

Proposte per i seminari d'esame [versione: 30 dicembre 2024].

Per ogni seminario verrà data su richiesta una traccia più dettagliata di quella riportata sotto.

1. *Il teorema di semicontinuità di E. Acerbi e N. Fusco.*

In questo seminario si estende al caso $W^{1,p}$ il teorema di semicontinuità per funzionali quasiconvessi visto a lezione nel caso $p = \infty$.

Referenze:

- F. Rindler: *Calculus of variations*. Universitext, Springer International, 2018;
- B. Dacorogna: *Introduction to the calculus of variations*. Imperial College Press, London, 2004.

Non ancora assegnato.

2. *Il controesempio di Šverák.*

V. Šverák ha dimostrato che la convessità di rango uno non implica la quasiconvessità esibendo una funzione quasi esplicita che è convessa di rango uno ma non quasiconvessa. Lo scopo del seminario è presentare la costruzione di Šverák e due applicazioni dovute a J. Kristensen e S. Müller.

Referenze:

- V. Šverák: Rank-one convexity does not imply quasiconvexity. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 120 (1992), 185-189;
- J. Kristensen: On the non-locality of quasiconvexity. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 16 (1999), 1-13;
- S. Müller: Quasiconvexity is not invariant under transposition. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 130 (2000), 389-395.

Assegnato a Marco La Gioia, presentato il 9 luglio 2024.

3. *Il problema di Steiner.*

Una delle varianti del problema di Steiner consiste nel trovare l'insieme di lunghezza minima in uno spazio metrico X tra tutti quelli che contengono un insieme assegnato (e finito) E .

Lo scopo del seminario è dimostrare un teorema di esistenza per questo problema quando X è uno spazio compatto e connesso per curve rettificabili, nella classe dei sottoinsiemi di X che si scrivono come unioni finite di curve rettificabili, descrivere la struttura dei minimi, e far vedere che se X è una varietà Riemanniana i vertici liberi dei minimi hanno ordine tre.

Non ancora assegnato.

4. *Il fenomeno di Lavrentiev.*

Può succedere che l'estremo inferiore dei valori di un funzionale integrale ristretto alla classe delle funzioni regolari sia strettamente maggiore del minimo del funzionale tra le funzioni di Sobolev. Tale fenomeno è noto come fenomeno di Lavrentiev, ed è collegato al fatto che prendendo la restrizione del funzionale alle funzioni regolari, e rilassando tale restrizione su un opportuno spazio di Sobolev, si ottiene un funzionale strettamente maggiore di quello di partenza.

Lo scopo del seminario è presentare con cura due o più esempi del fenomeno di Lavrentiev, tra cui quello di B. Manià, completando la traccia fornita dal docente.

Non ancora assegnato.

5. *Teoremi di Reshetnyak.*

L'oggetto di questo seminario sono due teoremi di Reshetnyak: il primo riguarda la semicontinuità di certi funzionali integrali sullo spazio delle misure (vettoriali) rispetto della convergenza debole* (quella indotta dalla dualità delle misure con lo spazio delle funzioni continue); il secondo riguarda la continuità di funzionali dello stesso tipo rispetto alla convergenza in misura (che può essere vista come un sostituto della convergenza forte nello spazio delle misure).

Referenza:

- L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara: *Functions of Bounded Variation and free discontinuity problems*. Oxford University Press, Oxford, 2000.

Assegnato a Franco Grigoletto, presentato il 31 ottobre 2024.

6. *La disuguaglianza isoperimetrica quantitativa nel piano.*

Usando la serie di Fourier è possibile dimostrare la disuguaglianza isoperimetrica per insiemi nel piano il cui bordo è parametrizzato da un cammino semplice, vale a dire

$$L^2 \geq 4\pi A$$

dove A è l'area dell'insieme ed L la lunghezza del bordo. Adattando questa dimostrazione si può ottenere anche la disuguaglianza isoperimetrica "quantitativa", che stima quanto una figura piana dista da un cerchio sulla base della differenza $L^2 - 4\pi A$ (il cosiddetto difetto isoperimetrico). Non ancora assegnato.

7. *Tre varianti della disuguaglianza isoperimetrica in $\mathbb{R}^d$.*

La disuguaglianza isoperimetrica dice che tra tutti i domini regolari in $\mathbb{R}^d$ con pari volume, la palla minimizza l'area del bordo (dove per area si intende il volume $(d-1)$ -dimensionale).

Ci sono diverse dimostrazioni di questo enunciato, tra cui

- (a) una dovuta a E. De Giorgi, basata sulla teoria degli insiemi di perimetro finito,
- (b) una basata sulla mappa di Knothe;
- (c) una dovuta a X. Cabré, basata sulle funzioni armoniche.

Lo scopo del seminario è presentare in dettaglio una di queste dimostrazioni (si tratta quindi di tre seminari diversi).

Una presentazione molto dettagliata della prima dimostrazione si trova in

- N. Fusco: The classical isoperimetric theorem. *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli* (4), 71 (2004), 63-107.

Una presentazione della seconda si trova in

- K. DeMason: *Optimal mass transport and the isoperimetric inequality*. Expository notes, University of Chicago ([link](#)).

Possibili referenze per la terza sono:

- I. Chavel: *Riemannian Geometry: a modern introduction. 2nd revised edition*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 98. Cambridge University Press, Cambridge, 2006;
- X. Cabré: Isoperimetric, Sobolev, and eigenvalue inequalities via the Alexandroff-Bakelman-Pucci method: a survey. *Chin. Ann. Math. (B)*, 38 (2017), 201-214.

Il seminario (c) è stato assegnato ad Andrea Rocca, e presentato il 16 dicembre 2024.

8. *Riordinamento radiale e disuguaglianze collegate.*

Data $u : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$, il riordinamento radiale di u è la funzione radiale $u^* : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$ caratterizzata dalla proprietà che il t -esimo sopra-livello di u^* (vale a dire $E_t^* := \{x : u^*(x) \geq t\}$) ha lo stesso volume del t -esimo sopra-livello di u (vale a dire $\{x : u(x) \geq t\}$) per ogni $t > 0$.

Il riordinamento conserva le norme L^p e più in generale i funzionali del tipo $G(u) := \int g(u) dx$, preserva la proprietà di essere di Sobolev, e decresce diversi funzionali, tra cui quelli del tipo $F(u) := \int f(|\nabla u|) dx$ con f pari, convessa e nulla in 0. Come corollario si ottiene per esempio che tra tutti i domini con volume assegnato v , la palla minimizza il primo autovalore del laplaciano con condizioni di Dirichlet al bordo (disuguaglianza di Faber-Krahn).

Prerequisito: una discreta familiarità con la teoria delle funzioni di Sobolev.

Assegnato ad Alberti Pacati, presentato il 3 settembre 2024.

9. *Costante ottimale nella disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (GNS).*

La costante ottimale della disuguaglianza di GNS in $\mathbb{R}^d$ è determinata da un semplice problema di minimo, e utilizzando opportuni risultati di simmetrizzazione (seminario precedente) si dimostra che il minimo viene assunto tra le funzioni radiali e pu essere calcolato esplicitamente (il punto delicato è la dimostrazione dell'esistenza). Nel caso di domini diversi da $\mathbb{R}^d$, invece, tale minimo non esiste.

Referenze originali (non necessariamente quelle da seguire):

- G. Talenti: Best constant in Sobolev inequality. *Ann. Mat. Pura Appl.* 110 (1976), 353-372;
- T. Aubin: Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev. *J. Differential Geometry* 11 (1976), 573-598.

Assegnato a Leonardo Matano, presentato il 22 maggio 2025.

10. *La versione multi-fase del teorema di Modica-Mortola.*

Il teorema di Modica-Mortola sulla Gamma-convergenza dei funzionali di Ginzburg-Landau scalari ammette un'interessante estensione al caso di fluidi con più di due fasi.

Referenza:

- S. Baldo: Minimal interface criterion for phase transitions in mixtures of Cahn-Hilliard fluids. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 7 (1990), 67-90.

Non ancora assegnato.

11. *Il teorema di Lichtenstein.*

Ogni superficie di Riemann S di dimensione 2 diffeomorfa al disco ammette una parametrizzazione conforme, vale a dire una parametrizzazione dal disco D^2 in S il cui differenziale in un punto qualunque (inteso come applicazione lineare) è conforme, ovvero conserva gli angoli. Il problema si riduce a dimostrare che il disco D^2 dotato di una metrica riemanniana diversa da quella euclidea ammette una parametrizzazione conforme. Tale parametrizzazione può essere ottenuta minimizzando l'energia di Dirichlet (opportunamente definita) tra tutte le mappe dal disco in sé che soddisfano un'opportuna condizione al bordo.

Prerequisito: non farsi spaventare dalla terminologia geometrica.

Assegnato a Giorgio Gatti, presentato il 4 settembre 2024.

12. *Il teorema di compattezza per SBV di L. Ambrosio.*

Lo spazio delle funzioni SBV ed il teorema di compattezza di L. Ambrosio sono stati usati per dimostrare teoremi di esistenza per problemi variazionali motivati dalla meccanica dei continui e dalla teoria della ricostruzione di immagine. Lo scopo di questo seminario è dare una dimostrazione del teorema di Ambrosio (non necessariamente nella formulazione più generale possibile) prima in dimensione uno e poi in dimensione qualunque.

Prerequisito: una qualche familiarità con la teoria delle funzioni BV .

Referenze:

- L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara: *Functions of Bounded Variation and free discontinuity problems*. Oxford University Press, 2000;
- G. Alberti, C. Mantegazza: A note on the theory of SBV functions. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana Sezione B* (7), 11 (1997), 375-382.

Assegnato a Matteo Gori, non ancora presentato.

13. *Formulazione di Kantorovich del problema di trasporto ottimo e il teorema di Brenier.*

Il problema del trasporto ottimo ammette una formulazione classica e una formulazione rilassata dovuta a Kantorovich. L'esistenza di una soluzione del problema di Kantorovich (cioè di un piano di trasporto ottimale) è relativamente semplice, mentre l'esistenza di una soluzione per il problema classico (cioè di una mappa di trasporto ottimale) è stata dimostrata da Y. Brenier per il costo quadratico.

Referenza:

- F. Santambrogio: *Optimal transport for applied mathematicians*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications 87, Birkhäuser Boston, 2015.

Assegnato a Stefano Mannella, presentato il 17 dicembre 2024.

14. *La disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb e applicazioni.*

Partendo dalla disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb, si ottiene la disuguaglianza di Prekopa-Leindler (come caso particolare), da cui a sua volta si ottiene la disuguaglianza di Brunn-Minkowski, e quindi la disuguaglianza isoperimetrica (in dimensione qualunque). Lo scopo del seminario è dimostrare la disuguaglianza di Borell-Brascamp-Lieb oppure quella di Prekopa-Leindler.

Referenze generali sull'argomento sono:

- H.J. Brascamp, E.H. Lieb: On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems (...). *J. Functional Analysis*, 22 (1976), 366-389;
- M. Gardner: The Brunn-Minkowski inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 39 (2002), 355-405.

Assegnato a Matteo Caporali, presentato il 20 giugno 2025.

15. *Un risultato di omogeneizzazione di D. Cioranescu e F. Murat.*

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ con bordo regolare, siano (r_n) e (d_n) due successioni di numeri positivi tali che $r_n \ll d_n$, e per ogni $n = 1, 2, \dots$ sia K_n l'unione di tutte le palle di raggio r_n e centro nel reticolo $d_n \mathbb{Z}^d$. D. Cioranescu e F. Murat si sono chiesti cosa succede per $n \rightarrow \infty$ alla soluzione u_n di un'equazione ellittica come ad esempio $\Delta u = f$ nel dominio $\Omega \setminus K_n$ con condizioni al bordo di Dirichlet $u = 0$, e hanno trovato che la risposta dipende dal comportamento asintotico della 2-capacità di K_n : se questa capacità tende a 0 allora le soluzioni u_n convergono alla soluzione dell'equazione $\nabla u = f$ su Ω con condizione di Dirichlet al bordo; se la capacità tende a $+\infty$ allora u_n tende a 0; se infine la capacità tende ad un limite finito e positivo L , ed è questo il caso più interessante, u_n tende alla soluzione su Ω di una equazione differenziale con un termine aggiuntivo rispetto a quella di partenza (sempre con condizione di Dirichlet al bordo).

Lo scopo del seminario è dimostrare questo risultato per Γ -convergenza.

Referenze:

- D. Cioranescu, F. Murat: Un terme étrange venu d'ailleurs, I and II. *Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, Collège de France Seminar. Vol. II and III*. Research Notes in Math. 60 and 70, pp. 98-138 and 154-178. Pitman, London, 1982.
- A. Braides: *Γ -convergence for beginners*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 22. Oxford University Press, Oxford, 2002.

Assegnato a Stefano Saviani, presentato il 24 novembre 2024.