

CORSO: **Teoria della Misura**

CODICE ESAME: **219AA**

NUMERO DI CREDITI: **6**

NUMERO DI ORE: **42**

DOCENTE: **Giovanni Alberti**

ANNO ACCADEMICO: **2024-25**

SEMESTRE: **primo**

CORSO DI STUDIO: **laurea magistrale in Matematica (WMA-LM)**

Obiettivi formativi. La teoria della misura è uno strumento fondamentale in diverse aree della matematica, in particolare nella teoria della Probabilità e in diverse sotto-aree dell'Analisi, per esempio il Calcolo delle Variazioni e la Teoria Geometrica della Misura.

Lo scopo di questo corso è fornire le nozioni elementari e avanzate di teoria della misura necessarie ad affrontare i corsi avanzanti nelle suddette aree, al di là delle nozioni minimali introdotte nel corso di "Analisi 3".

Anche se fa parte della laurea magistrale, questo corso è del tutto accessibile a studenti del terzo anno della laurea triennale.

Programma del corso [versione: 29 agosto 2025].

Le parti non fondamentali sono riportati in corsivo.

1. NOZIONI DI BASE

- σ -algebre ed altre classi di insiemi; σ -algebra dei Boreliani; funzioni misurabili e loro proprietà.
- Misure σ -additive su una σ -algebra.
- Integrazione di funzioni misurabili positive; integrazione di funzioni a valori reali o vettoriali.
- Teoremi di convergenza (Lebesgue, Fatou, Beppo Levi).
- Teorema delle classi monotone.
- Completamento di una σ -algebra rispetto a una misura.

2. MISURE ESTERNE

- Definizione di misura esterna (misura σ -subadditiva); insiemi misurabili (secondo Caratheodory); misurabilità dei Boreliani.
- Costruzione di Caratheodory. Esempi: misura di Lebesgue, misure di Hausdorff.

3. MISURE PRODOTTO

- Teorema di Fubini-Tonelli per la misura di Lebesgue.
- Misure prodotto; teorema di Fubini-Tonelli per misure prodotto.
- Prodotto infinito di misure.

4. MISURE SINGOLARI E MISURE ASSOLUTAMENTE CONTINUE

- Misura singolare e misura assolutamente continua rispetto a un'altra; decomposizione di Hahn.
- Teorema di Radon-Nikodym.

5. MISURE A VALORI REALI O VETTORIALI

- Misure a valori reali e vettoriali; rappresentazione in termini di misure positive.
- Le misure reali come elementi del duale delle funzioni continue; teorema di Riesz.
- Convergenza di successioni di misure (nel senso della dualità).

6. COMPLEMENTI

- Collegamento con l'integrale di Riemann.
- Misure immagine e formule di cambio di variabile.
- Disintegrazione di una misura rispetto ad una mappa misurabile.
- Insiemi analitici e insiemi universalmente misurabili.
- Teoremi di ricoprimento di Vitali e di Besicovitch.

- Esistenza dei punti di continuità approssimata (punti di Lebesgue) per una funzione misurabile e per una funzione in L^p .

Prerequisiti. È necessaria una chiara comprensione della teoria dell'integrazione di base (quella presentata nel corso di “Analisi 2”) e delle nozioni di base di algebra lineare (dal corso di “Geometria 1”) e di topologia generale (dal corso di “Geometria 2”).

A partire da quest'anno le nozioni di base di teoria della misura ed integrazione secondo Lebesgue vengono esposte nelle prime lezioni del corso di “Analisi 3” che si svolge in parallelo; è opportuno che uno studente che non ha visto le basi della teoria della misura in alcun corso segua tali lezioni. In alcuni (pochi) punti del corso sono utili alcune nozioni elementari di teoria degli insiemi e di analisi funzionale, che tuttavia verranno richiamate dal docente.

Testi di riferimento. Il corso non segue in maniera precisa alcun testo particolare. La maggior parte degli argomenti trattati sono coperti da testi standard quali per esempio:

- L. Ambrosio, G. Da Prato, A. Mennucci: *Introduction to measure theory and integration*. Lecture Notes of the Scuola Normale Superiore di Pisa. Edizioni della Normale, Pisa, 2011.
- V.I. Bogachev: *Measure theory, volume 1*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- L.C. Evans, R.F. Gariepy: *Measure theory and fine properties of functions, revised edition*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, 2015.
- P.R. Halmos: *Measure Theory*. Van Nostrand Co., New York, 1950.
- E.M. Stein, R. Shakarchi: *Real analysis. Measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton Lectures in Analysis 3. Princeton University Press, Princeton, 2005.

Modalità d'esame. L'esame consiste di una prova orale sui risultati spiegati nel corso (enunciati e dimostrazioni) accompagnata dalla risoluzione di alcuni esercizi.¹

Comunicazioni e streaming delle lezioni Per le comunicazioni riguardanti il corso viene utilizzata la piattaforma MS Teams dell'Università di Pisa ([link al team](#)).

¹La parte riguardante gli esercizi non è ancora ben definita; la risoluzione di esercizi durante la prova orale potrebbe essere sostituita da serie di esercizi da risolvere a casa, magari in collaborazione con altri studenti.