AM1 gest 20/21

Lezione 53
seconda parte
12/12/2020

Funzioni definite da integrali

Data $f : I \to \mathbb{R}$ e $a \in I$, pongo

intervallo

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{per ogni } x \in I$$

So che F è una primitiva di f (lemma 3 nella dimostrazione del teor. fondam. del calcolo integr.).

Posso studiare il grafico di F anche se non ho una formula esplicita?

Risposta: in parte sì, perché conosco la derivata di F:

$$F'(x) = f(x)$$

Esempio

Definisco $F(x) := \int_0^x e^{-t^2}dt$.

(F è circa la funzione di ripartizione della Gaussiana — ha un importante in probabilità e statistica)

Posso studiare il grafico di F:

<u>Insieme di definizione</u>: ogni $x \in \mathbb{R}$ (si tratta di un integrale proprio ....).

<u>Segno di F</u>: $F(x) > 0$ per $x > 0$ (perché $F(x)$ è l'integrale di una funzione positiva con estremi di integrazione nell'ordine giusto!)

Per $x < 0$,

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = -\underbrace{\int_x^0 e^{-t^2} dt}_{\text{positivo}}$$

e quindi $F(x) < 0$.

Infine $F(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0$.

$$\operatorname{sgn} F(x) \qquad \underset{0}{\overset{- \qquad\quad +}{\longrightarrow}} \; x$$

<u>Limiti a $\pm\infty$</u>

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt := L$ è finito per confronto con $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$. ($\forall a > 0$, $e^x \gg x^a \Rightarrow e^{t^2} \gg t^{2a} \Rightarrow$ $e^{-t^2} = \frac{1}{e^{t^2}} \ll \frac{1}{t^{2a}}$; scelgo $a = 1$).

Non posso calcolare L.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \int_0^{-\infty} e^{-t^2}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ s=-t \\ dt=-ds}}{=} -\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds = -L$$

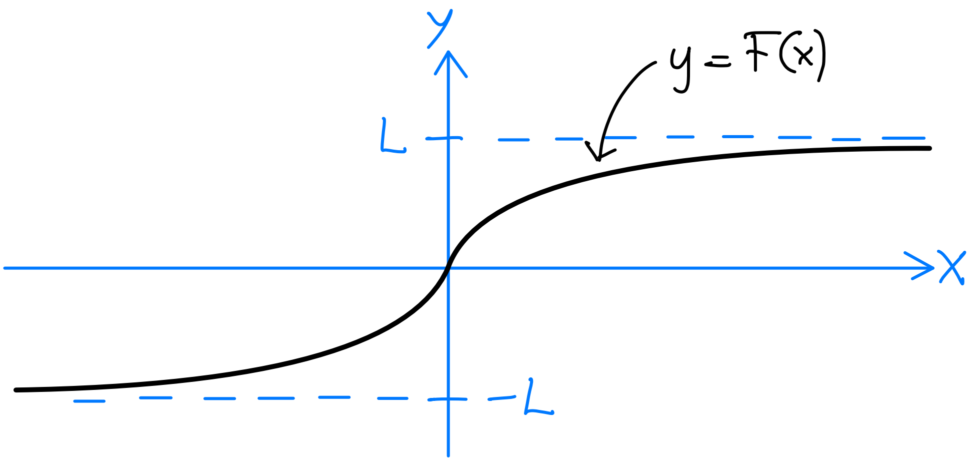
Osservazione : Vale anche che F è dispari

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ s=-t \\ dt=-ds}}{=} -\int_0^{x} e^{-s^2}\, ds = -F(x).$$

Segno della derivata di F

Siccome $F'(x) = e^{-x^2} > 0 \quad \forall x$, F è strettamente crescente.

Disegno del grafico di F



Formule collegate

1| Sia
$$G(x) := \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

Allora
$$G'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Dim.

$G(x) = F(g(x))$ dove $F(x) := \int_a^{x} f(t)\,dt$

Quindi $G'(x) = \left(F(g(x))\right)' \underset{\uparrow}{=} F'(g(x)) \cdot g'(x)$
$= f(g(x)) \cdot g'(x)$.

derivata della funz. composta

$\square$

2| Sia
$$H(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt,$$

Allora
$$H'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x).$$

Dim.

Se F è una primitiva di f allora
$$H(x) = \Big| F(t) \Big|_{h(x)}^{g(x)} = F(g(x)) - F(h(x))$$

e quindi

$$H'(x) = \big(F(g(x))\big)' - \big(F(h(x))\big)' = \dots$$

$$= f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x). \qquad \square$$

Esempio

Calcolare la derivata di $H(x) = \displaystyle\int_{-x^4}^{x^4} \frac{1}{1+t^6}\, dt$.

Applico la formula precedente con:

$f(t) := \dfrac{1}{1+t^6}$, $g(x) := x^4$, $h(x) := -x^4$

$$H'(x) = \underbrace{\frac{1}{1+(x^4)^6}}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{(x^4)'}_{g'(x)} - \underbrace{\frac{1}{1+(-x^4)^6}}_{f(h(x))} \cdot \underbrace{(-x^4)'}_{h'(x)}$$

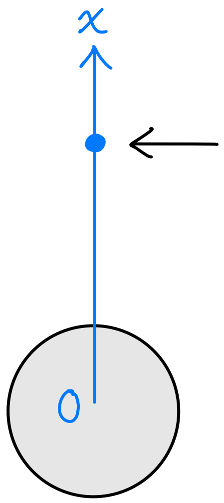
$$= \frac{8x^3}{1+x^{24}} .$$

AM1 gest 20/21 — lezione 56

18/12/2020

Esempi di problemi in cui appaiono equaz. differ.

1 solido in caduta libera



$x(t)$ = distanza del solido dal centro della terra al tempo t

Problema: trovare la legge oraria del solido, cioè la formula di $x(t)$.

Parto da $f = ma$ sapendo che

- $a = \ddot{x}$
- $f = \begin{cases} \text{a)} \; -mg & \text{(se posso supporre } g \text{ costante)} \\ \text{b)} \; -\dfrac{GMm}{x^2} \end{cases}$

G: cost. di grav. univ.
M: massa della terra

$\boxed{\text{Caso a)}}$

$$m\ddot{x} = ma = f = -mg$$

$$\ddot{x} = -g \qquad \text{(equaz. diff. } 2^{\circ} \text{ ordine)}$$

prendendo la primitiva (cioè integrando entrambi i termini)

$$\dot{x} = -gt + c_0 \qquad \text{con } c_0 \in \mathbb{R}$$

prendendo di nuovo la primitiva

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + c_0 t + c_1 \qquad \text{con } c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Per trovare le costanti c_0 e c_1 ho bisogno di altri dati sul moto del solido, per esempio posizione e velocità in certo istante t_0

(cioè $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$).

$\boxed{\text{Caso b}}$

$$m\ddot{x} = ma = f = -\frac{GMm}{x^2}$$

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{x^2}$$

equaz. diff. 2° ordine non lineare, non rientra tra quelle che sappiamo risolvere.

Moltiplico l'equazione per $\dot{x}$

$$\dot{x}\ddot{x} = -GM\frac{\dot{x}}{x^2}$$

$(\dot{x}(t))^2{}' = 2\dot{x}(t)\,\ddot{x}(t) \longrightarrow$

$$\left(\tfrac{1}{2}\dot{x}^2\right)' \qquad \left(\frac{GM}{x}\right)'$$

$$\longleftarrow \left(\frac{1}{x(t)}\right)' = -\frac{\dot{x}(t)}{(x(t))^2}$$

e ottengo $\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)' = \left(\frac{GM}{x}\right)'$ quindi

$$(*) \qquad \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{GM}{x} + c_0 \quad \text{con } c_0 \in \mathbb{R}$$

Posso riscrivere questa equazione come ho riottenuto la conservazione dell'energia. Questa procedura funziona ogni volta che la forza f ammette un potenziale.

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\text{energia cinetica}} - \underbrace{\frac{GMm}{x}}_{\text{energia potenziale}} = c_0$$

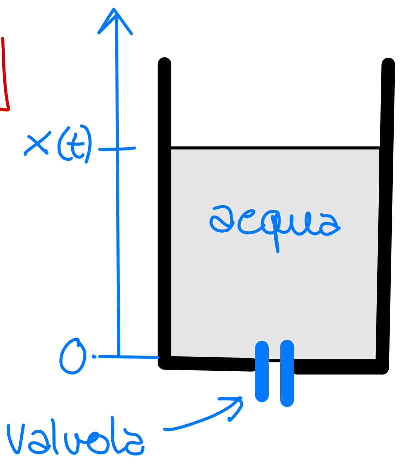
Ripartendo da (*) ottengo

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2GM}{x} + 2C_0}$$

Questa è un'equazione a variabili separabili.

Si può risolvere esplicitamente nel caso $C_0 = 0$.
Di più non si può fare (in questo corso).

2



recipiente cilindrico pieno d'acqua con valvola di scarico con portata proporzionale alla pressione

Voglio trovare la formula di $x(t)$ (altezza dell'acqua al tempo t)

$$\text{portata} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

volume di acqua uscita nell'intervallo di tempo Δt $= \big(x(t) - x(t+\Delta t)\big) \cdot A$
con A = area della base del cilindro.

$$\| $$

cost. × pressione e la pressione è proporzionale a $x(t)$

$$\| $$

kx dove la costante k dipende dalla valvola

Quindi
$$\frac{x(t) - x(t+\Delta t)}{\Delta t} = k\,x(t)$$

cioè

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -k\,x(t)$$

e passando al limite per $\Delta t \to 0$

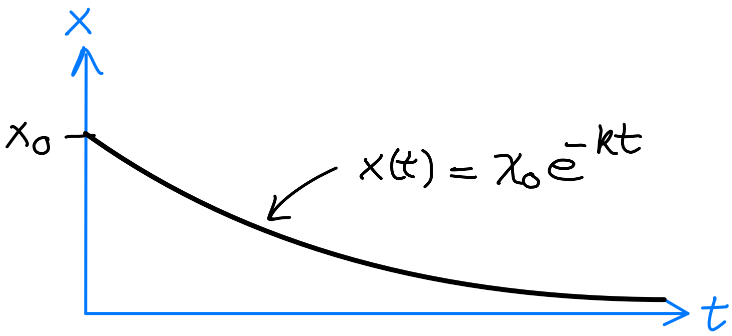
$$\dot{x} = -kx$$

equazione lineare del primo ordine a coeff. costanti e omogenea $\dot{x} + kx = 0$.
Eq. caratteristica $\lambda + k = 0$ cioè $\lambda = -k$.
La soluzione è

$$x(t) = c\, e^{-kt} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Se x_0 = altezza dell'acqua al tempo $t=0$ allora
$x_0 = x(0) = c e^{-k \cdot 0} = c$ e quindi

$$x(t) = x_0 e^{-kt}$$



3| Equazione di decadimento

Avete una certa quantità di sostanza $x(t)$ che decresce nel tempo, per esempio

a) isotopo instabile (per esempio uranio)
b) molecola instabile per effetto della luce, o del calore, o di altre condiz. esterne,

c) materiale che si scioglie in un liquido (per esempio sale in acqua)

Supponete di sapere che la frazione k di materiale che si perde per unità di tempo è costante.

Questo è sicuramente il caso del materiale radioattivo, ma anche quello del sale nell'acqua almeno se il sale è trascurabile rispetto alla quantità di liquido.

Allora per Δt piccolo

$$\frac{\overbrace{x(t)-x(t+\Delta t)}^{\text{materiale che si perde}}}{\Delta t} = k \cdot x(t)$$

allora

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = -k\, x(t)$$

e passando al limite per $t=0$

$$\dot{x} = -kx \quad \longleftarrow \text{equazione di decadim.}$$

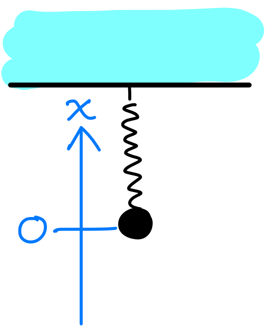
Esattamente come prima la soluzione è

$$x(t) = x_0\, e^{-kt}$$

$\uparrow$ quantità di materiale a $t=0$

4 | Oscillatore armonico

Versione base : peso attaccato ad una molla:



indico con $x(t)$ l'altezza del peso rispetto alla posizione di riposo ($x=0$ è la posiz. di riposo)

Voglio determinare $x(t)$.

Parto dall'equazione $f = ma$ e uso che $a = \ddot{x}$ e f è proporzionale allo spostamento dalla posizione di riposo (legge di Hooke):

$$f = -\underbrace{k}_{\text{costante elastica della molla}} x \qquad \text{(attenzione al segno} -\text{)}$$

Allora $\quad m\ddot{x} = ma = f = -kx, \quad$ cioè

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

equazione diff. del 2° ordine, lineare, a coeff. costanti e omogenea.

L' eq. caratteristica è $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ ha soluzioni $\lambda = \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega}$. La soluzione è

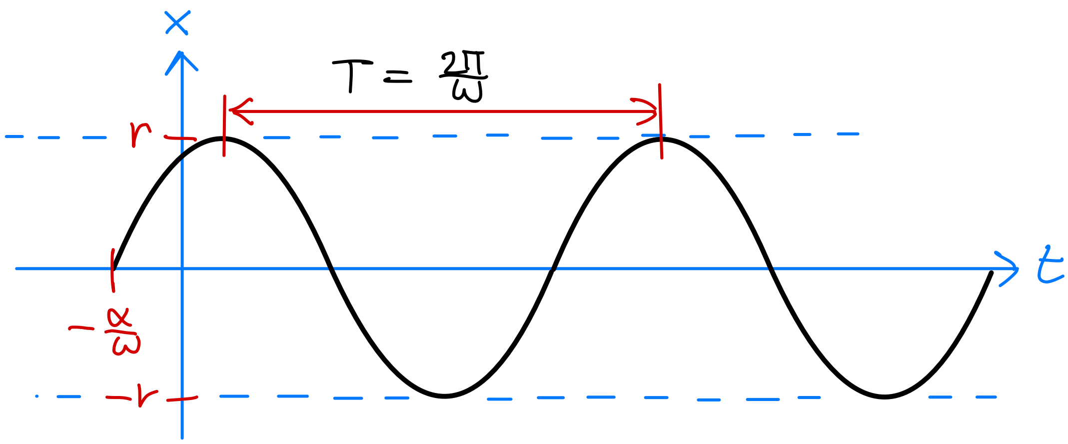
$$x(t) = c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per farsi un' idea di come sono fatte queste soluzioni le riscrivo in maniera diversa:
prendo r e α coordinate polari di (c_1, c_2) cioè $c_1 = r\cos\alpha$, $c_2 = r\sin\alpha$, e allora

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \\ &= r\left(\cos\alpha \cdot \sin(\omega t) + \sin\alpha \cos(\omega t)\right) \\ &= r \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni si possono scrivere come

$$x(t) = r \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{con } r \geq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$



5 | Oscillatore armonico smorzato

Suppongo ora che la massa del caso precedente sia anche sottoposta ad una forza di attrito proporzionale alla velocità cioè

$$f = -kx - \delta \dot{x}$$

In questo caso l'equazione diventa

$$\ddot{x} + \frac{\delta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

equaz. diff. 2° ordine a coeff. costanti e omogenea. L'eq. caratt. è $\lambda^2 + \frac{\delta}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$ e ha soluzioni

$$\lambda = \underbrace{-\frac{\delta}{2m}}_{p} \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\delta^2}{4m^2}}}_{\omega}$$

(se il coefficiente di attrito δ è suffic. piccolo, cioè $\delta \leq 2\sqrt{mk}$).

La soluzione è

$$x(t) = e^{pt}\left(c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\right) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

oppure

$$x(t) = r e^{pt} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \quad \text{con } r > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$