato che in generale non si può dedurre che $u \in H^{2,4}(\Omega)$. (cfr. BREZIS-STAMPACCHIA [1]). Invece Y. HAUGAZEAU [5] ha dimostrato che la soluzione u del problema P_1 soddisfa la proprietà:

$$u = \sup_{\Gamma_1} u(\Gamma_1)$$

dove Γ_1 è un sottoinsieme misurabile di $\partial\Omega$ e $u(\Gamma_1)$ è la soluzione del problema misto di DIRICHLET-NEUMAN

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f_0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \Gamma_1 \\ \dfrac{du}{dn} = 0 & \text{in } \partial\Omega - \Gamma_1 . \end{cases}$$

Il risultato di LIONS precedentemente citato implica l'hölderianità di u solo per $N = 2, 3$.

Noi ci proponiamo di dimostrare, nel caso in cui $f_0 \in L^p(\Omega)$, $p > N/2$, la limitatezza delle soluzioni dei problemi P_1, P_2, P_3, e in ipotesi di maggior regolarità su $\partial\Omega$ e Γ, la loro hölderianità su $\overline{\Omega}$ (vedere teoremi I e II).

La tecnica usata per ottenere i suddetti risultati è analoga a quella utilizzata da G. STAMPACCHIA per trattare i cosiddetti problemi con dati discontinui [9].

Nel seguito preciseremo le condizioni da imporre a $\partial\Omega$ e Γ:

Diremo che Ω *gode della proprietà di cono* se esiste un cono C tale che ogni punto $y \in \partial\Omega$ è vertice di un cono uguale a C e contenuto in Ω.

Diremo che Ω *ha frontiera lipschitziana* se $\partial\Omega$ è una varietà lipschitziana $N-1$ dimensionale, e se esiste una costante positiva α_0 tale che per ogni $y \in \partial\Omega$ e ogni α, $0 < \alpha < \alpha_0$, $I(y;\, \alpha) \cap \Omega$ e $I(y;\, \alpha) \cap \complement\Omega$ sono connessi, dove con $I(y;\, \alpha)$ indicheremo in generale la sfera di centro y e raggio α (ossia Ω sta da una parte di $\partial\Omega$).

In questa ultima ipotesi, se $\partial\Omega$ è anche di classe C^1 diremo che Ω *ha frontiera di classe* C^1.

Sia Γ la chiusura in $\partial\Omega$ di un aperto non vuoto Γ_0, supponiamo che $\partial\Gamma_0$ sia una varietà $N-2$ dimensionale di classe C^1 e che per $y \in \partial\Gamma_0$ e $0 < \alpha < \alpha_0$, $I(y;\, \alpha) \cap \Gamma_0$ e $I(y;\, \alpha) \cap (\partial\Omega - \Gamma_0)$ siano connessi. In tale caso diremo che Γ è *ammissibile.*

Noi ci proponiamo di dimostrare i seguenti teoremi:

TEOREMA I. - *Se Ω gode della proprietà di cono e $f_0 \in L^p(\Omega)$ con $p > N/2$, la soluzione del problema P_1 è limitata e vale la maggiorazione*

$$\sup_{x \in \Omega} |\, u(x) \,| \leq K(\Omega,\ N,\ p,\ \lambda) \cdot \|\, f_0 \,\|_{L^p} . \tag{0.11}$$

Se Ω ha frontiera lipschitziana, $|\,\Gamma\,| > 0$ e $p > N/2$, la soluzione del problema P_3 è limitata e vale la maggiorazione

$$\sup_{x \in \Omega} |\, u(x) \,| \leq K(\Omega,\ \Gamma_0,\ N,\ p) \,\|\, f_0 \,\|_{L^p} . \tag{0.12}$$

Se Ω ha frontiera lipschitziana, supponendo valida la (0.7), *la soluzione del problema P_2 è anch' essa limitata.*

TEOREMA II. - *Se Ω ha frontiera C^1 e $p > N/2$ le soluzioni dei problemi P_1 e P_2 sono hölderiane in $\overline{\Omega}$.*

Con l' ipotesi supplementare di ammissibilità su Γ, la soluzione del problema P_3 è anch'essa hölderiana in $\overline{\Omega}$.

Nel seguito daremo le dimostrazioni di questi due teoremi per il problema P_1.

Gli altri due problemi si trattano in modo analogo, e nel penultimo paragrafo metteremo in evidenza le differenze di maggiore rilievo, Facciamo notare che i risultati ottenuti sono ancora validi in condizioni più generali sull'operatore differenziale, sul secondo membro, e su Ω. Ne accenneremo brevemente nell'ultimo paragrafo.

Ringrazio il prof. G. STAMPACCHIA con il quale ho avuto utili discussioni.

§ 1. - Richiami ed osservazioni sull'esistenza della soluzione.

1. - In questo numero riportiamo, per comodità del lettore, alcuni risultati di LIONS e STAMPACCHIA [7] sull'esistenza ed unicità per soluzioni di disequazioni variazionali. Nel numero 2 faremo qualche osservazione su questi risultati.

Sia V uno spazio di HILBERT reale, in cui indicheremo rispettivamente con $(\cdot\,, \cdot)$ e $\|\cdot\|$ il prodotto scalare e la norma; con V' indicheremo lo spazio duale di V, e con $a(u, v)$ una forma bilineare e continua su V, ossia, una forma bilineare per cui esiste una costante C tale che

$$|a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\| \qquad \forall\, u, v \in V. \tag{1.1}$$

Diremo che $a(u, v)$ è coercitiva se esiste una costante positiva α tale che

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V. \tag{1.2}$$

Sia $\boldsymbol{K}$ un convesso di V e f un elemento di V'. Consideriamo il seguente problema:

PROBLEMA 1.1 - trovare $u \in \boldsymbol{K}$ tale che

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \qquad \forall\, v \in \boldsymbol{K}. \tag{1.3}$$

Si ha il seguente teorema (di esistenza ed unicità):

TEOREMA 1.1. - *Sia $a(u, v)$ una forma bilineare che soddisfa le relazioni* (1.1) *e* (1.2), *e sia $\boldsymbol{K}$ un convesso chiuso di V. Allora esiste ed è unica la soluzione del problema* (1.1).

L'applicazione $f \to u$ è continua da V' in V.

Questo teorema conduce immediatamente all'esistenza e all'unicità della soluzione, per i problemi P_1 e P_3.

Per quanto concerne il problema P_2, bisogna studiare il caso in cui la (1.2) non sia soddisfatta.

Supponiamo che la norma $\|v\|$ sia equivalente a

$$p_0(v) + p_1(v)$$

dove

(1.4) $p_0(v)$ è una norma su V, rispetto alla quale V è uno spazio pre-hilbertiano, e $p_1(v)$ è una semi-norma su V.

(1.5) Lo spazio

$$Y = \{ v \in V:\ p_1(v) = 0 \}$$

abbia dimensione finita.

(1.6) Esista una costante c_1 tale che

$$\inf_{y \in Y} p_0(v - y) \leq c_1 p_1(v).$$

Sia $a(u, v)$ una forma bilineare continua su V, semi-coercitiva, ossia

$$a(v, v) \geq c_2 p_1(v)^2 \qquad \forall\, v \in V, \qquad c_2 > 0. \tag{1.7}$$

Si ha il seguente teorema di esistenza:

TEOREMA 1.2. - *Supponiamo che le* (1.4) (1.5) (1.6) *e* (1.7) *siano verificate. Sia* $\boldsymbol{K}$ *un convesso chiuso contenente l'origine. Sia* f *un elemento di* V' *tale che* $f = f_0 + f_1$ *con* $f_0, f_1 \in V'$ *soddisfacenti, se* $Y \cap \boldsymbol{K} \neq \{0\}$, *le seguenti relazioni*:

$$(f_0, y) < 0 \qquad \forall\, y \in Y \cap \boldsymbol{K}, \qquad y \neq 0 \tag{1.8}$$

$$|(f_1, v)| \leq c_3 p_1(v), \qquad \forall\, v \in V. \tag{1.9}$$

Allora esiste almeno una soluzione del problema 1.1.

Come ultimo richiamo, riportiamo l'osservazione 5.1 del lavoro sopra citato:

OSSERVAZIONE 1.1. - Supponiamo che le (1.4), (1.5), (1.6) e (1.7) siano verificate; supponiamo che $\boldsymbol{K}$ sia un cono convesso e chiuso e che

$$a(v, y) = 0 \qquad \forall\, v \in V, \qquad \forall\, y \in Y. \tag{1.10}$$

Sia $f = f_0 + f_1$ con $f_0, f_1 \in V'$, e f_1 soddisfi alla (1.9).

Allora se il problema 1.1 ha una soluzione, f_0 deve verificare la condizione

$$(f_0, y) \leq 0 \qquad \forall\, y \in Y \cap \boldsymbol{K}. \tag{1.11}$$

2. - Cominceremo questo numero con una osservazione al teorema 1.2.

OSSERVAZIONE 2.1. - (i) Se u e v sono soluzioni del problema 1.1 e se le condizioni (1.4), (1.5), (1.6) e (1.7) sono soddisfatte, allora

$$u - v \in Y.$$

(ii) Se inoltre $f = f_0 + f_1$ soddisfa le (1.8) e (1.9),

$$Y \subset \{ x \in V : x = t\xi, \quad t \in R, \quad \xi \in \boldsymbol{K} \} \tag{2.1}$$

e

$$a(v, y) \geq 0 \qquad \forall\, v \in \boldsymbol{K}, \qquad \forall\, y \in Y \cap \boldsymbol{K} \tag{2.2}$$

la soluzione del problema 1.1 è unica.

DIM. - (i) Siano u e v due soluzioni del problema.

Allora

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u)$$

$$- a(v, v - u) \geq - (f, v - u).$$

Sommando, si ha

$$a(v - u, v - u) \leq 0;$$

tenendo conto della (1.7) otteniamo

$$p_1(v - u) = 0$$

ossia

$$v - u \in Y.$$

(ii) Supponiamo che esistano due soluzioni diverse u e v. Da (i) si conclude che $y = v - u \in Y$, e perciò esisterà $\alpha > 0$ tale che

$$\alpha y \in \boldsymbol{K}$$

oppure

$$\alpha(-y) \in \boldsymbol{K},$$

poichè è valida la (2.1).

Possiamo supporre che sia verificata la prima ipotesi poichè $-y = u - v$.

Allora, siccome $(f_1, y) = 0$, si hanno le relazioni

$$a(v, y) = a(v, v - u) \leq (f, y) = (f_0, y) \tag{2.3}$$

$$a(u, y) = a(u, v - u) \geq (f, y) = (f_0, y) \tag{2.4}$$

e sottraendo membro a membro si ottiene

$$a(y, y) = 0$$

ossia

$$a(v,\ y) = a(u,\ y);$$

tenendo conto delle (2.3) e (2.4), si ha:

$$a(v,\ y) = a(u,\ y) = (f_0\,,\ y)$$

ed anche

$$a(v,\ \alpha y) = (f_0\,,\ \alpha y) < 0$$

poichè

$$\alpha y \in \boldsymbol{K} \cap Y.$$

Ma la (2.2) implica

$$a(v,\ \alpha y) \geq 0,$$

il che è assurdo.

Il problema P_2 sotto le condizioni (0.7), soddisfa le ipotesi del teorema 1.2 e dell'osservazione 2.1. Otteniamo in questo modo l'esistenza e l'unicità per il problema considerato; infatti basta prendere

$$p_0(v) = \| v \|_{L^2(\Omega)}$$

$$p_1(v) = \| v_x \|_{L^2(\Omega)}\,,$$

mentre Y sarà lo spazio delle costanti e la (1.6) la disuguaglianza di POINCARÉ.

Per terminare questo paragrafo dimostreremo che il problema P_2 ammette soluzioni nell'ipotesi (0.9) se e soltanto se le ammette il problema (0.10), e che le soluzioni di P_2 sono quelle di (0.10) che appartengouo a $\boldsymbol{K}$.

Sia u una soluzione di (0.10) limitata inferiormente su $\partial\Omega$, ossia,

$$u \geq -k_0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega.$$

Allora

$$w = u + k$$

appartiene a $\boldsymbol{K}$ se $k \geq k_0$, e qualunque sia $v \in \boldsymbol{K}$ abbiamo

$$\int_\Omega w_{x_i}(v - w)_{x_i} dx = \int_\Omega u_{x_i}(v - u)_{x_i} dx =$$

$$= \int_\Omega f_0(v - u) dx = \int_\Omega f_0(v - w) dx$$

poichè

$$\int_\Omega f_0 dx = 0.$$

Reciprocamente, sia u una soluzione di (0.2), sia ψ una funzione di $C^1(\overline{\Omega})$ e sia

$$k = \min_{\partial\Omega} \psi.$$

Allora $\psi - k$ appartiene a $\boldsymbol{K}$. Applicando la (0.2) con

$$v = u + \psi - k \in \boldsymbol{K}$$

segue

$$\int_\Omega u_{x_i}\psi_{x_i}dx \geq \int_\Omega f_0\psi dx \qquad \forall\ \psi \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{2.5}$$

Adoperando $-\psi$ al posto di ψ si ottiene l'uguaglianza nella relazione (2.5), e per chiusura di $C^1(\overline{\Omega})$ in $H^1(\Omega)$ si ha la (0.10).

§ 2. - **Limitatezza della soluzione.**

3. - In questo numero ci proponiamo di dimostrare il teorema I. Data $u \in H^1(\Omega)$ indicheremo con $A(k)$ e con $B(k)$ i sottoinsiemi di Ω dove $u \geq k$ e $u \leq k$ rispettivamente, e con $|E|$ la misura di LEBESGUE di E.

Avremo bisogno del seguente lemma che si trova in G. STAMPACCHIA [10; lemma 4.1].

LEMMA 3.1. - *Sia $\varphi(t)$ una funzione definita per $t \geq k_0$, non negativa e non crescente, tale che se $h > k \geq k_0$ si abbia:*

$$\varphi(h) \leq \frac{c}{(h-k)^\alpha}[\varphi(k)]^\beta$$

c, α, β essendo costanti positive, con $\beta > 1$.
Allora:

$$\varphi(k_0 + d) = 0$$

dove

$$d^\alpha = c[\varphi(k_0)]^{\beta-1}2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}.$$

Passiamo alla dimostrazione del teorema I.

Sia $u \in \boldsymbol{K}$ la soluzione di (0.1) con $f_0 \in L^p(\Omega)$, $p > \dfrac{N}{2}$. Sia $v = \{u\}^k$ con $k > 0$, dove

$$\{u\}^k = \begin{cases} u & \text{se} \quad u < k \\ k & \text{se} \quad u \geq k. \end{cases}$$

È

$$v - u = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad u < k \\ k - u & \text{se} \quad u \geq k. \end{cases}$$

Poichè $v \in \boldsymbol{K}$, da (0.1) si ha:

$$-\int_{A(k)} u_x^2 dx + \lambda \int_{A(k)} u(k-u) dx \geq \int_{A(k)} f_0(k-u) dx,$$

e siccome $-\lambda k(k-u) \geq 0$ su $A(k)$, abbiamo

$$\int_{A(k)} u_x^2 dx + \lambda \int_{A(k)} (k-u)^2 dx \leq \Big(\int_{A(k)} f_0^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{A(k)} (u-k)^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Il secondo membro si maggiora con

$$\| f_0 \|_p \, | A(k) |^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \Big(\int_{A(k)} | u - k |^{2^*} dx \Big)^{\frac{1}{2^*}} | A(k) |^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{N}}$$

dove in generale, per $p < N$, indichiamo con p^* il numero definito da

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

In conclusione, essendo $\lambda_1 = \min(1, \lambda)$, abbiamo

$$\lambda_1 \Big\{ \int_{A(k)} u_x^2 dx + \int_{A(k)} (u-k)^2 dx \Big\} \leq \| f_0 \|_p \Big(\int_{A(k)} | u - k |^{2^*} dx \Big)^{\frac{1}{2^*}} | A(k) |^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{N}}. \tag{3.1}$$

D' altra parte esiste $c = c(N, \Omega)$ tale che

$$\Big(\int_\Omega | v - u |^{2^*} dx \Big)^{\frac{2}{2^*}} \leq c^2 \Big\{ \int_\Omega (v-u)_x^2 dx + \int_\Omega (v-u)^2 dx \Big\} \tag{3.2}$$

ossia

$$\Big(\int_{A(k)} | u - k |^{2^*} dx \Big)^{\frac{2}{2^*}} \leq c^2 \Big\{ \int_{A(k)} u_x^2 dx + \int_{A(k)} (u-k)^2 dx \Big\}. \tag{3.3}$$

Da (3.1) e (3.3) discende che

$$\left(\int_{A(k)} |u-k|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq \frac{c^2}{\lambda_1}\|f_0\|_p\,|A(k)|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{N}}$$

e siccome

$$\left(\int_{A(k)} |u-k|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \geq (h-k)\,|A(h)|^{\frac{1}{2^*}}$$

si ha, per $h > k > 0$,

$$|A(h)| \leq \left(\frac{c^2}{\lambda_1}\right)^{2^*}\frac{1}{|h-k|^{2^*}}\|f_0\|_p^{2^*}\,|A(k)|^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{N}\right)/\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)}. \tag{3.4}$$

Applicando il lemma (3.1) con $\varphi(h) = |A(h)|$ segue

$$\sup_{\Omega} u \leq K_1(\Omega,\ N,\ p,\ \lambda)\,\|f_0\|_p .$$

Per il minimo la maggiorazione risulta evidente poichè u è soluzione della equazione

$$-\Delta u + \lambda u = f_0$$

con $f_0 \in L^p$, $p > \dfrac{N}{2}$, e u è limitata inferiormente su $\partial\Omega$.

§ 3. - Due lemmi. La maggiorazione fondamentale. Conseguenze.

4. - In questo numero premetteremo due lemmi che ci saranno utili nel seguito.

Indicheremo con $I(y,\ R)$ la sfera di centro y e raggio R. Se $y \in \bar{\Omega}$, con $\Omega(y,\ R)$ indichiamo l'intersezione di Ω con $I(y,\ R)$.

Data una funzione $v \in H^1(\Omega(y,\ R))$ indichiamo con $A(k,\ R)$ il sottoinsieme di $\Omega(y,\ R)$ dove $v \geq k$. Con $B(k,\ R)$ indicheremo il sottoinsieme dove $v \leq k$.

I lemmi sono i seguenti:

LEMMA 4.1. - *Se Ω ha frontiera C^1, esistono costanti positive c_0 e ρ_0 tali che dato k_0 reale, $y \in \partial\Omega$, $\rho < R < \rho_0$ e $v \in H^1(\Omega)$*

a) *Se*

$$|A(k_0,\ \rho)| \leq \frac{1}{2}|\Omega(y,\ \rho)|$$

allora qualunque siano $h > k > k_0$

$$\int_{A(h,\rho)} (v-h)^2 dx \leq c_0 \int_{A(k,\rho)} v_x^2 dx \cdot |A(k, R)|^{\frac{2}{N}} \tag{4.1}$$

$$(h-k)^2 |A(h, \rho)|^{\frac{N-2}{N}} \leq c_0 \int_{A(k,\rho)} v_x^2 dx \tag{4.2}$$

b) *Se*

$$|B(k_0, \rho)| \leq \frac{1}{2} |\Omega(y, \rho)|$$

allora qualunque siano $h < k < k_0$

$$\int_{B(h,\rho)} (v-h)^2 dx \leq c_0 \int_{B(k,\rho)} v_x^2 dx \cdot |B(k, R)|^{\frac{2}{N}} \tag{4.3}$$

$$(k-h)^2 |B(h, \rho)|^{\frac{N-2}{N}} \leq c_0 \int_{B(k,\rho)} v_x^2 dx. \tag{4.4}$$

LEMMA 4.2. - *Se* Ω *ha frontiera* C^1, *esistono costanti positive* ρ_0 *tali che dato* k_0 *reale,* $y \in \partial\Omega$, $\rho < \rho_0$ *e* $v \in H^1(\Omega)$

a) *Se*

$$|A(k_0, \rho)| \leq \frac{1}{2} |\Omega(y, \rho)|$$

allora qualunque siano $h > k > k_0$

$$(h-k)^2 |A(h, \rho)|^{\frac{2N-2}{N}} \leq c_1 \int_{A(k,\rho)} v_x^2 dx \{ |A(k, \rho)| - |A(h, \rho)| \} \tag{4.5}$$

b) *Se invece*

$$|B(k_0, \rho)| \leq \frac{1}{2} |\Omega(y, \rho)|$$

allora qualunque siano $h < k < k_0$

$$(h-k)^2 |B(h, \rho)|^{\frac{2N-2}{N}} \leq c_1 \int_{B(k,\rho)} v_x^2 dx \{ |B(k, \rho)| - |B(h, \rho)| \} \tag{4.6}$$

c) *Se* $v \in \mathbf{K}$ *allora la* (4.6) *è sempre verificata per* $h < k < 0$.

Risultati analoghi si trovano in [9], [10]. Siccome le dimostrazioni sono sostanzialmente le stesse, rimandiamo il lettore al teorema 6.1 di [9] e al corollario 6.1 di [10].

Facciamo soltanto notare che la validità di questi lemmi scaturisce dal fatto che, data la regolarità di $\partial\Omega$, esistono ρ_0 e β positivi tali che se $y \in \partial\Omega$ e $\rho < \rho_0$ allora

$$|v(x)| \leq \beta \int_{\Omega(y,\rho)} \frac{|v_x(t)|}{|x-t|^{N-1}}\, dt \tag{4.7}$$

quasi ovunque in $\Omega(y, \rho)$, per tutte le funzioni $v(x) \in H^1(\Omega(y, \rho))$ nulle su un insieme E di misura $|E| \geq \frac{1}{2}|\Omega(y, \rho)|$, oppure nulle su $(\partial\Omega) \cap I(y, \rho)$.

5. - Dimostriamo ora il seguente:

TEOREMA 5.1. - *Sia u la soluzione di* (0.1), *y un punto di $\bar{\Omega}$ e $\rho < R < 1$. Allora sono verificate le maggiorazioni*:

$$\int_{A(k,\rho)} u_x^2 dx \leq \frac{4}{(R-\rho)^2} \int_{A(k,R)} (u-k)^2 dx + \Lambda \int_{A(k,R)} G^2 dx\, |A(k, R)|^{\frac{2}{N}} \tag{5.1}$$

(*qualunque sia k positivo*)

$$\int_{B(k,\rho)} u_x^2 dx \leq \frac{4}{(R-\rho)^2} \int_{B(k,R)} (u-k)^2 dx + \Lambda \int_{B(k,R)} G^2 dx \cdot |B(k, R)|^{\frac{2}{N}} \tag{5.2}$$

(*qualunque sia k*). *Con G indichiamo la funzione $G = f_0 - \lambda u$, e con Λ una costante dipendente soltanto da N e Ω.*

DIM. - Essendo u la soluzione di (0.1) abbiamo

$$\int_{\Omega} u_{x_i}(v-u)_{x_i} dx \geq \int_{\Omega} G(v-u)dx \qquad \forall\, v \in \boldsymbol{K}. \tag{5.3}$$

Essendo $k > 0$, prendiamo

$$v = u - \alpha^2 \max(u-k,\, 0)$$

dove

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in I(y, \rho) \\ 0 & \text{se} \quad x \notin I(y, R) \\ \dfrac{R-|x-y|}{R-\rho} & \text{se} \quad x \in I(y, R) - I(y, \rho). \end{cases}$$

Siccome $k > 0$ risulta $v \in \boldsymbol{K}$ poichè

$$v = \begin{cases} u - \alpha^2(u-k) & \text{se} \quad u \geq k \\ u & \text{se} \quad u < k \end{cases}$$

e

$$u - \alpha^2(u-k) \geq k.$$

Sostituendo la v nella (5.3) si ottiene:

$$-\int_{A(k)} \alpha^2 u_x^2 dx - 2\int_{A(k)} \alpha_{x_i} u_{x_i} \alpha(u-k)dx \geq \int_{A(k)} G\alpha^2(u-k)dx,$$

ossia

$$\int_{A(k)} \alpha^2 u_x^2 dx \leq 2\left(\int_{A(k)} \alpha^2 u_x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A(k)} \alpha_x^2 (u-k)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{A(k)} \alpha^2 G^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A(k)} \alpha^2 (u-k)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.4}$$

D'altra parte esiste $c = c(N, \Omega)$ tale che la (3.2) è verificata, ossia che risulti

$$\left(\int_{A(k)} \alpha^{2^*}(u-k)^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq c\left\{\left(\int_{A(k)} \alpha^2(u-k)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\left(\int_{A(k)} \alpha_x^2 (u-k)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\left(\int_{A(k)} \alpha^2 u_x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{5.5}$$

Se

$$\int_{A(k)} \alpha^2 u_x^2 dx \leq \max\left(\int_{A(k)} \alpha^2(u-k)^2 dx, \int_{A(k)} \alpha_x^2 (u-k)^2 dx\right) \tag{5.6}$$

la tesi è evidentemente verificata; si osservi che α^2 e α_x^2 sono limitate in $I(y$ da $(R-\rho)^{-2}$, e sono nulle nel suo complementare.

Se la (5.6) non è verificata, dalle (5.4) e (5.5) si ottiene

$$\int_{A(k)} \alpha^2 u_x^2 dx \leq 2\left(\int_{A(k)} \alpha^2 u_x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A(k)} \alpha_x^2 (u-k)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + 3\sqrt{2}c\left(\int_{A(k)} \alpha^2 G^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A(k)} \alpha^2 u_x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} |A(k, R)|^{\frac{1}{N}},$$

poichè

$$\Big(\int_{A(k)} \alpha^2(u-k)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \le \Big(\int_{A(k)} \alpha^{2^*}(u-k)^{2^*} dx\Big)^{\frac{1}{2^*}} |A(k, R)|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}},$$

e la (5.1) risulta verificata con $\Lambda = 6\sqrt{2c}$.

Per dimostrare la (5.2) basta seguire la stessa linea dimostrativa adoperando adesso la funzione

$$v = u - \alpha^2 \min(u-k, 0)$$

che appartiene a $\boldsymbol{K}$ qualunque sia k reale.

6. - In questo numero otterremo le maggiorazioni che saranno sufficienti per dimostrare il Teorema II. A tal fine basta sostituire nelle disuguaglianze dei lemmi (4.1) e (4.2) la maggiorazione ottenuta nel numero precedente per il gradiente della soluzione u.

TEOREMA 6.1. - *Sia Ω di classe C^1; sia $\rho_1 = \min(1, \rho_0)$.*

a) *Dato $k_0 \ge 0$, $y \in \partial\Omega$, $\rho < R < \rho_1$, se*

$$|A(k_0, \rho)| \le \frac{1}{2} |\Omega(y, \rho)|$$

allora qualunque siano $h > k > k_0$ risulta

$$\int_{A(h,\rho)} |u-h|^2 dx \le c_0 \Big\{ \frac{4}{(R-\rho)^2} \int_{A(k,R)} |u-k|^2 dx + \Lambda \int_{A(k,R)} G^2 dx\, |A(k, R)|^{\frac{2}{N}} \Big\} |A(k, R)|^{\frac{2}{N}}, \tag{6.1}$$

$$|A(h, \rho)|^{\frac{N-2}{N}} \le \frac{c_0}{(h-k)^2} \Big\{ \frac{4}{(R-\rho)^2} \int_{A(k,R)} |u-k|^2 dx + \Lambda \int_{A(k,R)} G^2 dx \cdot |A(k, R)|^{\frac{2}{N}} \Big\}. \tag{6.2}$$

b) *Dati k_0 reale, $y \in \partial\Omega$, $\rho < R < \rho_1$, se*

$$|B(k_0, \rho)| \le \frac{1}{2} |\Omega(y, \rho)|$$

allora qualunque siano $h < k < k_0$ si ha

$$\int_{B(h,\rho)} |u-h|^2 dx \le c_0 \Big\{ \frac{4}{(R-\rho)^2} \int_{B(k,R)} |u-k|^2 dx + \Lambda \int_{B(k,R)} G^2 dx\, |B(k, R)|^{\frac{2}{N}} \Big\} |B(k, R)|^{\frac{2}{N}}, \tag{6.3}$$

$$(6.4)\qquad |B(h,\rho)|^{\frac{N-2}{N}} \leq \frac{c_0}{(h-k)^2}\left\{\frac{4}{(R-\rho)^2}\int_{B(k,R)}|u-k|^2dx + \Lambda\int_{B(k,R)}G^2dx\,|B(k,R)|^{\frac{2}{N}}\right\}.$$

TEOREMA 6.2. - *Sia* Ω *di classe* C^1, $y \in \partial\Omega$ *e* $\rho < R < \rho_1$.

a) *Se* $k_0 \geq 0$, $h < k < k_0$ *e*

$$|A(k_0,\rho)| \leq \frac{1}{2}|\Omega(y,\rho)|$$

allora risulta

$$(6.5)\qquad |A(h,\rho)|^{\frac{2N-2}{N}} \leq \frac{c_1}{(h-k)^2}\left\{\frac{4}{(R-\rho)^2}\int_{A(k,R)}|u-k|^2dx + \Lambda\,|A(k,R)|^{\frac{2}{N}}\int_{A(k,R)}G^2dx\right\}\cdot\{|A(k,\rho)|-|A(h,\rho)|\}$$

b) *Se, qualunque sia* k_0, *è* $h < k < k_0$ *e*

$$|B(k_0,\rho)| \leq \frac{1}{2}|\Omega(y,\rho)|$$

allora si ha

$$(6.6)\qquad |B(h,\rho)|^{\frac{2N-2}{N}} \leq \frac{c_1}{(h-k)^2}\left\{\frac{4}{(R-\rho)^2}\int_{B(k,R)}|u-k|^2dx + \Lambda\,|B(k,R)|^{\frac{2}{N}}\int_{B(k,R)}G^2dx\right\}\cdot\{|B(k,\rho)|-|B(h,\rho)|\}$$

c) *Se* $h < k < 0$, *la* (6.6) *è sempre verificata anche se non è soddisfa*
la condizione $|B(k_0,\rho)| \leq \frac{1}{2}|\Omega(y,\rho)|$.

§ 4. - **Hölderianità della soluzione.**

7. - D'ora in poi si supporrà sempre che Ω sia di classe C^1 e che u sia la soluzione di (0.1).

Indicheremo con ζ una costante positiva tale che

$$|\Omega(y,\rho)| \geq \zeta\,|I(y,\rho)|$$

qualunque siano $y \in \partial\Omega$ e $\rho < \rho_0$.

Utilizzando le maggiorazioni del teorema 6.1 possiamo, attraverso un processo iterativo, ottenere delle maggiorazioni che porteranno a una valutazione del massimo locale di $u - k_0$.

Siano y un punto di $\partial\Omega$ e k_0 una costante non negativa, tali che

$$|A(k_0, r)| \leq \frac{\zeta}{2^{N+1}} |\Omega(y, r)|$$

dove $r < \rho_1$.

Siano ρ e R tali che

$$\frac{r}{2} \leq \rho < R \leq r.$$

Allora abbiamo

$$|A(k_0, \rho)| \leq \frac{\zeta}{2^{N+1}} |\Omega(y, r)| \leq \frac{\zeta}{2} |I(y, \rho)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} |\Omega(y, \rho)|$$

e possiamo applicare il teorema 6.1 con $h > k > k_0$.

Poniamo per ogni intero non negativo m

$$\rho_m = \frac{r}{2} + \frac{r}{2^{m+1}}$$

$$k_m = k_0 + \frac{d}{2} - \frac{d}{2^{m+1}}$$

dove d è una costante positiva, per ora arbitraria.

Applicando il teorema 6.1 con

$$R = \rho_m; \qquad \rho \cancel{R} = \rho_{m+1}; \qquad k = k_m; \qquad h = k_{m+1}$$

otteniamo

$$(7.2) \qquad \begin{cases} u_{m+1} \leq \dfrac{4c_0 2^{2(m+2)}}{r^2} u_m a_m^{\frac{2}{N}} + c_0 P a_m^{1+\frac{4}{N}-\frac{2}{p}} \\[2ex] a_{m+1}^{\frac{N-2}{N}} \leq \dfrac{c_0 2^{2(m+2)}}{d^2} \left\{ \dfrac{4 \cdot 2^{2(m+2)}}{r^2} u_m + P a_m^{1-\frac{2}{p}+\frac{2}{N}} \right\}, \end{cases}$$

dove

$$(7.3) \qquad \begin{cases} u_m = \displaystyle\int_{A(k_m, \rho_m)} |u - k_m|^2 dx \\[2ex] a_m = |A(k_m, \rho_m)| \end{cases}$$

e

$$P = \Lambda \| G \|_p^2 .$$

Si osservi che

$$\int_{A(k,\, R)} G^2 dx \leq \underset{\Lambda}{\cancel{P}} \, | A(k,\ R) |^{1 - \frac{2}{p} \cancel{+ \frac{2}{N}}} .$$

Analogamente si ottiene dalla b) del teorema 4.1 che se k_0 (qualsiasi) ed $y \in \partial\Omega$ sono tali che risulti

$$| B(k_0,\ r) | \leq \frac{\zeta}{2^{N+1}} | \Omega(y,\ r) | ,$$

con $r < \rho_1$, allora le (7.2) sono verificate sostituendo nelle (7.3) $A(k_m,\ \rho_m)$ co $B(k_m,\ \rho_m)$, e ponendo $k_m = k_0 - \frac{d}{2} + \frac{d}{2^{m+1}}$.

Vogliamo adesso dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 7.1. - *Esistono costanti* $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(p,\ N,\ c_0)$ *e* $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(p,\ N,\ c_0,\ P)$ *tali che*

(i) *Se* $k_0 \geq 0$ *è tale che*

$$| A(k_0,\ r) | \leq \frac{\zeta}{2^{N+1}} | \Omega(y,\ r) |$$

con $y \in \partial\Omega$ *e* $r < \rho_1$, *allora*

$$| A(k_0 + \frac{d}{2}, \frac{r}{2}) | = 0$$

qualunque sia d *tale che*

$$d^2 \geq \frac{\tilde{\theta}}{r^N} \int_{A(k_0,\, r)} | u - k_0 |^2 dx + \tilde{\lambda} r^{2\left(2 - \frac{N}{p}\right)} . \tag{7.4}$$

(ii) *Se* k_0, *reale, è tale che*

$$| B(k_0,\ r) | \leq \frac{\zeta}{2^{N+1}} | \Omega(y,\ r) |$$

allora si ha

$$\left| B\left(k_0 - \frac{d}{2}, \frac{r}{2}\right) \right| = 0$$

qualunque sia d *tale che*

$$d^2 \geq \frac{\tilde{\theta}}{r^N} \int_{B(k_0,\, r)} | u - k_0 |^2 dx + \tilde{\lambda} r^{2\left(2 - \frac{N}{p}\right)} .$$

Prima di dimostrare il teorema, dimostreremo un lemma algebrico di cui avremo bisogno.

Siano A e B costanti positive, r un parametro, $0 < r < 1$, α e β costanti maggiori di uno, e siano

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha - 1}; \qquad \nu = \frac{\beta}{\beta - 1}.$$

Con θ e λ indicheremo delle costanti positive tali che sia

$$\theta^{\alpha-1} \leq \frac{1}{A\ 2^{4\alpha+2\nu+1}} \tag{7.5}$$

$$\lambda^{\alpha-1} \leq \frac{1}{A\ 2^{4\alpha+2\mu+1}}. \tag{7.6}$$

Evidentemente $\theta = \theta(\alpha, \beta, A)$ e $\lambda = \lambda(\alpha, A)$.

Sia

$$N = \frac{2}{\alpha - 1}.$$

È valido il seguente lemma:

LEMMA 7.1. - *Sia* $\{\chi_m\}$, $m \geq 0$, *una successione di numeri non negativi, tali che si abbia per* $m \geq 1$

$$\chi_m \leq A \frac{d^2}{r^2}\left[2^{2(m+1)} \frac{\chi_{m-1}}{d^2}\right]^\alpha + B\left[2^{2(m+1)} \frac{\chi_{m-1}}{d^2}\right]^\beta. \tag{7.7}$$

a) *Se* $\beta \leq \alpha$ *e se*

$$d^2 \geq \theta^{-1} \frac{\chi_0}{r^N} + \theta^{\beta-1} B\ 2^{4\beta+2\nu+1} r^{N(\beta-1)}, \tag{7.8}$$

allora si ha

$$\chi_m \leq \theta \frac{d^2 r^N}{2^{2m\nu}} \qquad \forall\, m \geq 0;\ \forall\, r. \tag{7.9}$$

b) *Se* $\beta > \alpha$ *e se*

$$d^2 \geq \lambda^{-1} \frac{\chi_0}{r^N} + \lambda^{\beta-1} B\ 2^{4\beta+2\mu+1} r^{N(\beta-1)} \tag{7.10}$$

allora si ha

$$\chi_m \leq \lambda \frac{d^2 r^N}{2^{2m\mu}} \qquad \forall\, m \geq 0;\ \forall\, r. \tag{7.11}$$

DIM. - a) Per $m = 0$ la tesi è ovvia. Ammettiamo la (7.9) per m. Allora

$$\chi_{m+1} \leq A \frac{d^2}{r^2}\left[2^{2(m+2)} \frac{\chi_m}{d^2}\right]^\alpha + B\left[2^{2(m+2)} \frac{\chi_m}{d^2}\right]^\beta \leq$$

$$\leq A \frac{d^2}{r^2} 2^{2(m+2)\alpha - 2m\alpha\nu}\, \theta^\alpha\, r^{N\alpha} + B 2^{2m\beta+4\beta-2m\beta\nu}\, \theta^\beta\, r^{N\beta}.$$

Perchè sia verificata la (7.9) per $m+1$, basta che

$$\begin{cases} A \dfrac{d^2}{r^2} 2^{2(m+2)\alpha-2m\alpha\nu}\, \theta^\alpha\, r^{N\alpha} \leq \dfrac{1}{2}\, \theta \dfrac{d^2 r^N}{2^{2(m+1)\nu}} \\[2ex] B\ 2^{2m\beta+4\beta-2m\beta\nu}\, \theta^\beta\, r^{N\beta} \leq \dfrac{1}{2}\, \theta \dfrac{d^2 r^N}{2^{2(m+1)\nu}} \end{cases}$$

La prima di queste relazioni è equivalente a

$$A 2^{2m(\alpha-\alpha\nu+\nu)}\, 2^{4\alpha+2\nu+1}\, \theta^{\alpha-1}\, r^{N(\alpha-1)-2} \leq 1$$

che è verificata come conseguenza della (7.5), delle relazioni

$$\alpha - \alpha\nu + \nu \leq \alpha - \alpha\mu + \mu = 0$$

e

$$N(\alpha - 1) - 2 = 0.$$

La seconda relazione è equivalente a

$$B 2^{2m(\beta-\beta\nu+\nu)}\, 2^{4\beta+2\nu+1}\, \theta^{\beta-1}\, r^{N(\beta-1)} \leq d^2$$

che è verificata poichè

$$\beta - \beta\nu + \nu = 0.$$

b) Per $m = 0$ la (7.11) è ovvia. Ammettiamola per m e dimostriam per $m+1$. Dalla (7.7), e dalla (7.11) supposta valida per m, si ricava:

$$\chi_{m+1} \leq A \frac{d^2}{r^2} 2^{2(m+2)\alpha-2m\mu\alpha}\, \lambda^\alpha\, r^{N\alpha} +$$

$$+ B 2^{2(m+2)\beta-2m\mu\beta}\, \lambda^\beta\, r^{N\beta}.$$

Perchè sia vera la (7.11) per $m+1$ basta che

$$\begin{cases} A \dfrac{d^2}{r^2} 2^{2(m+2)\alpha-2m\mu\alpha} \lambda^\alpha r^{N\alpha} \leq \dfrac{1}{2}\, \lambda \dfrac{d^2 r^N}{2^{2(m+1)\mu}} \\[2ex] B 2^{2(m+2)\beta-2m\mu\beta} \lambda^\beta r^{N\beta} \leq \dfrac{1}{2}\, \lambda \dfrac{d^2 r^N}{2^{2(m+1)\mu}} \end{cases}$$

La prima relazione è equivalente a

$$A 2^{2m(\alpha-\mu\alpha+\mu)}\, 2^{4\alpha+2\mu+1}\, \lambda^{\alpha-1}\, r^{N(\alpha-1)-2} \leq 1,$$

che si verifica facilmente.

La seconda relazione è equivalente a

$$B\ 2^{2m(\beta-\mu\beta+\mu)}\, 2^{4\beta+2\mu+1}\, \lambda^{\beta-1}\, r^{N(\beta-1)} \leq d^2,$$

relazione che è vera poichè

$$\beta - \mu\beta + \mu < 0.$$

Dimostrazione del teorema 7.1:

Consideriamo le relazioni (7.2). Moltiplicando la seconda per $a_m^{2/N}$, e tenendo conto che $a_{m+1} \leq a_m$, si ottiene, per ogni intero $m \geq 0$

$$\begin{cases} u_{m+1} \leq \chi_m \\ a_{m+1} \leq \dfrac{2^{2(m+2)}}{d^2}\chi_m \end{cases}$$

dove

$$\chi_m = \frac{4c_0 2^{2(m+2)}}{r^2} u_m a_m^{\frac{2}{N}} + c_0 P a_m^{1-\frac{2}{p}+\frac{4}{N}}.$$

Discende allora che, per $m \geq 1$,

$$\chi_m \leq \frac{4c_0 2^{2(m+2)}}{r^2}\chi_{m-1}\left[\frac{2^{2(m+1)}}{d^2}\chi_{m-1}\right]^{\frac{2}{N}} +$$

$$+ c_0 P\left[\frac{2^{2(m+1)}}{d_2}\chi_{m-1}\right]^{1-\frac{2}{p}+\frac{4}{N}},$$

ossia

$$\chi_m \leq \frac{16c_0 d^2}{d^2}\left[2^{2(m+1)}\frac{\chi_{m-1}}{d^2}\right]^{1+\frac{2}{N}} + c_0 P\left[2^{2(m+1)}\frac{\chi_{m-1}}{d^2}\right]^{1-\frac{2}{p}+\frac{4}{N}}.$$

Possiamo perciò applicare il lemma 7.1 con

$$A = 16c_0; \qquad B = c_0 P; \qquad \alpha = 1 + \frac{2}{N}; \qquad \beta = 1 - \frac{2}{p} + \frac{4}{N}.$$

Otteniamo così che esistono due costanti

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}(p,\ N,\ c_0)$$

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(p,\ N,\ c_0,\ P)$$

tali che se

$$d^2 \geq \bar{\theta}\frac{\chi_0}{r^N} + \bar{\lambda} r^{2\left(2-\frac{N}{p}\right)}, \tag{7.12}$$

allora $\chi_m \to 0$ quando $m \to +\infty$.
Ma siccome

$$\int\limits_{A\left(k_0+\frac{d}{2},\frac{r}{2}\right)} \left| u - \left(k_0 + \frac{d}{2}\right)\right|^2 dx \leq u_m \leq \chi_m,$$

l'integrale a primo membro è nullo; ossia risulta

$$\left| A\left(k_0 + \frac{d}{2}, \frac{r}{2}\right)\right| = 0. \tag{7.13}$$

Ma, indicando con $k(N)$ una costante dipendente da N, risulta

$$\frac{\chi_0}{r^N} \leq \frac{c_0 k(N)}{r^N} u_0 + c_0 k(N) P r^{2\left(2-\frac{N}{p}\right)}$$

poichè

$$a_0 = |A(k_0, r)| \leq |I(y, 1)| r^N.$$

Perchè sia verificata la (7.12) basta che

$$d^2 \geq \frac{\bar{\theta} c_0 k(N)}{r^N} u_0 + (\bar{\theta} c_0 k(N) P + \bar{\lambda}) r^{2\left(2-\frac{N}{p}\right)},$$

e ne segue che esistono due costanti

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(p, N, c_0)$$
$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(p, N, c_0, P)$$

tali che se la (7.4) è verificata, lo è anche la (7.13).

Con analogo ragionamento si dimostra la (ii).

Questo teorema, associato alle maggiorazioni ottenute con il teorema (6.
permette di dimostrare il seguente risultato:

TEOREMA 7.2. - *Esistono due costanti* $\bar{\eta}$ *e* S $(\bar{\eta} < 1)$, *che dipendono soltan
da* Ω, N, p, P, *tali che*

$$\operatorname{osc}(u; r) \leq \bar{\eta} \operatorname{osc}(u; 4r) + S r^{2-\frac{N}{p}} \tag{7.14}$$

qualunque siano $y \in \partial\Omega$ *e* $r < \frac{1}{4}\rho_1$, *dove* $\operatorname{osc}(u; \rho)$ *indica l'oscillazione di
in* $\Omega(y, \rho)$.

Premettiamo il seguente lemma algebrico:

LEMMA 7.2. - *Se* $\{b_j\}$, $0 \leq j \leq n$, *è una successione finita di numeri positivi, decrescente, tali che*

$$b_{j+1}^{\alpha} \leq K(b_j - b_{j+1}) \qquad \forall\, 0 \leq j < n$$

allora si ha:

$$b_n^{\alpha} \leq K \frac{b_0}{n}$$

dove α *è una costante positiva.*

DIM. - Poichè:

$$b_n^{\alpha} \leq b_{j+1}^{\alpha} \leq K(b_j - b_{j+1}) \qquad \forall\, 0 \leq j < n,$$

sommando rispetto ad j, da 0 ad $n-1$, segue

$$nb_n^{\alpha} \leq K(b_0 - b_n) \leq K b_0 .$$

Dimostrazione del teorema 7.2:

Siano

$$l_1 = \sup_{\Omega(y,\,4r)} u(x)$$

$$l_2 = \inf_{\Omega(y,\,4r)} u(x)$$

$$\omega = \operatorname{osc}(u;\, 4r) = l_1 - l_2$$

$$\bar{l} = \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

Si possono verificare tre casi, che si trattano in modo analogo:

1°) $\bar{l} \geq 0$ e $|A(\bar{l},\, 2r)| \geq \frac{1}{2} |\Omega(y,\, 2r)|$

2°) $\bar{l} \geq 0$ e $|B(\bar{l},\, 2r)| \geq \frac{1}{2} |\Omega(y,\, 2r)|$

3°) $\bar{l} < 0$.

Supponiamo per esempio che sia verificato il primo caso, visto che gli altri due si trattano in modo analogo. Allora possiamo applicare la (6.6) del teorema 6.2:

$$(7.15) \qquad |B(h,\, 2r)|^{\frac{2N-2}{N}} \leq \frac{c_1}{(k-h)^2}\left\{\frac{1}{r^2}\int\limits_{B(k,\,4r)} |u-k|^2 dx + \right.$$

$$\left. + P[V_N(4r)^N]^{1-\frac{2}{p}+\frac{4}{N}}\right\}(|B(k,\, 2r)| - |B(h,\, 2r)|)$$

qualunque siano $h < k < \bar{l}$, dove con V_N indichiamo il volume della sfera unitaria in R^N.

Poniamo

$$\eta_j = \frac{1}{2^{j+1}}$$

$$k_j = l_2 + \eta_j \omega$$

dove j è un qualunque intero non negativo.

Nel seguito indicheremo con K_0, K_1 delle costanti dipendenti soltanto da c_1, N, P.

Applicando la (7.15) con

$$k = k_j, \qquad h = k_{j+1}, \qquad b_j = |B(k_j,\, 2r)|$$

risulta

$$b_{j+1}^{\frac{2N-2}{N}} \leq \left\{K_0 + K_1 P\left(2^{j+2}\frac{r^{2-\frac{N}{p}}}{\omega}\right)^2\right\} V_N^{\frac{N-2}{N}}(2r)^{N-2}(b_j - b_{j+1}).$$

Sia $n_0 = n_0(\zeta, N, P, c_1)$ un intero positivo tale che

$$\frac{K_0 + K_1 P}{n_0} \leq \min\,[2^{-(N+1)}\zeta^2;\; (\bar{\theta}\, V_N)^{-1}]^{\frac{2N-2}{N}} = \psi^{\frac{2N-2}{N}}.$$

Adesso, se

$$\omega < 2^{n_0+2} r^{2-\frac{\Lambda}{p}}$$

abbiamo

$$(7.16) \qquad \operatorname{osc}(u;\, r) \leq \omega < 2^{n_0+2} r^{2-\frac{N}{p}}.$$

In caso contrario abbiamo

$$\omega \geq 2^{j+1} r^{2-\frac{N}{p}} \qquad \forall\, j \leq n_0$$

e perciò

$$b_{j+1}^{\frac{2N-2}{N}} \leq (K_0 + K_1 P)\, V_N^{\frac{N-2}{N}}(2r)^{N-2}(b_j - b_{j+1}) \qquad \forall\, j \leq n_0.$$

Applicando il lemma 7.2 segue

$$b_{n_0}^{\frac{2N-2}{N}} \leq \frac{(K_0 + K_1 P)\, V_N^{\frac{N-2}{N}} (2r)^{N-2}}{n_0}\, b_0 \leq$$

$$\leq \psi^{\frac{2N-2}{N}}\, V_N^{\frac{2N-2}{N}} (2r)^{2N-2}$$

ossia

$$b_{n_0} \leq \psi \,|\, I(y;\, 2r) \,|.$$

Tenendo conto della definizione di ψ si conclude che

$$(7.17)\qquad |\, B(l_2 + \eta_{n_0}\omega,\ 2r \,| \leq \frac{\zeta}{2^{N+1}} \,|\, \Omega(y,\ 2r) \,|$$

$$(7.18)\qquad |\, B(l_2 + \eta_{n_0}\omega,\ 2r) \,| \leq \frac{1}{\tilde{\theta}\, V_N} \,|\, \Omega(y,\ 2r) \,|.$$

Per il teorema 7.1, si conclude che

$$\left| B\left(l_2 + \eta_{n_0}\omega - \frac{d}{2},\ r\right) \right| = 0$$

se d soddisfa

$$d^2 \geq \frac{\tilde{\theta}}{(2r)^N} \int\limits_{B(l_2+\eta_{n_0}\omega,\ 2r)} (u - l_2 - \eta_{n_0}\omega)^2 dx + \tilde{\lambda}(2r)^{2\left(2-\frac{N}{p}\right)}.$$

Possiamo prendere

$$d = \eta_{n_0}\omega + \tilde{\lambda}^{\frac{1}{2}} (2r)^{2-\frac{N}{p}}$$

poichè usando la (7.18) si vede che

$$\frac{\tilde{\theta}}{(2r)^N} \int\limits_{B(l_2+\eta_{n_0}\omega;\ 2r)} (u - l_2 - \eta_{n_0}\omega)^2 dx \leq \frac{\tilde{\theta}}{(2r)^N} (\eta_{n_0}\omega)^2 \frac{1}{\tilde{\theta}\, V_N} \,|\, \Omega(y,\ 2r) \,| \leq (\eta_{n_0}\omega)^2.$$

Allora abbiamo, per $x \in \Omega(y,\ r)$,

$$u(x) \geq l_2 + \eta_{n_0}\omega - \frac{d}{2} = l_2 + \eta_{n_0}\omega - \frac{1}{2}\eta_{n_0}\omega - \tilde{\lambda}^{\frac{1}{2}} r^{2-\frac{N}{p}} 2^{2-\frac{N}{p}} =$$

$$= l_2 + \frac{1}{2}\eta_{n_0}\omega - \tilde{\lambda} 2^{2-\frac{N}{p}} r^{2-\frac{N}{p}}$$

e perciò

$$\operatorname{osc}(u;\, r) \leq l_1 - \left(l_2 + \frac{1}{2}\eta_{n_0}\omega - \tilde{\lambda} 2^{2-\frac{N}{p}} r^{2-\frac{N}{p}}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\eta_{n_0}\right)\omega + \tilde{\lambda} 2^{2-\frac{N}{p}} r^{2-\frac{N}{p}}$$

sempre che non sia verificata la (7.16).

Il teorema è così dimostrato nel 1° caso. Per gli altri due casi si fa ragionamenti analoghi. Facciamo notare che nel caso in cui $\bar{l} < 0$ la (7.15 verificata senza bisogno che sia verificata la condizione

$$|A(\bar{l},\, 2r)| \geq \frac{1}{2} |\Omega(y,\, 2r)|$$

come segue dal teorema 6.2, *c*).

Del teorema 7.2 discende, con un noto ragionamento, il

LEMMA 7.3. - *Esistono due costanti positive* $\mathcal{H}$ *ed* α *tali che*

$$\omega(\rho) \leq \mathcal{H}\rho^{\alpha} \tag{7.19}$$

qualunque siano $y \in \partial\Omega$ *e* $\rho < \rho_1$ *dove con* $\omega(\rho)$ *indichiamo* $\operatorname{osc}(u;\, \rho)$.

DIM. - Sia a tale che $\bar{\eta} < a < 1$ e $\bar{\alpha}$ tale che $4^{\bar{\alpha}}\bar{\eta} = a$. Poniamo

$$\alpha = \min\left(\bar{\alpha},\, 2 - \frac{N}{p}\right).$$

Dato $y \in \partial\Omega$, sia M tale che

$$\omega(\rho) \leq M\rho^{\alpha}, \quad \text{per} \quad \frac{\rho_1}{4} \leq \rho < \rho_1. \tag{7.20}$$

Per esempio possiamo scegliere

$$M = \left(\frac{4}{\rho_1}\right)^{\alpha} K \tag{7.21}$$

essendo K l'oscillazione di u in $\bar{\Omega}$.

Dal teorema 7.2 deduciamo che se

$$\frac{\rho_1}{4^2} \leq \rho < \frac{\rho_1}{4}$$

allora, si ha:

$$\omega(\rho) \leq \bar{\eta}\omega(4\rho) + S\rho^{2-\frac{N}{p}} \leq \bar{\eta} M 4^{\alpha}\rho^{\alpha} + S\rho^{\alpha}.$$

Ora se

$$\frac{\rho_1}{4^3} \leq \rho < \frac{\rho_1}{4^2}$$

sempre dal teorema 7.2 segue che

$$\omega(\rho) \leq \bar{\eta}\omega(4\rho) + S\rho^{2-\frac{N}{p}} \leq \bar{\eta}\,\{\bar{\eta}M4^{2\alpha}\rho^{\alpha} + S4^{\alpha}\rho^{\alpha}\} + S\rho^{\alpha} \leq$$

$$\leq \{M(4^{\alpha}\bar{\eta})^2 + S[1 + 4^{\alpha}\bar{\eta}]\}\,\rho^{\alpha};$$

e, in generale, se

$$\frac{\rho_1}{4^{i+1}} \leq \rho < \frac{\rho_1}{4^i}$$

abbiamo

$$\omega(\rho) \leq \{M(4^{\alpha}\bar{\eta})^i + S\sum_{s=0}^{i-1}(4^{\alpha}\bar{\eta})^s\}\,\rho^{\alpha} \leq \tag{7.22}$$

$$\leq \left\{M + \frac{S}{1-a}\right\}\rho^{\alpha}$$

il che dimostra la tesi.

Sia Ω un qualunque aperto limitato. Con K_δ, $\delta > 0$, indichiamo l'insieme

$$K_\delta = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \delta\}$$

TEOREMA 7.3. - *Sia $u(x)$ una funzione continua su Ω, ed esistano costanti ρ_0, α, β, θ, a e $\mathcal{H}$ tali che*

(i) *qualunque siano x, $y \in K_\delta$*

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{a}{\delta^\theta}|x - y|^\beta$$

(ii) $\omega(z;\ \rho) \leq \mathcal{H}\rho^\alpha \qquad \forall\, \rho < \rho_0, \qquad \forall\, z \in \partial\Omega$ (1).

Allora $u(x)$ è hölderiana in $\bar{\Omega}$, con esponente di Hölder

$$\lambda = \alpha \min\left(1, \frac{\beta}{\alpha + \theta}\right).$$

---

(1) Osservazione: Indicheremo con $\omega(z;\ \rho)$ l'oscillazione di u in $\Omega(z, \rho)$. Se non esiste possibilità di confusione, indicheremo $\omega(z;\ \rho)$ semplicemente con $\omega(\rho)$.

DIM. - Dall'ipotesi di continuità su Ω e dall'ipotesi (ii) discende $u(x)$ è continua in $\bar{\Omega}$, quindi limitata, e perciò ci possiamo limitare a co derare punti x, y tali che

$$|x-y| < \min\left[\frac{\rho_0}{2};\ \left(\frac{\rho_0}{2}\right)^{\gamma}\right]$$

dove

$$\gamma = \frac{\theta+\alpha}{\beta}.$$

Siano x e y due punti di $\bar{\Omega}$. Sia inoltre

$$\delta_0 = \min\left[\operatorname{dist}(x,\ \partial\Omega);\ \operatorname{dist}(y,\ \partial\Omega)\right].$$

Allora

$$|x-y| \leq \delta_0^{\gamma}$$

oppure

$$|x-y| > \delta_0^{\gamma}.$$

Nella prima ipotesi

$$|x-y|^{\theta/\gamma} \leq \delta_0^{\theta}$$

e quindi

$$\frac{1}{\delta_0^{\theta}}|x-y|^{\theta/\gamma} \leq 1.$$

Siccome $x,\ y \in K_{\delta_0}$, abbiamo:

$$|u(x)-u(y)| \leq \frac{a}{\delta_0^{\theta}}|x-y|^{\beta} = \frac{a}{\delta_0^{\theta}}|x-y|^{\theta/\delta}|x-y|^{\beta-\frac{\theta}{\gamma}} \leq \tag{7.23}$$
$$\leq a|x-y|^{\beta-\frac{\theta}{\gamma}}.$$

Nella seconda ipotesi sia, ad esempio, $x_1 \in \partial\Omega$ tale che

$$\operatorname{dist}(x_1,\ x) = \delta_0.$$

Allora si ha

$$\delta_0^{\alpha} < |x-y|^{\alpha/\gamma}$$

ed anche

$$|y-x_1|^{\alpha} \leq [\delta_0 + |y-x|]^{\alpha} \leq [|x-y|^{1/\gamma} + |y-x|]^{\alpha}.$$

Ma la disuguaglianza

$$|u(x)-u(y)| \leq |u(x)-u(x_1)| + |u(x_1)-u(y)| \leq$$
$$\leq \mathcal{H}\delta_0^{\alpha} + \mathcal{H}|y-x_1|^{\alpha} \leq \mathcal{H}|x-y|^{\alpha/\gamma} +$$
$$+ \mathcal{H}[|x-y|^{1/\gamma} + |x-y|]^{\alpha},$$

associata alla (7.23) implica la hölderianità di $u(x)$ in $\bar{\Omega}$ con esponente

$$\lambda = \min\left(\alpha, \frac{\alpha}{\gamma}, \beta - \frac{\theta}{\gamma}\right).$$

Siccome $\gamma = \dfrac{\theta + \alpha}{\beta}$ si ottiene il valore di λ desiderato.

Dimostriamo finalmente il teorema II:

Essendo u la soluzione di (0.1) è

$$-\Delta u = G$$

dove la funzione

$$G = f_0 - \lambda u$$

appartiene a $L^p(\Omega)$ con $p > \dfrac{N}{2}$.

Sia v la soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta v = G \quad \text{in} \quad \Omega \\ v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}.$$

Detta soluzione v è hölderiana in $\bar{\Omega}$ (cfr. [10]).

Possiamo scrivere allora

$$u = w + v$$

dove

$$\Delta w = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

La w soddisfa la condizione (i) del teorema 7.3, poichè $\Delta w = 0$, e soddisfa anche la condizione (ii) poichè w è la differenza fra due funzioni che soddisfano la condizione (ii). Allora u è hölderiana su $\bar{\Omega}$ in quanto somma di funzioni ivi hölderiane.

Si può infine osservare che l'esponente di hölderianità delle soluzioni dipende soltanto da Ω, N e p.

§ 5. - I problemi P_2 e P_3.

8. - In questo numero dimostreremo la parte del teorema I relativa ai problemi P_2 e P_3.

Con u indicheremo sia la soluzione del problema P_2 sia quella del problema P_3; la nomenclatura che adopereremo è quella dei primi paragrafi.

Siccome la tecnica delle dimostrazioni dei teoremi I e II per le soluzioni dei problemi P_2 e P_3 è analoga a quella usata per la soluzione del problema P_1, rimanderemo spesso alle dimostrazioni relative a quest'ultimo caso.

Cominciamo a considerare la limitatezza della soluzione del problema P_2:

Supponiamo che f_0 verifichi la condizione (0.7).

Essendo u la soluzione di (0.2) con $f_0 \in L^p(\Omega)$, $p > \frac{N}{2}$, sia $v = \{u\}^k$, con $k > 0$. Poichè $v \in \boldsymbol{K}$ da (0.2) si ha

$$-\int_{A(k)} u_x^2 dx \geq \int_{A(k)} f_0(k-u)dx. \tag{8.1}$$

Ne segue che

$$\int_{A(k)} u_x^2 dx \leq \left(\int_{A(k)} f_0^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A(k)} (u-k)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

e maggiorando tramite la disuguaglianza di HÖLDER ambedue i fattori al secondo membro, otteniamo

$$\int_{A(k)} u_x^2 dx \leq \| f_0 \|_p \left(\int_{A(k)} | u-k |^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} | A(k) |^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{N}}. \tag{8.2}$$

Sia M_0 una costante tale che

$$\int_\Omega u^2 dx < M_0.$$

Allora $| B(k_0) | > 0$, dove $k_0^2 = M_0 | \Omega |^{-1}$.

Esisterà [8] perciò una costante $\tilde{c}$ tale che

$$\int_\Omega w_x^2 dx + \int_\Omega w^2 dx \leq \tilde{c} \left\{ \int_\Omega w_x^2 dx + \int_{B(k_0)} w^2 dx \right\} \tag{8.3}$$

per tutte le $w \in H^1(\Omega)$.

Inoltre, siccome l'immersione di $H^1(\Omega)$ in $L^{2^*}(\Omega)$ è continua, esiste una costante $c = c(N, \Omega)$ tale che per tutte le funzioni $w \in H^1(\Omega)$ si ha

$$\left(\int_\Omega | w |^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c^2 \left\{ \int_\Omega w_x^2 dx + \int_{B(k_0)} w^2 dx \right\}. \tag{8.4}$$

Dalle (8.3) e (8.4) si deduce la relazione

$$\left(\int_\Omega | w |^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c^2 \tilde{c} \left\{ \int_\Omega w_x^2 dx + \int_{B(k_0)} w^2 dx \right\}. \tag{8.5}$$

Applicando la (8.5) alla funzione

$$w = v - u = \{ u \}^k - u,$$

dove $k > k_0$, otteniamo

$$\left(\int_{A(k)} | u - k |^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c^2 \tilde{c} \int_{A(k)} u_x^2 dx. \tag{8.6}$$

Dalla (8.2) associata alla (8.6) discende che

$$\left(\int_{A(k)} | u - k |^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \leq c^2 \tilde{c} \, \| f_0 \|_p \, | A(k) |^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{N}} \tag{8.7}$$

per $k > k_0$.
Ma siccome

$$\left(\int_{A(k)} | u - k |^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \geq (h - k) \, | A(h) |^{\frac{1}{2^*}} \tag{8.8}$$

si ha

$$| A(h) | \leq (c^2 \tilde{c})^{2^*} \frac{1}{| h - k |^{2^*}} \| f_0 \|_p^{2^*} \, | A(k) |^{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{N}\right) / \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N}\right)} \tag{8.9}$$

per $h > k > k_0$. Applicando il lemma (3.1) per $h > k_0$ e $\varphi(h) = | A(h) |$ si ottiene la tesi.

Passiamo ora alla limitatezza della soluzione del problema P_3: Essendo u la soluzione di (0.3), sia $v = \{ u \}^k$ con $k > 0$. Poichè $v \in \boldsymbol{K}_0$ si verifica facilmente la (8.2).

D'altra parte, vista la regolarità di $\partial\Omega$ e Γ, esiste ([8] p. 20) una costante $c_0 = c_0(N, \Omega, \Gamma)$ tale che (disuguaglianza di FRIEDRICHS)

$$\int_\Omega w_x^2 dx + \int_\Omega w^2 dx \leq c_0 \left\{ \int_\Omega w_x^2 dx + \int_\Gamma w^2 d\sigma \right\} \tag{8.10}$$

per tutte le funzioni $w \in H^1(\Omega)$. Questa disuguaglianza associata alla (8.4) implica

$$\left(\int_\Omega | w |^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c^2 c_0 \left\{ \int_\Omega w_x^2 dx + \int_\Gamma w^2 d\sigma \right\} \tag{8.11}$$

per tutte le funzioni $w \in H^1(\Omega)$.

Applicando la (8.11) alla funzione

$$w = v - u = |u|^k - u$$

dove $k > 0$, si ha

$$\left(\int_{A(k)} |u - k|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c^2 c_0 \int_{A(k)} u_x^2 dx.$$

Questa disuguaglianza associata alla (8.2) conduce alla maggiorazione

$$\left(\int_{A(k)} |u - k|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq c^2 c_0 \|f_0\|_p |A(k)|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{N}},$$

valida per tutti i k positivi. A questo punto la dimostrazione si conclude come per i problemi P_1 e P_2.

9. - In questo numero dimostreremo l'hölderianità delle soluzioni dei problemi P_2 e P_3.

L'hölderianità della soluzione del problema P_2 si dimostra come quella della soluzione del problema P_1 assumendo $\lambda = 0$, cioè sostituendo alla funzione f_0 la funzione $G = f_0 - \lambda u$.

Passiamo alla dimostrazione della hölderianità della soluzione del problema P_3; indichiamo con u la soluzione di questo problema.

Cominciamo osservando che (vista la regolarità di $\partial\Omega$ e Γ) esistono costanti positive, che possiamo ancora indicare con β e ρ_0, tali che qualunque siano $y \in \Gamma$ e $0 < \rho < \rho_0$ la (4.7) risulta verificata per tutte le funzioni $v \in H^1(\Omega(y, \rho))$ che siano nulle su $\Gamma \cap I(y, \rho)$.

Il primo scopo sarà di dimostrare la (7.19) per i punti $y \in \Gamma$; a questo proposito si ha:

LEMMA 9.1. - *Esistono due costanti positive $\mathcal{H}$ e α tali che*

$$\omega(y;\, \rho) \leq \mathcal{H}\rho^\alpha \tag{9.1}$$

qualunque siano $y \in \Gamma$ e $\rho < \rho_1$, dove $\rho_1 = \min(1, \rho_0)$.

La dimostrazione di questo lemma è analoga a quella del lemma 7.3.

Il lemma 4.1 sarà qui utilizzato senza modifiche. Invece il lemma 4.2 sarà sostituito dal

LEMMA 9.2. - *Se Ω ha frontiera C^1 e Γ è ammissibile, esistono costanti positive ρ_0 e c_1 tali che qualunque siano $y \in \Gamma$, $v \in \boldsymbol{K}_0$, $\rho < \rho_0$ si ha*

$$(h - k)^2 |A(h, \rho)|^{\frac{2N-2}{N}} \leq c_1 \int_{A(k,\rho)} v_x^2 dx \cdot \{|A(k, \rho)| - |A(h, \rho)|\} \tag{9.2}$$

(*se* $h > k > 0$);

$$(9.3)\qquad (h-k)^2\,|B(h,\rho)|^{\frac{2N-2}{N}} \le c_1 \int\limits_{B(k,\rho)} v_x^2 dx \cdot \big|\, |B(k,\rho)| - |B(h,\rho)|\, \big|$$

(*se* $h < k < 0$).

La validità del lemma (ossia l'esistenza di ρ_0 e c_1) segue dalla osservazione fatta all'inizio di questo numero. (Peraltro la (9.3) è una conseguenza della c) del lemma 4.2, poichè $\boldsymbol{K}_0 \subset \boldsymbol{K}$).

Il teorema seguente è analogo al teorema 5.1.

TEOREMA 9.1. - *Sia* Ω *di classe* C^1 *e* Γ *ammissibile. Sia* $y \in \overline{\Omega}$ *e* $\rho < R < 1$. *Allora sono verificate le maggiorazioni*:

$$(9.4)\qquad \int\limits_{A(k,\rho)} u_x^2 dx \le \frac{4}{(R-\rho)^2} \int\limits_{A(k,R)} (u-k)^2 dx + \Lambda \int\limits_{A(k,R)} f_0^2 dx \cdot |A(k,R)|^{\frac{2}{N}}$$

(*qualunque sia* k *positivo*)

$$(9.5)\qquad \int\limits_{B(k,\rho)} u_x^2 dx \le \frac{4}{(R-\rho)^2} \int\limits_{B(k,R)} (u-k)^2 dx + \Lambda \int\limits_{B(k,R)} f_0^2 dx \cdot |B(k,R)|^{\frac{2}{N}}$$

(*qualunque sia* k *negativo*).

Con Λ *indichiamo una costante dipendente soltanto da* N *e* Ω.

Si osservi che le funzioni

$$v = u - \alpha^2 \max(u-k, 0) \qquad (k > 0)$$

e

$$\bar{v} = u - \alpha^2 \min(u-k, 0) \qquad (k < 0)$$

appartengono a $\boldsymbol{K}_0$.

Il teorema seguente è analogo al teorema 6.1, ed è una conseguenza immediata del lemma 4.1 e del teorema 9.1.

TEOREMA 9.2. - *Sia* Ω *di classe* C^1, *sia* Γ *ammissibile e sia* $\rho_1 = \min(1, \rho_0)$.

a) *Dato* $k_0 \ge 0$, $y \in \partial\Omega$, $\rho < R < \rho_1$, *se*

$$|A(k_0, \rho)| \le \frac{1}{2} |\Omega(y, \rho)|$$

allora qualunque siano $h > k > k_0$ *risulta*

$$\int_{A(h,\rho)} |u-h|^2 dx \leq c_0 \left\{ \frac{4}{(R-\rho)^2} \int_{A(k,R)} |u-k|^2 dx + \right. \tag{9.6}$$

$$\left. + \Lambda \int_{A(k,R)} f_0^2 dx \cdot |A(k, R)|^{\frac{2}{N}} \right\} \cdot |A(k, R)|^{\frac{2}{N}},$$

$$|A(h, \rho)|^{\frac{N-2}{N}} \leq \frac{c_0}{(h-k)^2} \left\{ \frac{4}{(R-\rho)^2} \int_{A(k,R)} |u-k|^2 dx + \Lambda \int_{A(k,R)} f_0^2 dx \cdot \right. \tag{9.7}$$

$$\left. \cdot |A(k, R)|^{\frac{2}{N}} \right\}.$$

b) *Dato* $k_0 \leq 0$, $y \in \partial\Omega$, $\rho < R < \rho_1$, *se*

$$|B(k_0, \rho)| \leq \frac{1}{2} |\Omega(y, \rho)|$$

allora qualunque siano $h < k < k_0$ *abbiamo*

$$\int_{B(h,\rho)} |u-h|^2 dx \leq c_0 \left\{ \frac{4}{(R-\rho)^2} \int_{B(k,R)} |u-k|^2 dx + \right. \tag{9.8}$$

$$\left. + \Lambda \int_{B(k,R)} f_0^2 dx \cdot |B(k, R)|^{\frac{2}{N}} \right\} \cdot |B(k, R)|^{\frac{2}{N}},$$

$$|B(h, \rho)|^{\frac{N-2}{N}} \leq \frac{c_0}{(h-k)^2} \left\{ \frac{4}{(R-\rho)^2} \int_{B(k,R)} |u-k|^2 dx + \Lambda \int_{B(k,R)} f_0^2 dx \cdot |B(k, R)|^{\frac{2}{N}} \right\}. \tag{9.9}$$

Invece, associando il teorema 9.1 al lemma 9.2 si dimostra l'analogo del teorema 6.2 ossia il

TEOREMA 9.3. - *Sia* Ω *di classe* C^1, Γ *ammissibile*, $y \in \Gamma$ *e* $\rho < R < \rho_1$.

a) *Se* $h > k > 0$ *si ha*

$$|A(h, \rho)|^{\frac{2N-2}{N}} \leq \frac{c_1}{(h-k)^2} \left\{ \frac{4}{(R-\rho)^2} \int_{A(k,R)} |u-k|^2 dx + \right. \tag{9.10}$$

$$\left. + \Lambda |A(k, R)|^{\frac{2}{N}} \int_{A(k,R)} f_0^2 dx \right\} \cdot \left(|A(k, \rho)| - |A(h, \rho)| \right).$$

b) *Se* $h < k < 0$, *si ha*

$$(9.11) \qquad |B(h,\rho)|^{\frac{2N-2}{N}} \le \frac{c_1}{(h-k)^2}\left\{\frac{4}{(R-\rho)^2}\int\limits_{B(k,R)} |u-k|^2 dx + \right.$$

$$\left. + \Lambda\, |B(k,R)|^{\frac{2}{N}} \int\limits_{B(k,R)} f_0^2 dx\right\} \cdot \{|B(k,R)| - |B(h,R)|\}.$$

I teoremi 9.2 e 9.3 permettono di dimostrare dei risultati analoghi ai teoremi del § 4. In corrispondenza al teorema 7.1, abbiamo il

TEOREMA 9.4. - *Esistono costanti* $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(p, N, c_0)$ *e* $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(p, N, c_0, P)$ *per cui*

(i) *Se* $k_0 \ge 0$ *è tale che*

$$|A(k_0, r)| \le \frac{\zeta}{2^{N+1}} |\Omega(y, r)|$$

ove $y \in \partial\Omega$ *e* $0 < r < \rho_1$, *allora*

$$\left|A\left(k_0 + \frac{d}{2}, \frac{r}{2}\right)\right| = 0$$

se

$$d^2 \ge \frac{\tilde{\theta}}{r^N} \int\limits_{A(k_0, r)} |u - k_0|^2 dx + \tilde{\lambda} r^{2\left(2-\frac{N}{p}\right)}.$$

(ii) *Se* $k_0 \le 0$ *è tale che*

$$|B(k_0, r)| \le \frac{\zeta}{2^{N+1}} |\Omega(y, r)|$$

ove $y \in \partial\Omega$ *e* $0 < r < \rho_1$, *allora*

$$\left|B\left(k_0 - \frac{d}{2}, \frac{r}{2}\right)\right| = 0$$

se

$$d^2 \ge \frac{\tilde{\theta}}{r^N} \int\limits_{B(k_0, r)} |u - k_0|^2 dx + \tilde{\lambda} r^{2\left(2-\frac{N}{p}\right)}.$$

ζ *è definita come all'inizio del numero 7, e* P *è dato da* $\Lambda \|f_0\|_p^2$.
Al teorema 7.2 corrisponde il

TEOREMA 9.5. - *Esistono due costanti* $\bar{\eta}$ *e* S $(\bar{\eta} < 1)$ *che dipendono soltanto da* Ω, Γ, N, p *e* f_0 *tali che*

$$\omega(u;\ r) \leq \bar{\eta}\omega(u;\ 4r) + S r^{2-\frac{N}{p}} \tag{9.12}$$

qualunque siano $y \in \Gamma$ e $r < \frac{1}{4}\rho_1$.

OSSERVAZIONE. - Siano, come nel numero 7,

$$l_1 = \sup_{\Omega(y,\,4r)} u(x),$$

$$l_2 = \inf_{\Omega(y,\,4r)} u(x)$$

e

$$\bar{l} = \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

In questo caso (problema P_3) per dimostrare la tesi, contrariamente a quanto avveniva per il problema P_1, è conveniente distinguere soltanto due casi, e cioè:

1°) $\bar{l} \geq 0$.

2°) $\bar{l} < 0$.

Per dimostrare il primo caso si adopera la a) del teorema 9.3. Invece il secondo caso si dimostra adoperando la b) del teorema citato.

Dal teorema 9.5 discende il lemma 9.1, enunciato all'inizio di questo numero.

Nel seguito prenderemo in considerazione i punti $y \in \partial\Omega - \Gamma$.
Dato un tale punto, indicheremo con $\delta_0(y)$ la distanza di y a Γ. Porremo inoltre

$$\rho_0(y) = \min(\rho_0,\ \delta_0(y))$$

e

$$\rho_1(y) = \min(\rho_1,\ \delta_0(y)) = \min(1,\ \rho_0(y)).$$

Per i punti $y \in \partial\Omega - \Gamma$ è valido il seguente teorema (analogo al teorema 7.2):

TEOREMA 9.6. - *Esistono due costanti* $\bar{\eta}$ *e* $S(\bar{\eta} < 1)$ *tali che*

$$\omega(u;\ r) \leq \bar{\eta}\omega(u;\ 4r) + S r^{2-\frac{N}{p}} \tag{9.13}$$

qualunque siano $y \in \partial\Omega - \Gamma$ *e* $r < \frac{1}{4}\rho_1(y)$.

Infatti tutte le dimostrazioni eseguite fino al teorema 7.2 (incluso) sono valide se:

1) $u(x)$ è intesa come soluzione del problema P_3.

2) Si sostituisce $\boldsymbol{K}$ con $\boldsymbol{K}_0$.

3) Si prendono in considerazione soltanto punti $y \in \partial\Omega - \Gamma$ e raggi minori di $\delta_0(y)$.

Ovviamente le costanti $\bar{\eta}$ e S dei teoremi 9.6 e 9.5 si possono prendere uguali.

Abbiamo visto nel numero 7 come dal teorema 7.2 discendeva ii lemma 7.3; in modo analogo [2] dal teorema 9.6 discende il

LEMMA 9.3. - *Siano $\bar{\eta}$ e S le costanti del teorema 9.6 e sia a un numero fissato in modo tale che $\bar{\eta} < a < 1$.*

Essendo y un punto di $\partial\Omega - \Gamma$ sia

$$\bar{\mathcal{H}}_y = \bar{M}_y + \frac{S}{1-a} \tag{9.14}$$

dove $\bar{M}_y$ soddisfa la maggiorazione

$$\bar{M}_y \geq \left[\frac{4}{\rho_1(y)}\right]^a \omega(y;\ \rho_1(y)). \tag{9.15}$$

Allora esiste una costante α (indipendente del punto y) tale che

$$\omega(y;\ \rho) \leq \bar{\mathcal{H}}_y \rho^\alpha \tag{9.16}$$

per tutti i ρ positivi e minori di $\rho_1(y)$.

Evidentemente possiamo scegliere α uguale alla costante α che compare nel lemma 9.1.

Dai lemmi 9.1 e 9.3 discende il

TEOREMA 9.7. - *Esistono costanti positive α, $\mathcal{H}_0$ e $\bar{\rho}$ tali che qualunque sia $y \in \partial\Omega$ si ha*

$$\omega(y;\ \rho) \leq \mathcal{H}_0 \rho^\alpha, \qquad \forall\, 0 < \rho < \bar{\rho}. \tag{9.17}$$

DIM. - Fissiamo $\bar{\rho} = \frac{\rho_1}{2}$. Dato un punto y, se questo appartiene a Γ, il lemma 9.1 implica la relazione (9.17).

---

(2) Si sostituisca nella dimostrazione del lemma 7.3 la costante ρ_1 con $\rho_1(y)$, e si prenda $K = \omega(y;\ \rho_1(y))$.

Se y appartiene a $\partial\Omega - \Gamma$, o

$$\delta_0(y) \geq \bar{\rho}$$

oppure

$$\delta_0(y) < \bar{\rho}.$$

Nel primo caso si ha

$$\rho_1(y) \geq \frac{\rho_1}{2} = \bar{\rho},$$

e la (9.16) è verificata per tutti i $\rho < \bar{\rho}$; d'altronde $\overline{\mathcal{H}}_y$ è indipendente da y, poichè si può prendere

$$\overline{M}_y = \left[\frac{4}{\bar{\rho}}\right]^{\alpha} K$$

dove K è l'oscillazione di $u(x)$ in $\bar{\Omega}$; la (9.17) è perciò verificata.

Nel secondo caso, si consideri un punto $y_0 \in \Gamma$ tale che

$$\operatorname{dist}(y_0, y) = \delta_0(y).$$

Dato ρ distinguiamo due casi:

(i) $\delta_0(y) \leq \rho < \bar{\rho}$.

(ii) $0 < \rho < \delta_0(y)$.

Nel caso (i) si ha

$$\Omega(y, \rho) \subset \Omega(y_0, 2\rho)$$

e quindi, applicando il lemma 9.1, si ottiene

$$\omega(y; \rho) \leq \omega(y_0; 2\rho) \leq 4^{\alpha}\mathcal{H}\rho^{\alpha}.$$

Se invece è verificata la (ii) si ha l'inclusione

$$\Omega(y, \delta_0(y)) \subset \Omega(y_0, 2\delta_0(y_0)),$$

ed, applicando il lemma 9.1, risulta

$$\omega(y; \delta_0(y)) \leq \omega(y_0; 2\delta_0(y)) \leq \mathcal{H}4^{\alpha}[\delta_0(y)]^{\alpha}. \tag{9.18}$$

D'altra parte, siccome

$$\rho_1(y) = \delta_0(y),$$

il lemma 9.3 è applicabile per ρ soddisfacente la (ii). Inoltre possiamo prendere

$$\overline{M}_y = 16^{\alpha}\mathcal{H}$$

poichè, tenendo conto della (9.18), abbiamo

$$\left[\frac{4}{\delta_0(y)}\right]^{\alpha} \omega(y\,;\ \delta_0(y)) \leq 16^{\alpha}\mathcal{H}\,;$$

ossia

$$\omega(y\,;\ \rho) \leq \left(16^{\alpha}\mathcal{H} + \frac{S}{1-a}\right)\rho^{\alpha}.$$

Ciò completa la dimostrazione.

Il teorema 9.7 garantisce la validità delle considerazioni che abbiamo svolto nell'ultima parte del numero 7 se la funzione ivi considerata è intesa come soluzione del problema P_3; risulta pertanto dimostrata l'hölderianità di $u(x)$ in $\bar{\Omega}$.

§ 6. - **Generalizzazioni.**

9. - Facciamo notare in questo numero che i risultati ottenuti sono validi anche in condizioni più generali.

Consideriamo l'operatore

(9.1) $$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

a coefficienti misurabili e limitati (basterebbe che i coefficienti b_i e c fossero soltanto in $L^q(\Omega)$ e $L^{q/2}(\Omega)$ rispettivamente, con $q > N$).

Supponiamo che

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu\,|\,\xi\,|^2 \qquad \forall\ \xi \in R^N$$

per quasi tutti gli x di Ω.

Sia $a(u, v)$ la forma bilineare su $H^1(\Omega)$ associata all'operatore L

$$a(u,\ v) = \int_{\Omega} \{\,\sum_{i,j} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i} b_i u_{x_i}v + cu\,\}\,dx.$$

Consideriamo il problema di trovare $u \in \boldsymbol{K}$ [rispettivamente $\boldsymbol{K}_0$] tale che

(9.2) $$a(u,\ v-u) \geq (f_0,\ v-u) + \sum_{i=1}^{N} (f_i,\ (v-u)_{x_i})$$

qualunque sia $v \in \boldsymbol{K}$ [risp. $\boldsymbol{K}_0$].

Supponiamo che $c(x) \geq 0$ e che $a(u, v)$ sia coercitiva su $H^1(\Omega)$ [risp. $\boldsymbol{K}_0$]. Siano f_0 in $L^p(\Omega)$ con $p > N/2$ e f_i, $1 \leq i \leq N$, in $L^q(\Omega)$ con $q > N$

Allora se Ω gode della proprietà di cono [risp. se ha frontiera lipschitziana] la soluzione di (9.2) è limitata, e vale la maggiorazione

$$\max_{\Omega} |u| \leq K\left(\|f_0\|_{L^p(\Omega)} + \|F\|_{L^q(\Omega)}\right)$$

dove

$$F^2 = \sum_{i=1}^{N} (f_i)^2 .$$

Se Ω ha frontiera C^1 [e Γ è ammissibile] allora la soluzione di (9.2) è hölderiana su $\bar{\Omega}$.

Facciamo notare inoltre che anche le ipotesi su Ω, $\partial\Omega$ e Γ possono essere indebolite. Infatti l'aspetto essenziale della regolarità loro richiesta è la validità dei lemmi 4.1 e 4.2, lemmi che si ottengono in condizioni molto meno restrittive, poichè sono conseguenza diretta della (4.7). A questo riguardo vedere [9].

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BREZIS et G. STAMPACCHIA, *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 96, (1968).

[2] G. FICHERA, *Un teorema generale di semicontinuità per gli integrali multipli e sue applicazioni alla fisica-matematica*, Atti del Convegno Lagrangiano, Torino 22-25 ottobre 1963; supplemento al vol. 98, (1963-64), degli Atti della Accademia delle Scienze di Torino.

[3] — —, *Problemi elastostatici con vincoli unilateri: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Mem. Accad. Naz. Lincei, ser. 8, vol. 7, (1964).

[4] A. FRIEDMAN, *Boundary behavior of solutions of variational inequalities for elliptic operators*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 27, (1967-68).

[5] Y. HAUGAZEAU, *Sur des inéquations variationnelles*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 17 juillet 1967, série A.

[6] J. L. LIONS, *Équations aux dérivées partielles et calcul des variations*, Cours de la Faculté des Sciences de Paris, 2e semestre (1967), (multigr.).

[7] J. L. LIONS and G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Communications on pure and applied mathematics, vol. XX (1967).

[8] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie (1967).

[9] G. STAMPACCHIA, *Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane*, Ann. Mat. Pura Appl., 51 (1960).

[10] — —, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Annales de l'Institut Fourier, tome XV, fascicule 1 (1965).